

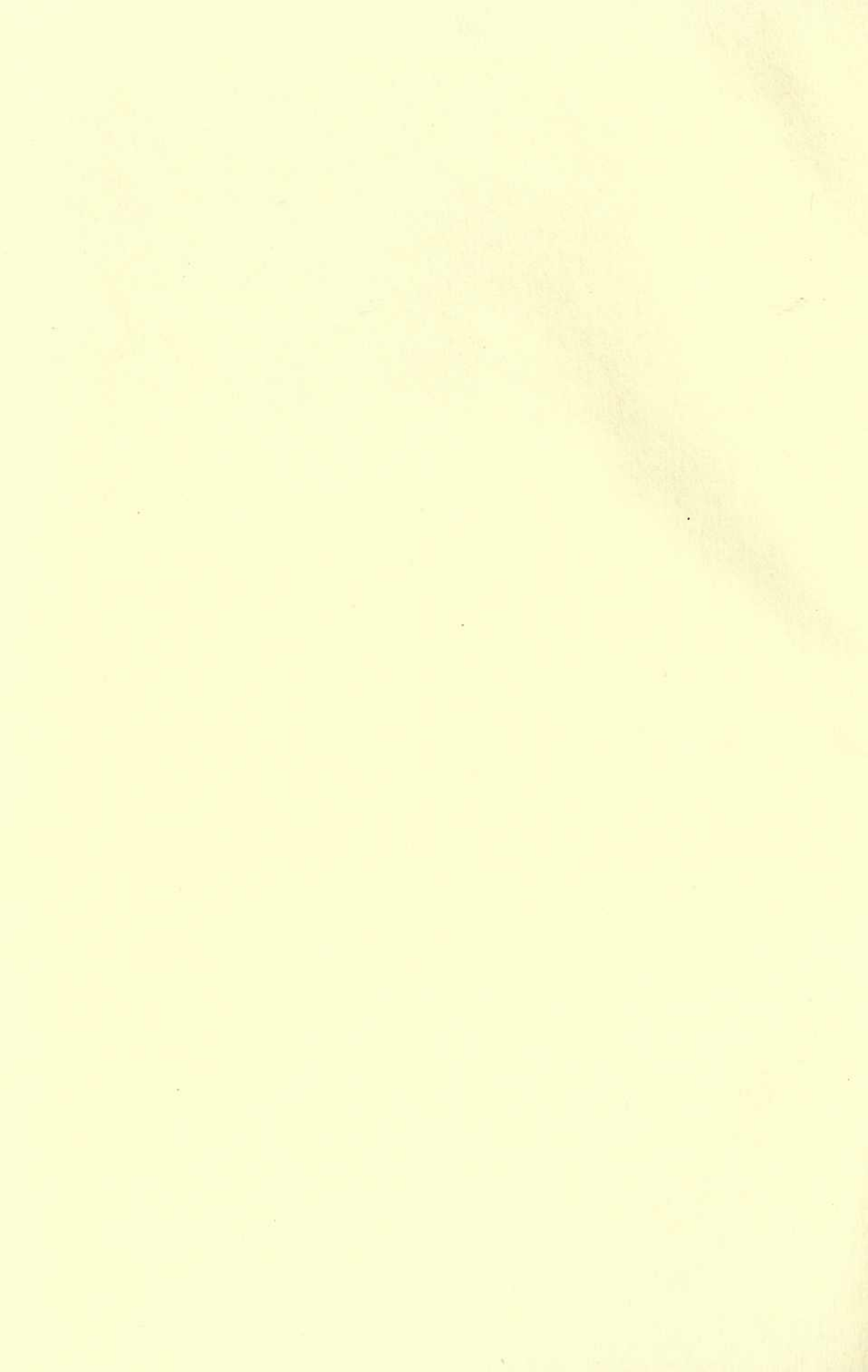

BERKELEY
LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA











ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND:

GEOMETRIE

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND IN DREI TEILEN

GEOMETRIE

REDIGIERT VON

W. FR. MEYER UND H. MOHRMANN
IN KÖNIGSBERG IN BASEL

ERSTER TEIL

ERSTE HÄLFTE

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1907—1910

Vorrede zum dritten Bande.

Schon bei der ursprünglichen Disposition der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften — man vergleiche den einleitenden Bericht von *W. von Dyck* im ersten Bande — wurde der Geometrie innerhalb der reinen Mathematik der dritte Band zugewiesen.

Der Stoff zerlegte sich naturgemäß in drei Hauptteile.

Zum ersten Teile gehören die Entwicklungen allgemeineren Charakters: die Grundlagen — die Grundbegriffe und die über die euklidische Geometrie hinausgehenden Geometrien —, sodann die Disziplinen der Analysis situs, der Gruppentheorie, der projektiven und darstellenden Geometrie nebst der Theorie der Polyeder; endlich die zur formalen Beherrschung notwendigen oder nützlichen Rechenmittel (Koordinaten) und Rechnungsalgorithmen (Quaternionen, Ausdehnungslehre u. a.). Demgegenüber handelt der zweite Teil des dritten Bandes von den algebraischen Gebilden (Kurven, Flächen, Komplexen, Kongruenzen u. a.), während sich der dritte Teil mit der Differentialgeometrie beschäftigt.

Dazu traten im Laufe der Zeit einige von selbst notwendig gewordene Ergänzungen. Leider mußte mit Rücksicht auf die gegenwärtigen mißlichen Zeitverhältnisse auf eine Reihe weiter geplanter Artikel über einzelne, in den letzten Jahrzehnten neu entstandene Gebiete verzichtet werden, um den Abschluß des Ganzen nicht auf unbestimmte Zeit zu verschieben.

Zunächst lag die Redaktion des Geometriebandes allein in Händen von *W. Fr. Meyer*. Im Jahre 1915 wurde *H. Mohrmann* als zweiter Herausgeber gewonnen. Er übernahm einen wesentlichen Teil der Arbeit. Es würde hier zu weit führen, festzustellen, wie sich seit 1915 die Herausgabe der einzelnen Artikel unter uns beide verteilt hat.

Dagegen möchten wir hier gleich erwähnen, daß einige Herren, die nicht als Redakteure zeichnen, unsere Arbeit außerordentlich unterstützt haben und so einen ganz bedeutenden Anteil an der Fertigstellung des Bandes gehabt haben. In erster Linie gebührt unser Dank Herrn *F. Klein*. In zahlreichen Konferenzen hat er für viele Artikel genaue Einzeldispositionen entworfen und uns und die Be-

arbeiter mit seinem erfahrenen Rate unterstützt. Mit großer Tatkraft und unermüdlicher Energie hat er immer wieder in schwierigen Lagen belebend eingegriffen. — Wir gedenken ferner mit Dank der stets bereiten kritischen Mitarbeit von *H. Burkhardt* (†) und *M. Noether* (†).

Noch vor einem halben Jahrhundert, zur Zeit, als die Mathematischen Annalen durch *R. Clebsch* und *C. Neumann* begründet wurden, stand die Geometrie in Deutschland in besonderem Ansehen und das Interesse der meisten Mathematiker gehörte ihr. Durch Veröffentlichung bahnbrechender Arbeiten verschafften deutsche Gelehrte ihrem Vaterlande eine führende Stellung innerhalb dieser Disziplin. Zum Belege mögen Namen wie *Clebsch, Graßmann, Hesse, Möbius, Plücker, v. Staudt, Steiner* einerseits und *Brill, Klein, Lindemann, M. Noether, Schubert, Schwarz, Voss* andererseits genannt sein, denen *Lie* und *Zeuthen*, obgleich Ausländer, gerne zugerechnet werden können.

Um die Jahrhundertwende war die Sachlage ganz anders. Das Interesse für Geometrie und deren Einfluß war in Deutschland unleugbar erheblich gesunken und dies, obwohl Namen wie *Fiedler, Harnack, Hilbert, Minkowski, Pasch, Reye, Rohn, F. Schur, Stäckel, Staude, Study, R. Sturm* dafür zeugen, daß in Deutschland die ganze Zeit hindurch geometrisch gearbeitet wurde. Aber es waren immer nur einzelne; die Allgemeinheit nahm an ihren Ergebnissen immer weniger Anteil. In dem folgenden Jahrzehnt wurde das Verhältnis nicht besser.

Seit zehn Jahren etwa zeigt sich in Deutschland, wenn auch vorerst nur vereinzelt, frisches Leben; doch setzte diese neue Forschung an anderen Stellen ein als an denen, wo die alte Generation arbeitete. Die Topologie sah sich durch das Emporkommen der Mengenlehre vor neue Aufgaben gestellt. Die Relativitätstheorie wirkte kräftig fördernd auf die mehrdimensionale Differentialgeometrie ein. Damit verbunden war ein Ausbau des Vektor- und Tensorkalküls. Aus *Minkowski*s Untersuchungen über konvexe Kurven und Flächen erwuchs die affine Geometrie. So darf man hoffen, daß das Interesse an geometrischen Fragen wieder zunimmt.

Obwohl zwischen den Jahren 1865 — 1875 deutsche Gelehrte die schönsten Möglichkeiten zur Weiterentwicklung der Geometrie schufen, wurden diese nicht in Deutschland, sondern in Italien mit größtem Erfolg aufgenommen und weiter verfolgt. So gelangte Italien in wenigen Jahren zur führenden Stellung auf allen Gebieten der Geometrie und hat diese Führerrolle seitdem voll behauptet. Es wird großer Anstrengung und Mühe bedürfen, den Vorsprung, den Italien erlangt hat, auch nur teilweise einzuholen. Dieser überragenden Stellung

Italiens hat man in Deutschland dadurch Rechnung zu tragen versucht, daß man deutsche Übersetzungen von einer größeren Anzahl italienischer Lehrbücher herstellte. Aber noch mehr möchten wir hier mit Dank hervorheben, daß sich mehrere hervorragende italienische Gelehrte bereit gefunden haben, für die Encyklopädie gründliche Referate über die verschiedensten geometrischen Gegenstände zu bearbeiten. Nur so ist es möglich geworden, daß der Band III einen einigermaßen befriedigenden Überblick über das Gesamtgebiet der Geometrie liefert, wodurch die internationale Geltung der Encyklopädie aufrecht erhalten worden ist. Die Hauptbedeutung Italiens liegt einerseits in der Fortentwicklung der algebraischen Geometrie. Man hat das geringe Interesse für algebraisch-geometrische Fragen in Deutschland häufig damit entschuldigt, daß die Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Variabeler trotz *Picard*s Untersuchungen noch nicht soweit gefördert sei, daß sie sich ebenso wie die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabelen mit Erfolg auf geometrische Probleme anwenden lasse. Man hat dabei kaum beachtet, wie die Italiener die Ergebnisse *Picard*s angewandt und fortentwickelt haben. Ein Hauptverdienst Italiens ist es andererseits, daß es die mehrdimensionale Geometrie eigentlich erst geschaffen hat, und mit ihrer Hilfe zu einfachen Beweisen von Sätzen der Geometrie des dreidimensionalen Raumes gelangt ist. Endlich sei auf die zahlreichen differentialgeometrischen Arbeiten hingewiesen, die in Italien erschienen sind.

In Österreich ist im Gegensatze zu Deutschland alle die Zeit hindurch das geometrische Interesse ziemlich lebhaft gewesen. Auch in Holland und Skandinavien wurden die verschiedenen geometrischen Disziplinen gepflegt. Vor allen Dingen aber hat in neuerer Zeit in Nordamerika die geometrische Forschung auf den verschiedensten Gebieten schöne Erfolge aufzuweisen. In Frankreich dagegen hat man sich fast nur auf Differentialgeometrie beschränkt, und in England ist seit den Tagen *Cayley*s kaum ein größerer Fortschritt erreicht worden.

Welches sind nun die Gründe des in Deutschland so auffälligen Niederganges der Geometrie?

Da wirft man der Geometrie Mangel an Strenge vor. Angesehene Vertreter der Analysis behaupten, daß seit der durch *Descartes* inaugurierten neueren Entwicklung der Geometrie, insonderheit seit dem Überhandnehmen der algebraischen Untersuchungsrichtungen im vorigen Jahrhundert, die strenge Folgerichtigkeit des Denkens — im Gegensatze zu dem musterhaften Verfahren bei *Euklid* — wesentlich nachgelassen habe, daß die Formulierung und der Beweis der meisten geometrischen Sätze unvollständig sei, da sie die Gültigkeitsgrenzen

der jeweiligen Behauptung nicht erkennen lassen, daß sich endlich oft gar nicht übersehen lasse, welche von den Elementen eines vorliegenden zusammengesetzten Gebildes reell sein sollen, und welche komplex. Mit einem Worte, es sei die Unklarheit des Denkens, die die an Strenge gewöhnten Analytiker abstoße.

Es muß nun leider zugegeben werden, daß dies für viele geometrische Arbeiten zutrifft. Aber zahlreiche andere Arbeiten erfüllen alle Anforderungen an Strenge. Man darf dabei unter „Strenge" nur nicht das Festhalten an bestimmten Beweisformen, den Purismus der Methode verstehen; dann allerdings wird man wenig befriedigt werden. Denn gerade auf dem Wechsel der Methode, manchmal sogar innerhalb eines einzelnen Beweises, beruht die Möglichkeit, kurze und elegante Beweise zu führen.

Da sind z. B. die Vertreter der sogenannten reinen Geometrie der Lage, die den simultanen oder alternierenden Gebrauch analytischer und synthetischer Methoden als störend, sogar als unwissenschaftlich empfinden, und sich dafür der tadelnden Bezeichnung „méthode mixte" bedienen. Diesen ist die „reine" Lagengeometrie das Ideal einer „autochthonen" Wissenschaft, da sie in sich völlig konsequent sei und von anderen mathematischen Disziplinen nichts zu entlehnen brauche.

Diese übertriebene Wertschätzung ist aber kaum berechtigt. Die völlige Verzichtleistung auf die Methoden der analytischen Geometrie erweist sich im Gegenteil als unnatürlich. Man hat vielmehr die projektive Geometrie so aufzubauen, daß ohne metrische Hilfsmittel der Begriff des Wurfes und der projektiven Koordinaten entwickelt wird; von da ab ist der Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Richtung nur ein unwesentlicher. Und die analytische Behandlung empfiehlt sich bei vielen Aufgaben durch ihre Kürze ganz von selbst.

Wenn man *Euklid* wegen der Strenge und Reinheit seiner Methode rühmt, so vergißt man, daß für die Entwicklung der antiken Geometrie ein *Eudoxos* oder *Archimedes* viel wichtiger waren. Denn nicht auf das Sammeln und Systematisieren überkommener Sätze allein kommt es an, sondern auf die Entdeckung neuer Tatsachen, wenn auch die Methode der Darstellung vorerst noch nicht voll ausgereift und geglättet ist.

Wichtiger für den Rückgang der Geometrie scheinen uns folgende Tatsachen zu sein. Das Emporkommen der Mengenlehre in ihren Anwendungen auf die Punktmengen hat leider auf viele Mathematiker lähmend gewirkt. Man ist zu ängstlich geworden und traut den einfachsten Schlüssen nicht mehr. Besonders wird die Anschauung verpönt, und zwar nicht nur als Beweismittel, was verständlich wäre,

sondern sogar als heuristisches Prinzip. Aber auch die Übertreibung der axiomatischen Methode hat ihre Gefahren. Wenn gewisse Axiomatiker verlangen, daß man sich unter den Gegenständen, von denen die Geometrie handelt, nicht idealisierte Dinge vorstellen, sondern leere Begriffe, die nur irgendwie logisch verknüpft sind, denken soll, so wird dies unbedingt auf die schöpferische Freudigkeit hemmend wirken. Wir wollen mit diesen Ausführungen in keiner Weise die Bedeutung der Mengenlehre und Axiomatik herabsetzen, aber doch vor ihrer Überschätzung warnen; denn, wenn man die Phantasie tötet, wird die Haupttriebfeder des geometrischen Fortschrittes ausgeschaltet.

Für den modernen Geometer ist die Beherrschung großer Teile der Algebra und der Analysis unbedingt erforderlich, wenn er auf seinem Gebiete mit Erfolg arbeiten will. Allein dies genügt noch nicht; er muß außerdem über eine große Zahl spezifisch geometrischer Kenntnisse verfügen. Der Algebraiker und Analytiker dagegen kann sehr wohl ohne Geometrie auskommen. — Bei dem Umfang, den Algebra und Analysis heute besitzen, kostet es schon genügend Mühe, sich auf diesen Gebieten einigermaßen sicher zu bewegen und einen umfassenden Überblick zu gewinnen. Soll nun gar noch die Geometrie hinzukommen, so sind nur ganz wenige Geister fähig, sich auch die hierfür nötigen Kenntnisse noch anzueignen. Dies dürfte wohl der wichtigste Grund sein, warum die Analysis gegenwärtig so bevorzugt wird.

Hierzu kommt schon bei dem einfachsten geometrischen Stoff seine außerordentlich große Vielseitigkeit. Ein und dasselbe geometrische Gebilde kann auf die verschiedensten Arten erzeugt werden. Je nach der betrachteten Erzeugungsart werden gewisse seiner Eigenschaften besonders hervortreten, und man muß daher fortgesetzt den Standpunkt wechseln, wenn man sie alle voll erfassen will.

Zur Erläuterung diene als ein möglichst einfaches Beispiel der Begriff eines Kegelschnittes in einer festen Ebene.

Da bieten sich zunächst die antiken, elementaren, maßgeometrischen Erklärungen dar: ebener Schnitt eines geraden (bzw. schiefen) Kreiskegels, die Brennpunktsdefinition und die auf der Beziehung zwischen Brennpunkt und Direktrix beruhende, endlich in neuerer Zeit die Erzeugung mit Hilfe von Kreisen.

Weit mannigfaltiger sind jedoch die lagengeometrischen Erklärungen, wo von vornherein gemäß der Dualität zwischen Ordnungs- und Klassengebilde zu unterscheiden ist.

Für einen (nichtzerfallenden) Ordnungskegelschnitt hat man die Erzeugung durch projektive Strahlenbüschel (oder allgemeiner als Teil

einer Kurve höherer Ordnung durch gewisse höhere Korrespondenzen), die Bestimmung durch fünf Punkte auf Grund des *Pascal*schen Satzes, die *Mac-Laurin*sche Erzeugung durch ein bewegliches Dreieck (bzw. Polygon), als Ordnungskurve einer Korrelation, als Bild einer Geraden in einer quadratischen Transformation, und endlich, als die allgemeinste, durch eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten zwischen Punktkoordinaten. Und jede dieser Erzeugungen (mit Ausnahme der letzten) kann wiederum nach synthetischer oder analytischer Methode vor sich gehen. Daneben stellen sich die korrespondierenden Klassengebilde.

Eine systematische Theorie erfordert den Nachweis der Gleichwertigkeit aller dieser Erklärungen, d. h. den Nachweis, daß sie sich je ineinander überführen lassen. Hierbei ist noch dem nullteiligen Kegelschnitt (der nicht bei allen obigen Erzeugungen erscheint) besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Damit ist aber nur der erste und verhältnismäßig leichteste Schritt getan.

Denn nunmehr erwächst die weitere Aufgabe der Aufstellung und sachgemäßen Klassifikation aller Ausartungen, die sich am übersichtlichsten an die quadratische Gleichung zwischen Punkt- bzw. Linienkoordinaten anknüpfen. — Weiterhin ist dann bei jeder Eigenschaft eines „Kegelschnitts“ genau anzugeben, bis zu welchem Grade der „Ausartung“ dieselbe noch gültig bleibt. Dabei ist zu beachten, daß es der abzählenden Geometrie gelungen ist, die früher bekannten Ausartungen durch einige versteckter liegende zu vervollständigen.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß beim Fortschreiten zu höheren Gebilden, ebenen Kurven dritten und vierten Grades, Flächen zweiten und dritten Grades, kubischen und biquadratischen Raumkurven, linearen und quadratischen Komplexen usf., die Mannigfaltigkeit der Entstehungsweisen und Ausartungen entsprechend zunimmt.

Ein systematisch ausgebildetes Verfahren, um beim Beweise geometrischer Sätze sämtlichen in Betracht kommenden Ausartungen gerecht zu werden, besitzen wir nicht.

Bei einer Reihe einfacher grundlegender Sätze, so des *Desargues*schen Satzes über zwei perspektive Dreiecke der Ebene, des *Pascal*schen Satzes u. a., gelingt es, eine dem jeweiligen Satze übergeordnete Identität aufzustellen, aus der als spezielle Anwendung der fragliche Satz selbst zugleich mit seiner Umkehrung und seinen Gültigkeitsgrenzen unmittelbar herausspringt.

So erklärt es sich denn auch, warum die Anzahl der individuellen Eigenschaften eines einzelnen geometrischen Gebildes sehr viel schwerer übersehbar ist, als bei einem analytischen, und daß die

Geometrie zu einem guten Teile den Charakter einer Kunst annimmt, daß sie oft fast die Natur einer organisch in sich verbundenen Wissenschaft abzustreifen droht.

Indessen wird dieser Gefahr durch das *Klein*sche gruppentheoretische Programm von 1872 der Boden entzogen. Alle die scheinbar so durch- und nebeneinander laufenden Erklärungen und Eigenschaften werden durch den Begriff der Gruppe und ihrer charakteristischen Invarianten zusammengehalten; demgegenüber erscheinen die getrennten sonstigen Betrachtungsweisen nur als äußerlich verschiedene Einkleidungen. So wird, um ein typisches Beispiel anzuführen, die Elementargeometrie als Invariantentheorie der „Hauptgruppe" genau umgrenzt.

Die hiermit geschilderte Vielseitigkeit der Geometrie bildet für viele ein beinahe unübersteigbares Hindernis. Aber für den wirklichen Geometer liegt in ihr gerade der Reiz seiner Wissenschaft.

Der vorliegende Encyklopädieband bezweckt, möglichst über alle Zweige der geometrischen Forschung Auskunft zu geben. Wenn auch einige Referate über kleinere Gebiete fortfallen mußten, so hoffen wir doch immerhin durch ihn einen vollbefriedigenden Überblick über die gesamte Geometrie ermöglicht zu haben. Möge er vor allen Dingen auch von dem Reichtum und der Schönheit der Geometrie sowie ihrer befruchtenden Einwirkung auf die Analysis Zeugnis ablegen und so der Geometrie neue Freunde und Verehrer erwerben.

Königsberg i. Pr. und Basel, Ostern 1923.

W. Fr. Meyer.
H. Mohrmann.

[illegible]

Königsberg i. Pr. und Basel, Ostern [illegible]

[illegible]

Inhaltsverzeichnis zu Band III, 1. Teil, 1. Hälfte.

A. Rein geometrische Theorien.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

1. Prinzipien der Geometrie. Von F. ENRIQUES in Bologna (jetzt in Rom).

IV. Projektive Metrik.

V. Prinzipien der allgemeinen Metrik.

A. Bogenelement (nebst endlicher Entfernung).

B. Bewegungsgruppe.

VI. Zusammenhangsverhältnisse des unbegrenzten Raumes.

VII. Nicht-Archimedische Geometrie.

(Abgeschlossen im März 1907.)

2. Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“. Von H. v. Mangoldt in Danzig.

(Abgeschlossen im September 1906.)

3. Analysis situs. Von M. Dehn in Münster i. W. (jetzt in Frankfurt a. M.) und P. Heegaard in Kopenhagen (jetzt in Christiania).

(Abgeschlossen im Januar 1907.)

4a. Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert.

Von G. Fano in Turin.

I. Allgemeine Bemerkungen. Fixierung des Themas: Die Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert, von Monge beginnend.

II. Einsetzen der synthetischen Geometrie durch Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles.

III. Entsprechende Entwicklung der analytischen Geometrie.

IV. von Staudt. Insbesondere Gebilde 2. Grades und Imaginärtheorie mit Erweiterungen.

V. Allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde von zwei und drei Dimensionen.

VI. Mehrdimensionale Algebraische Geometrie.

The following table of contents refers material bound in III, Pt II, 1. Table of contents for last of this vol. page 272 to end, is bound in III Pt II, 1.

6 a. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. Von G. Castelnuovo in Rom und F. Enriques in Bologna (jetzt in Rom).

Seite

(Abgeschlossen im Jahre 1908.)

6 b. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus. Von G. Castelnuovo in Rom und F. Enriques in Bologna (jetzt in Rom).

I. Birationale Transformationen und lineare Kurvensysteme auf einer Fläche.

II. Die Theorie der Invarianten.

III. Über die Ausdehnung des Theorems von Riemann-Roch und über die nicht-linearen kontinuierlichen Systeme von Kurven, welche einer Fläche angehören.

IV. Die Theorie der Flächen in Beziehung auf die Integrale, welche mit den Flächen verknüpft sind.

V. Über gewisse Familien bemerkenswerter Flächen und über die Klassifikation der algebraischen Flächen.

VI. Einige Bemerkungen über die algebraischen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen.

(Abgeschlossen im Dezember 1914.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande III, 2. Teil, 1. Hälfte zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

C. Algebraische Geometrie.

Heft	Inhalt
Heft 1. 10. III. 1903.	1. Dingeldey: Kegelschnitt und Kegelschnittsysteme.
Heft 2. 1. VI. 1904.	2. Staude: Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven.
Heft 3. 16. VIII. 1906	3. Zeuthen: Abzählende Methoden. 4. Berzolari: Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven.
Heft 4. 23. IV. 1909.	5. Kohn u. Loria: Spezielle ebene algebraische Kurven: a. Kohn: Ebene Kurven 3. und 4. Ordnung.
Heft 5. 22. IV. 1915.	b. Loria: Spezielle ebene algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung.
Heft 6. 21. IX. 1915.	6a. Castelnuovo u. Enriques: Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. 6b. Castelnuovo u. Enriques: Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.

Übersicht über die im vorliegenden Bande III, 2. Teil, 1. Hälfte zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

C. Algebraische Geometrie.

Heft	Inhalt
Heft 1. 10. III. 1906.	1. Dingeldey: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
Heft 2. 1. VI. 1906.	2. Staude: Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven.
Heft 3. [illegible]. VIII. 1906.	3. Zeuthen: Abzählende Methoden. 4. Berzolari: Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven.
Heft 4. [illegible]. IV. [illegible].	5. Kohn u. Loria: Spezielle ebene algebraische Kurven. a. Kohn: Ebene Kurven 3. und 4. Ordnung.
Heft 5. 22. IV. [illegible].	b. Loria: Spezielle ebene algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung.
Heft 6. [illegible]. IX. 1915.	6a. Castelnuovo u. Enriques: Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. 6b. Castelnuovo u. Enriques: Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.

III A, B 1. PRINZIPIEN DER GEOMETRIE.*)

Von

F. ENRIQUES

IN BOLOGNA.

Inhaltsübersicht.

---

*) Da ich durch anderweitige Arbeit für die Encyklopädie stark in Anspruch genommen war, ist die redaktionelle Bearbeitung des vorliegenden Artikels in der Hauptsache von Herrn *H. Fleischer* (anfangs in Göttingen, später in Königsberg) besorgt worden. W. Fr. Meyer.

Literatur*).

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit *J. L. Heiberg*. 3 Bde. Leipzig 1880/81.

*) In diesem Verzeichnis sind nur solche Werke und Abhandlungen aufgenommen, auf die in dem Artikel öfter hingewiesen wird. Wegen der Literatur über die Hilfsdisziplinen, z. B. Mengenlehre, Analysis situs, Differentialgeometrie, projektive, darstellende Geometrie u. a. siehe die in den betreffenden Artikeln

E. Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, Giorn. di mat. 6 (1868), p. 285.
— Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante, Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 232.
— Sulla teoria analitica della distanza, Ist. Lomb. Rend. (2) 5 (1872).
— Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky, Rom Linc. Rend. (4) 5^1 (1889), p. 441.
Joh. Bolyai, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc. in W. Bolyais Tentamen Bd. 1, für sich neu herausgegeben Leipzig 1903.
Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitivo evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. 2 Bde. Maros Vásárhely 1832 und 1833; editio secunda, 2 Bde, Budapest 1897 und 1904 („Tentamen"). Einen Auszug aus diesem Werke bildet die Schrift: Kurzer Grundriß eines Versuches . . ., Maros Vásárhely 1851.
A. Cayley, A Sixth Memoir on Quantics, Lond. Trans. 149 (1859), p. 61; wieder abgedruckt: Coll. math. pap. 2, Cambridge 1889, p. 561.
A. Clebsch und *F. Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie 2^1, Leipzig 1891.
W. K. Clifford, Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 381; 7 (1876), p. 67; wieder abgedruckt: Math. pap., London 1882, Nr. 20 und 26; ferner Math. pap. Nr. 41, 42, 44.
M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math. Ann. 53 (1900), p. 404.
— Über den Rauminhalt, Math. Ann. 55 (1902), p. 465.
Edw. F. Dixon, The foundations of geometry, Cambridge 1891.
F. Enriques, Conferenze di geometria, autogr. Vorlesungen, Bologna 1894/95.
— Lezioni di geometria proiettiva, Bologna 1898; deutsche Ausgabe von *H. Fleischer:* Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1903.
— Questioni riguardanti la geometria elementare, eine Sammlung von Aufsätzen verschiedener Autoren, Bologna 1900 („Questioni").
F. Enriques e *U. Amaldi,* Elementi di geometria, Bologna 1903; zweite Auflage 1905.
Euclidis elementa. Edidit *J. L. Heiberg.* 5 Bde. Leipzig 1883—88 („Elemente").
C. F. Gauß, Werke Bd. 8, Leipzig 1900; vgl. außerdem: Briefwechsel zwischen *Gauß* und *Fr. W. Bessel,* Leipzig 1880; Briefwechsel zwischen *Gauß* und *W. Bolyai,* hrsgeg. von *F. Schmidt* und *P. Stäckel,* Leipzig 1899; Briefwechsel zwischen *Gauß* und *H. C. Schuhmacher,* hrsgeg. von *C. A. F. Peters,* Altona 1860—65.
H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, zweite Auflage 1878; wieder abgedruckt: Ges. math. und phys. Werke I 1, Leipzig 1894.
H. Graßmann, Geometrische Analyse, Leipzig 1847; wieder abgedruckt: Ges. math. und phys. Werke I 1, Leipzig 1894.

---

angeführte Literatur. Da dieser Artikel seinem Inhalte nach im Herbst 1904 abgeschlossen wurde, so konnte später erschienene Literatur nicht mehr berücksichtigt werden (so u. a. der 1906 erschienene Bericht von *M. Simon* über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert). Eine Ausnahme bilden nur besondere Beiträge, die Herr *Schoenflies* der Redaktion zu Nr. 7 und Abschnitt VII (Stetigkeit, Nicht-Archimedische Geometrie) zur Verfügung gestellt hat.

H. v. Helmholtz, Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie, Heidelberg Naturhist.-med. Verein Verhandl. 4 (1866), p. 197, abgedruckt: Wissensch. Abhandl. 2, p. 610.

— Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gött. Nachr. 1868, p. 193, abgedruckt: Wissensch. Abhandl. 2, p. 618.

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber Denkmals in Göttingen, 1. Teil), Leipzig 1899; zweite Auflage 1903 („Grundlagen"; zitiert wird die zweite Auflage).

— Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, Math. Ann. 46 (1895), p. 91; wieder abgedruckt: Grundlagen, zweite Auflage, p. 83.

— Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, Lond. Math. Soc. Proc. 35 (1903), p. 50; wieder abgedruckt: Grundlagen, zweite Auflage, p. 88.

— Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung, Amer. Math. Soc. Trans. 2 (1901), p. 87; wieder abgedruckt: Grundlagen, zweite Auflage, p. 162.

— Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. 56 (1902), p. 381; wieder abgedruckt: Grundlagen, zweite Auflage, p. 121.

O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, Leipzig Ber. 53 (1901), p. 1.

G. Ingrami, Elementi di geometria, Bologna 1899.

W. Killing, Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885 („Raumformen").

— Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 2 Bde, Paderborn 1893 und 1898 („Grundlagen").

F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Gött. Nachr. 1871; ausgeführt in Math. Ann. 4 (1871), p. 573; zweite Abhandlung Math. Ann. 6 (1873), p. 112; ferner 7 (1874), p. 531; dritte Abhandlung 37 (1890), p. 544.

— Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät usw., Erlangen 1872; wieder abgedruckt: Math. Ann. 43 (1893) („Erlanger Programm").

— Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve. Erlangen Berichte 1873, wieder abgedruckt: Math. Ann. 22 (1883), p. 249.

— Nicht-Euklidische Geometrie I, II, autographierte Vorlesungen, Göttingen (Leipzig) 1893.

— Zur ersten Verteilung des Lobatschefskij-Preises. Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von *S. Lie,* Kasan Phys. math. Ges. 1897; wieder abgedruckt: Math. Ann. 50 (1898), p. 583 („Gutachten").

— Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, autogr. Vorlesung, Göttingen 1901 (Leipzig 1902).

Edm. Laguerre, Sur la théorie des foyers, Nouv. Ann. 12 (1853), p. 57; wieder abgedruckt: Oeuvres 2, p. 6.

J. H. Lambert, Theorie der Parallellinien, aufgesetzt 1766, veröffentlicht 1786 im Leipziger Magazin für die reine und angewandte Mathematik.

A. M. Legendre, Éléments de géométrie, 1., 3., 9., 12. Auflage; alle diese Untersuchungen über die Parallelentheorie sind zusammengefaßt in: Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Paris Mém. 12 (1833), p. 365.

„*Leibnizens* Mathematische Schriften", herausgegeben von *C. J. Gerhardt,* I. Abteilung, Briefwechsel, 4 Bde, Berlin 1849/50 und Halle 1855/59, II. Abteilung, Abhandlungen, 3 Bde, Halle 1858—1863.

S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, 3. Abschnitt, Leipzig 1893 („Transformationsgruppen").

Nik. Iwan. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen (im Original erschienen 1829 und 1835), aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers von *Fr. Engel.* Zwei Teile, Leipzig 1898 und 1899. In dem zweiten Teile befindet sich ein chronologisches Verzeichnis sämtlicher Schriften Lobatschefskijs.

R. de Paolis, Elementi di geometria, Torino 1884.

Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a F. Commandino in latinum conversae et commentariis illustratae. Bononiae 1660.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882 („Neuere Geometrie").

G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Graßmann, Torino 1888.

— I principii di geometria logicamente esposti, Torino 1889 („Principii").

— Sui fondamenti della geometria, Riv. di mat. 4 (1894), p. 51 („Fondamenti").

M. Pieri, I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo, Tor. Mem. (2) 48 (1898), p. 1.

— Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo, Tor. Mem. (2) 49 (1899), p. 173.

H. Poincaré, Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, Paris Soc. M. Fr. Bull. 15 (1887), p. 203.

— La science et l'hypothèse, Paris ohne Jahr; deutsche Ausgabe von *F.* und *L. Lindemann*: Wissenschaft und Hypothese, Leipzig 1904.

Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ex recognitione *G. Friedlein.* Leipzig 1872 („Commentarii").

M. Réthy, Endlich gleiche Flächen, Math. Ann. 38 (1891), p. 405, und 42 (1893), p. 297.

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsvortrag von 1854, Gött. Abhdl. XIII (1868), p. 1; wieder abgedruckt: Ges. Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, p. 272 („Habilitationsvortrag").

H. Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Mediolani 1733.

A. Schoenflies, Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht-Archimedischer) Maßbestimmung. Deutsche M.-V. Jahresb. 15 (1906), p. 26.

F. Schur, Über die Deformation der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes, Math. Ann. 27 (1886), p. 163.

— Über den Zusammenhang der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes mit den projektiven Räumen, Math. Ann. 27 (1886), p. 537.

— Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, Math. Ann. 51 (1899), p. 401.

— Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. 55 (1902), p. 265.

M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901 („Euklid").

P. Stäckel und *Fr. Engel,* Die Theorie der Parallellinien von *Euklid* bis auf *Gauß,* Leipzig 1895.

Ch. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847; Beiträge zur Geometrie der Lage, 3 Hefte, Nürnberg 1856—1860.

O. Stolz, Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des *Archimedes.* Innsbr. Ber. 12 (1882), p. 74; wieder abgedruckt: Math. Ann. 22 (1883), p. 504.

F. Ad. Taurinus, Theorie der Parallellinien, Köln 1825; Geometriae prima elementa, Coloniae Agrippinae 1826.

Verhandlungen des dritten internationalen *Mathematiker-Kongresses* in Heidelberg 1904, Leipzig 1905 („Heidelberger Kongreß").

G. Veronese, Fondamenti di geometria, Padova 1891; deutsch von *A. Schepp*: Grundzüge der Geometrie, Leipzig 1894 („Grundzüge").

G. Veronese, Elementi di geometria (tratt. con la collaborazione di *P. Gazzaniga*), Verona-Padova 1897, neue Ausgabe 1900; Appendice agli elementi di geometria, Verona-Padova 1898.

J. Wallis, De postulato quinto et definitione quinta lib. 6. Euclidis disceptatio geometrica. Operum mathematicorum volumen alterum, Oxford 1693, p. 665.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, im XVI. und XVII. Jahrhundert, Leipzig 1903.

A. De Zolt, Principii della eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni) preceduto da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica, Milano 1881; Principii della eguaglianza di poligoni sferici, Milano 1883.

Bibliographische Werke.

R. Bonola, Bibliografia sui fondamenti della geometria non-euclidea, im Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, seit 1899.

— Index operum ad geometriam absolutam spectantium in: Ioannis Bolyai in memoriam, Libellus post saec. quam Io. Bolyai de Bolya anno 1802 a. D. Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem ... editus, Claudiopoli 1902 (Leipzig 1903); ein ziemlich vollständiges Verzeichnis der Schriften über nicht-Euklidische Geometrie.

G. B. Halsted, Bibliography of hyperspace and non-euclidian geometry. Am. J. 1 (1878), p. 261, 384, 385; 2 (1879), p. 65.

H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. 2 Bde. Leipzig 1890 und 1893.

E. Wölffing, Mathematischer Bücherschatz, 1. Teil, Leipzig 1903; besonders Abt. 2: Philosophie der Mathematik, Abt. 139: Prinzipien der Geometrie, Abt. 140: Parallelentheorie, Abt. 141: Nicht-Euklidische Geometrie, Abt. 142: n-dimensionale Geometrie.

---

1. Einleitung. Allgemeines, betreffend die mathematischen Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie. Die kritischen Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie sind mit deren systematischer Gestaltung als deduktive Wissenschaft verknüpft.

Als Grundlage des hierbei von *Euklid* eingeschlagenen Verfahrens läßt sich folgendes erkennen[1]):

---

1) Vgl. die kritische Ausgabe der Elemente Euklids von *J. L. Heiberg,* 1, Leipzig 1883, und u. a. *M. Simon,* Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901.

1) Die *Definitionen* (ὅροι), die jedoch im allgemeinen bloße Beschreibungen sind und manchmal direkt fundamentale Sätze enthalten, wie z. B. die vierte Definition des fünften Buches, in der sich das sogenannte *Archimedische* Postulat verbirgt.

2) Die *Axiome* (κοιναὶ ἔννοιαι) und die *Postulate* (αἰτήματα). Über den Unterschied zwischen diesen grundlegenden Sätzen verbreitet sich *Proclus* [2]), indem er die folgenden drei verschiedenen Auffassungen dieses Unterschieds anführt: a) Die Postulate verhalten sich zu den Axiomen wie die Aufgaben zu den Sätzen. Die Postulate behaupten die Möglichkeit einer Konstruktion, die auf andere als ausführbar angenommene Konstruktionen nicht zurückgeführt werden kann; die Axiome sprechen eine Eigenschaft aus, die ohne Beweis einer Figur beigelegt wird, deren Konstruierbarkeit bereits postuliert oder bewiesen ist. b) Die Axiome sprechen Eigenschaften aus, die jeder mathematischen Größe zukommen, und gelten daher auch außerhalb des Bereiches der Geometrie; in den Postulaten werden Eigenschaften betrachtet, die nur von rein geometrischen Dingen ausgesagt werden können. c) Die Axiome gelten durch sich selbst (καθ' ἑαυτά), d. h. auf Grund der Bedeutung der in ihnen vorkommenden Ausdrücke; die Postulate ergeben sich nicht mit Notwendigkeit aus der Definition der in ihnen enthaltenen Ausdrücke. Dem dritten Standpunkte gegenüber hat die moderne Kritik gezeigt, daß diejenigen Sätze, die man als Axiome betrachtete, Forderungen in sich enthalten, die erfüllt sein müssen, und daher in gewissem Sinne auch als Postulate angesehen werden können [3]).

3) *Unausgesprochene Sätze*, die durch direkte Bezugnahme auf die Anschauung ersetzt werden, z. B. über den Begriff „zwischen“, über „die Unendlichkeit der Geraden“ usw.

Für eine richtige Wertschätzung dieser Grundlagen des Euklidischen Werkes ist aber im Auge zu behalten, daß der Text unsicher ist und wohl manche der grundlegenden Sätze spätere Zutaten sind.

An diese Fassung der Prinzipien der Geometrie knüpft nun eine lange kritische Arbeit an, die aus dem Altertum bis in unsere Tage hinein reicht und sich im besonderen mit dem Beweise des fünften (Parallelen-)Postulats beschäftigt (vgl. Abschn. I dieses Referats, insbesondere Nr. 8).

---

2) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ex rec. *G. Friedlein,* Leipzig 1873, p. 178.

3) Vgl. *G. Vailati,* Heidelberger Kongreß, p. 575, und *H. G. Zeuthen,* ebenda, p. 340. Wir werden in diesem Artikel die eigentlichen grundlegenden Sätze der Geometrie, d. h. die Sätze, welche die zwischen den Grundbegriffen der Geometrie angenommenen Beziehungen ausdrücken, als *Postulate* bezeichnen.

Aber vor dem Beginn des verflossenen Jahrhunderts kam man über den *dogmatischen* Gesichtspunkt der Euklidischen Geometrie nicht hinaus, der übrigens auch von neueren Mathematikern, z. B. von *Cayley*, gebilligt worden ist.

Die Fortschritte in der Kritik des verflossenen Jahrhunderts gehen von zwei allgemeinen Ideen aus:

I. Hinsichtlich des *Objekts* der Geometrie kam man zu einer Unterscheidung zwischen

1) dem *gewöhnlichen intuitiven Raume*, dessen Grundeigenschaften gemäß der üblichen Auffassung die *Anschauung* ergibt;

2) dem *physischen Raume*, dessen Grundeigenschaften die *Erfahrung* darbietet, und

3) den *abstrakten Räumen*, d. h. allgemeinen Begriffen, die aus dem gewöhnlichen Begriffe des (intuitiven) Raumes durch *Abstraktion* oder *Verallgemeinerung* seiner Eigenschaften hervorgehen.

Vor allem führte die nicht-Euklidische Geometrie, die zwischen 1815 und 1830 entstand (*Gauß, J. Bolyai, Lobatschefskij*, vgl. Nr. 8) zu der Anerkennung der physischen Möglichkeit eines Raumes, der von dem gewöhnlichen intuitiven Raume verschieden ist. Jedoch erschien diese Möglichkeit, da ihr nur der Zweifel an der Gültigkeit des fünften Euklidischen Postulats zugrunde lag, zunächst begrenzt, und die von diesem Postulate unabhängige Geometrie wurde daher als die einzig existierende („absolute") betrachtet. Diese Beschränkung in der Raumvorstellung wurde von *B. Riemann* aufgehoben, der in seinem 1854 gehaltenen und 1867 veröffentlichten Habilitationsvortrag in allgemeiner Weise von *Hypothesen* spricht, welche der Geometrie zugrunde liegen, die *Unendlichkeit* der Geraden fallen läßt und überdies (wie *Graßmann* es schon vorher getan hatte) *mehrere Dimensionen* betrachtet (vgl. Nr. 8, **15**, **27**). In demselben Sinne hat dann wohl *F. Klein* sehr anregend gewirkt[4]).

---

4) Vgl. den folgenden Satz aus seinem Artikel: Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie, zweiter Aufsatz, 1872, Math. Ann. 6 (1873), p. 113: „Ähnliche Untersuchungen (wie über das Parallelenaxiom) könnte und sollte man mit bezug auf alle anderen Voraussetzungen, die unseren geometrischen Vorstellungen zugrunde liegen, anstellen. Es ist die nicht-Euklidische Geometrie ein erster Schritt in einer Richtung, deren allgemeine Möglichkeit durch *Riemanns* Arbeit „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" vorgezeichnet ist. Ein ähnlicher Schritt ist es, wenn man das Axiom von der unendlichen Länge der Geraden fallen läßt, wie ich dies in meinem vorigen Aufsatze im Anschlusse an die Arbeiten von *Riemann* und *Helmholtz* getan habe. Dann ist außer der nicht-Euklidischen Geometrie im Sinne von *Lobatschefskij*, *Bolyai* oder, wie ich sie nenne, der hyperbolischen Geometrie, noch eine zweite Geometrie, die elliptische,

Wenig später als *Riemann* (1868) sprach *H. Helmholtz* (jedenfalls mit unter dem Einflusse der englischen empiristischen Philosophie) die Meinung aus, daß der Wert der grundlegenden Sätze der Geometrie in ihrer Eigenschaft, physische Tatsachen zu enthalten, bestehe, und dies führte ihn zu neuen mathematischen Fragestellungen, die später vollständig beantwortet worden sind (vgl. Abschn. V B dieses Referats).

Die außerordentliche Verbreitung und die Entwicklung der nicht-Euklidischen Theorien, die von verschiedenen Standpunkten aus von *Battaglini, Hoüel, Flye Ste. Marie, Mansion, De Tilly* und in anderer Weise von *Beltrami, Clifford, Klein, Lie, Poincaré* u. A. gefördert wurden, machten den Begriff der verschiedenen möglichen Geometrien populär und brachten die erwähnte Einschätzung der Postulate im Verhältnis zum physischen Raum in weiteren Kreisen zur Annahme.

Aber man könnte die neue Entwicklung nicht verstehen, wenn man nicht neben einer Geometrie, deren Objekt der Physik angehört, auch eine Geometrie betrachtete, die auf dem Wege der Abstraktion aus der intuitiven Vorstellung des gewöhnlichen Raumes höhere Räume hervorgehen zu lassen bestrebt ist; von dieser Art ist z. B. der Raum der projektiven Geometrie, in der man von rein deskriptiven Begriffen[5]) ausgeht und metrische Begriffe ausschließt, wie dies *F. Klein* im Anschluß an das *von Staudt*sche System gelehrt hat, und auch die nicht-Archimedischen Räume *Verones*es und *Hilbert*s sind von dieser Art (vgl. Abschn. VII dieses Referats).

Nun sind aus derartigen Konstruktionen verschiedene Rangordnungen der geometrischen Begriffe hervorgegangen, die deren psychologischen Inhalt beleuchten (Nr. 12) und über ihre Erwerbung Licht verbreiten[6]). Und endlich entstand so auch (im Zusammenhange mit der formalen Entwicklung, die wir weiter unten berühren werden) eine freiere Betrachtung der verschiedenen Geometrien, indem man, abgesehen von dem physikalischen oder psychologischen Objekt, ein System von Hypothesen betrachtete, dessen Konsequenzen man aus irgend einem mathematischen Interesse verfolgte (wie z. B. in den

---

möglich; zwischen beiden bildet die gewöhnliche, parabolische, Geometrie den Übergangsfall."

5) D. h. Begriffen, die sich nur auf die Lage beziehen und daher projektiven Charakter haben. Dieses Wort ist in dem vorliegenden Artikel in Anlehnung an *Poncelet* gewählt worden, um für lagengeometrische Beziehungen ein bequemes Adjektiv zu haben; *Poncelet* hat für diese Beziehungen neben descriptive (Traité des propriétés projectives des figures, introduction) auch graphique (Traité, chap. I, Nr. 6); wir haben dem ersten Ausdruck den Vorzug gegeben.

6) Vgl. *F. Enriques,* Riv. filos. di Pavia 1901.

letzten Entwicklungen der *Hilbert*schen Schule; vgl. Abschn. VII dieses Referats).

Was die physikalische Bedeutung der Postulate betrifft, so haben diese Konstruktionen, in Übereinstimmung mit dem weniger schematischen Begriff der „Tatsache", der von der modernen wissenschaftlichen Philosophie vertreten wird, zu einer Änderung des Urteils über ihren empirischen Wert geführt.

F. Klein (Funktionsbegriff 1873; Math. Ann. 37; Gutachten) und *H. Poincaré* (Soc. M. Fr. Bull. 15; Wissenschaft und Hypothese) sind bei verschiedenen philosophischen Richtungen dazu gekommen, die geometrischen Postulate als Sätze anzusehen, die man mehr oder weniger willkürlich in die ungenauen Daten der Erfahrung hineinlegt, um eine zuverlässige Grundlage für die weitergehende exakte Überlegung zu haben.

II. Hinsichtlich der *logischen Form* der geometrischen Entwicklung kam die moderne Kritik zu einem neuen Begriff der *mathematischen Strenge,* der mit der kritischen Richtung, die vorher in der Analysis sich geltend gemacht hatte (*Weierstraß, Dedekind, G. Cantor, P. Du Bois-Reymond, Méray, Dini* u. A.), zusammenhängt.

Vor allem entdeckte man unausgesprochene Postulate, die bei dem Beweise von Sätzen auf Grund der Anschauung unwillkürlich benutzt wurden, z. B. das Postulat der Stetigkeit (*Cantor-Dedekind*), das sogenannte Archimedische Postulat (auf das *Stolz* wieder die Aufmerksamkeit gelenkt hat), die Postulate der Anordnung (*Pasch*), usw.

Dann bemerkte man, daß eine Definition, ebenso wie ein Beweis, etwas durchaus Relatives ist, und daher zeigte sich die Notwendigkeit, die *primitiven Begriffe,* d. h. diejenigen, die man in einem vorliegenden System nicht definieren will, die aber in den Definitionen logisch miteinander verknüpft sind, ausdrücklich als solche hinzustellen. Und da schließlich die Postulate als Relationen zwischen diesen Begriffen erschienen, so wollte man den Postulaten eine solche Form geben, daß sie erkennbar bleiben, auch wenn man von der (bei der logischen Entwicklung nicht benutzten) Bedeutung, die man auf Grund der Anschauung oder der Erfahrung den Begriffen selbst beilegen kann, *abstrahiert.*

In diesem Sinne ist der Begriff der Strenge in den Vorlesungen über neuere Geometrie von *M. Pasch* (1881) durch die folgenden beiden Forderungen festgelegt worden:

1) Es sind die *primitiven Begriffe,* durch welche alle übrigen logisch definiert werden, ausdrücklich als solche hinzustellen.

2) Es sind die fundamentalen Sätze (*Postulate*), mit deren Hilfe die anderen (die „*Sätze*") logisch bewiesen werden, ausdrücklich als

logische Beziehungen zwischen den primitiven Begriffen unabhängig von deren Bedeutung auszusprechen.

Und diese Forderungen werden bei *Pasch* erfüllt; die Grundlage für die logische Behandlung der Geometrie liegt bei ihm durchaus in den Postulaten (wenn diese auch als das Produkt eines an die Anschauung anknüpfenden psychologischen Prozesses eingeführt werden).

Diese Auffassung der Strenge ist seither immer mehr zum Gemeingut der geometrischen Forschungen dieser Art geworden (vgl. z. B. *Peano,* Principii, 1889; *Veronese,* Fondamenti, 1891; *Hilbert,* Grundlagen, 1898 usw.) [7]).

Ihr gemäß erscheinen vom *abstrakten logischen Standpunkte* aus die Postulate als willkürliche Verabredungen, und die Gesamtheit der logischen Beziehungen, welche sie aussprechen, bildet eine Art impliciter *Definition* der primitiven Begriffe [8]).

Wie man von dieser Willkür Gebrauch machen soll, das hängt von *Werturteilen* ab und läßt sich nicht wie eine wissenschaftliche Frage entscheiden, bei der es sich um ein Urteil darüber handelt, ob etwas wahr oder falsch ist. In der Tat haben die *Peano*sche und (besonders in ihren letzten Entwicklungen) die *Hilbert*sche Schule, indem sie immer mehr die abstrakte Seite der Darstellung ins Auge faßten, die Willkür in der Wahl der Postulate im weitesten Sinne verstanden und sich damit immer mehr von der Anschauung entfernt: die

---

7) Übrigens wurde sie in Italien, wo Euklids Elemente durch *Sannia* und *d'Ovidio*, *Faifofer, De Paolis* und andere schon vorher eine kritische Umarbeitung erfahren hatten, auch in den Schulbetrieb hineingetragen. Die neueren italienischen Lehrbücher, die bei verschiedenen pädagogischen Standpunkten die oben auseinandergesetzten Bedingungen der formalen Strenge sich zu eigen machen, rühren von *Veronese* (Elementi di geometria [tratt. con la collaborazione di *P. Gazzaniga*], Verona-Padova 1897, neue Ausgabe 1900; Appendice agli elementi di geometria, Verona-Padova 1898), *Ingrami* (Elementi di geometria, Bologna 1899), *Enriques* e *Amaldi* (Elementi di geometria, Bologna 1903, zweite Auflage 1905) her. Vgl. auch das Sammelwerk „Questioni" von *Enriques* (1900).

8) Dieser weitere Begriff der Definition findet sich, wie *G. Vacca* (Riv. di mat. 1899, p. 185) bemerkt hat, schon bei *J. D. Gergonne* (Gerg. Ann. 9 (1818—19), p. 1). Es seien aus dem *Gergonne*schen Aufsatze zwei charakteristische Sätze angeführt: „Wenn ein Satz ein Wort enthält, dessen Bedeutung uns unbekannt ist, so kann durch die Aussage dieses Satzes die Bedeutung jenes Wortes uns offenbar werden" (p. 22). „Sätze, die auf diese Weise den Sinn eines Wortes auf Grund der bekannten Bedeutung der in ihnen enthaltenen anderen Worte ergeben, könnten *implicite Definitionen* genannt werden, im Gegensatze zu den gewöhnlichen Definitionen, die man *explicite* Definitionen nennen könnte . . .; so können auch oft *zwei* Sätze, die *zwei* neue Worte mit bekannten Worten verknüpfen, deren Sinn bestimmen . . ." (p. 23).

zuerst genannte, indem sie hauptsächlich den Zweck verfolgte, das Urteil über einige logisch-formale Fragen zu vertiefen, die andere, um Gegenstände von mathematischem Interesse, die mit Fragen der Analysis oder der Zahlentheorie usw. verknüpft sind, weiter zu verfolgen. Demgegenüber strebt *Veronese* (Fondamenti) danach, das, was der Anschauung und der Erfahrung gegenüber in mehr eigentlichem Sinne als geometrisch zu betrachten ist, abzugrenzen, und *Enriques* (Questioni, Art. 1) sucht einige Vorschriften aufzustellen, denen die Postulate hinsichtlich der primitiven Begriffe genügen müssen, um für die Anschauung als evident zu erscheinen.

Es ist zu erwähnen, daß die oben angeführten Forderungen der formalen Strenge in dem Zeichensystem der mathematischen Logik (*Leibniz, Peacock, De Morgan, Boole, H. Graßmann, W. R. Hamilton, Ch. Peirce, Schröder, Peano, Frege*) einen symbolischen Ausdruck gefunden haben. Dieser Symbolismus, der von *Peano* (1889) zu einem System der mathematischen Darstellung erhoben worden ist, hat die Notwendigkeit, primitive Begriffe anzunehmen, materiell fühlbar gemacht, da jeder von diesen Begriffen durch ein *neues Zeichen,* das ihn repräsentiert, eingeführt wird; darüber hinaus hat er auch zu einer schärferen Kritik hinsichtlich der *Einfachheit* und *Unabhängigkeit* der Postulate und primitiven Begriffe und der *Verträglichkeit* der Postulate miteinander Veranlassung gegeben.

Der Begriff der *Unabhängigkeit der Postulate,* der zunächst aus den Entwicklungen hervorging, welche die Versuche, das fünfte Euklidische Postulat zu beweisen, im negativen Sinne zum Abschluß brachten, besteht in folgendem: es handelt sich um die Entscheidung der Frage, „ob ein gegebener Satz von anderen, die als Voraussetzungen angenommen werden, logisch *abhängt* oder nicht“.

Dabei ist folgendes zu beachten:

1) Es gibt eine *geordnete Unabhängigkeit,* in der jedes Postulat unabhängig von den vorhergehenden ist, und eine *absolute Unabhängigkeit,* die bei jeder Anordnung der Postulate besteht. *B. Levi* (Torino Memorie 1904, p. 283) hat bemerkt, daß, wenn ein System von in bekannter Ordnung unabhängigen Postulaten $a, b, c, \ldots$ gegeben ist, man immer ein anderes gleichwertiges System bilden kann, das absolut unabhängig ist (a; es besteht b immer dann, wenn a erfüllt ist; usw.).

2) Die Unabhängigkeit der Postulate $(a, b, \ldots)$ ist mit ihrer Zusammensetzung verknüpft, d. h. es kann sein, daß man aus a zwar nicht b herleiten kann, wohl aber einen Teil von b. Das Urteil über die Unabhängigkeit wird also um so klarer sein, je *einfacher* die

Aussagen der Postulate sind. Aber *A. Padoa* hat dem Referenten gezeigt, daß es durchaus einfache Aussagen außer den Sätzen von der Form „*a* ist nicht *b*" nicht gibt und daß es unmöglich ist, auf einer endlichen Anzahl solcher Aussagen ein geometrisches System aufzubauen.

Um zu beweisen, daß ein Satz *a* von anderen Sätzen *b*, *c*, ... unabhängig ist, ist zu zeigen, daß das Gegenteil von *a* mit *b*, *c*, ... verträglich ist.

Diese Entscheidung über die *Verträglichkeit der Postulate* wurde vor allem auf die Betrachtung der arithmetischen Relationen gegründet, die die in Rede stehenden geometrischen Annahmen ausdrücken. Man nahm die Sätze der Arithmetik als logisch verträglich an und suchte die logische Möglichkeit verschiedener Geometrien zu beweisen, indem man deren Gegenstand nicht mehr gemäß seiner gewöhnlichen, physischen oder anschauungsmässigen, Bedeutung auslegte, sondern in einem durchaus abstrakten Sinne. In dieser Weise als logische Wissenschaft entwickelt, kam die Geometrie dazu, in einem allgemeineren Sinne als die Wissenschaft derjenigen Begriffe (der *abstrakten Räume*) betrachtet zu werden, welche den geometrischen Postulaten oder einem Teile von ihnen *formal* genügen.

Eine Modifikation dieses Gedankenganges besteht darin, daß man eine erste Geometrie (z. B. die Euklidische Geometrie) als gegeben (und also jedenfalls als logisch zulässig) ansieht und innerhalb derselben eine Interpretation der Annahmen irgend einer andern Geometrie sucht, indem man deren Grundbegriffe durch solche Gebilde der ersten Geometrie ersetzt, für welche die Postulate der zweiten Geometrie tatsächlich zutreffen. Nun bildet die Verträglichkeit der fundamentalen Sätze derjenigen Geometrie, welche man als gegeben annimmt, oder die Verträglichkeit derjenigen Sätze, welche die elementaren Eigenschaften der arithmetischen Operationen ausdrücken, eine Annahme, welche behauptet, man könne zu keinem Widerspruche gelangen, wie weit man auch die Konsequenzen jener fundamentalen Sätze verfolgt.

In die Erörterung der Bedeutung dieser Annahme (die mit Fragen der Erkenntnistheorie zusammenhängt) ist man in neuester Zeit auf mathematischem Gebiete eingetreten. Und hier stehen zwei Standpunkte einander gegenüber.

1) Ein *empiristischer* Standpunkt.

Wenn man die Geometrie und die Arithmetik als etwas ansieht, das ein reelles, durch die *Anschauung* oder die *Erfahrung* gegebenes Objekt hat, dann kann man die Verträglichkeit ihrer Postulate auf der Grundlage dartun, daß „das, was (physisch oder psychologisch) existiert, nicht sich selbst widersprechen kann". Dieser Standpunkt ist

neuerdings in polemischer Form von *A. Padoa*[9]) eingenommen worden, der die möglichen Interpretationen eines Systems abstrakter Sätze in allgemeinster Weise betrachtet und zu der Meinung kommt, daß kein Grund vorliegt, einer von diesen Interpretationen einen größeren Wert als einer anderen beizulegen, und insbesondere die der arithmetischen Interpretation traditionell beigelegte bevorzugte Stellung bestreitet.

Hier ist zu bemerken, daß zwischen geometrischen und (im elementaren Sinne) arithmetischen Erfahrungen folgender Unterschied besteht: die ersten beziehen sich auf Dinge, die *in stetiger Weise variieren* können, und haben daher immer *notwendigerweise* einen *angenäherten Wert;* die zweiten beziehen sich auf etwas, das nur *in diskreter Weise* variieren kann und haben daher (bis zu dem Punkte, bis zu dem sie heranreichen) einen *exakten Wert.* Wenn man daher die Erfahrung durch eine Annahme über das Resultat ihrer Wiederholung vervollständigt (die unserem Glauben an die Wirklichkeit zugrunde liegt), so kann man der Meinung sein, daß sie einen wirklichen Beweis für die in der Arithmetik enthaltenen Tatsachen liefert, nicht aber für die Geometrie.

Aber wenn man nicht die Existenz psychologischer, sondern physischer Objekte betrachtet, so ist noch zu untersuchen, ob die Annahme, daß „das, was existiert, nicht sich selbst widersprechen kann", berechtigt ist, da man mit ihr dem Prinzipe des Widerspruchs (dem Gesetze des logischen Denkens) einen objektiven Wert erteilen würde.

2) Ein *logisch-formaler* Standpunkt, der die Verträglichkeit der fundamentalen Sätze der Geometrie auf die Verträglichkeit der fundamentalen Sätze der Arithmetik zurückführen will und einen *logischen* Beweis dafür liefern zu können behauptet, daß *die Prinzipien der Arithmetik miteinander verträglich sind*[10]).

Aber eine Erörterung über die Art und die Möglichkeit eines solchen Beweises geht über den Rahmen dieses Artikels hinaus.

Die Untersuchungen über die *Unabhängigkeit der primitiven Begriffe* sind aus der von der italienischen mathematisch-logischen Schule (*G. Peano, M. Pieri, A. Padoa* usw.) eingeschlagenen Richtung hervorgegangen, die *Zahl* der bei dem logischen Aufbau der Geometrie ohne Definition angenommenen *primitiven Begriffe* in systematischer Weise zu beschränken (vgl. Nr. 6).

Sind mehrere fundamentale Begriffe A, B, C, ... gegeben, so kann man fragen, ob einer von ihnen durch einige der übrigen *de-*

---

9) L'enseignement mathématique 5 (1903), p. 85.

10) Vgl. *D. Hilbert,* Grundlagen, p. 18, und Heidelberger Kongreß, p. 174.

finiert werden kann (z. B. C mit Hilfe von A und B) oder ob er von ihnen unabhängig ist. Eine solche Frage hat so lange keinen Sinn, als man nicht sagt, welche Beziehungen zwischen den genannten Begriffen postuliert werden. Nimmt man dagegen an, daß zwischen den Begriffen A, B, C (die wir in abstrakter Weise durch die entsprechenden Symbole dargestellt betrachten) gewisse logische Beziehungen bestehen, die durch ein gewisses System von Postulaten $(a, b, c, \ldots)$, die wir als gegeben ansehen, ausgedrückt werden, so wird man dartun können, daß C *in dem System* $(a, b, c, \ldots)$ *von* A, B *unabhängig ist*, indem man eine geeignete konkrete Interpretation der Symbole A, B angibt, der zwei *verschiedene* Interpretationen von C zugeordnet werden können, so daß ein bei der ersten Interpretation wahrer (und daher mit a, b, c, ... verträglicher) Satz bei der zweiten Interpretation falsch ist (*Padoa*[11])).

Was die *Einteilung des folgenden Berichtes* betrifft, so unterscheiden wir die elementare Richtung von den höheren Ansätzen, die entweder von der Theorie des Kontinuums oder der projektiven Geometrie oder der allgemeinen Idee einer Maßbestimmung (Bogenelement und Entfernung, Bewegungsgruppe) ausgehen. Die elementare Richtung ist durch den unmittelbaren Vergleich der sämtlichen uns geläufigen geometrischen Begriffe charakterisiert, während die anderen höheren Richtungen (abgesehen von der Anwendung höherer Untersuchungsmittel und besonders der Analysis) einer Trennung der fundamentalen Begriffe in einige Familien entsprechen, von denen jede einer breit entwickelten Geometrie zur Grundlage dient, der die anderen Begriffe untergeordnet werden.

Nach der Darstellung dieser verschiedenen Richtungen berichtet der letzte Abschnitt über die neuen Entwicklungen, die durch Abstraktion von dem gewöhnlichen Begriffe des Kontinuums zur Konstruktion der nicht-Archimedischen Geometrieen geführt haben.

I. Die elementare Richtung.

2. Vorbemerkung. Elementare Darstellungen der Grundlagen der Geometrie finden sich mehr oder minder in jedem Lehrbuche der elementaren Geometrie. Wir verweisen wegen vieler Einzelheiten auf die beiden Artikel über Elementargeometrie. Hier handelt es sich nur um eine allgemeine Übersicht über die hauptsächlichsten in prinzipieller Hinsicht unterschiedenen Ansätze.

---

11) Congrès internat. de philos. Paris 1900, 3, p. 309.

Wir besprechen in dieser Hinsicht der Reihe nach die Begriffe *Punkt, Gerade und Ebene, Strecke und Winkel* (den Begriff „*zwischen*"), *Kongruenz und Bewegung*, die verschiedenen Formen des *Stetigkeitsbegriffes* und die *Parallelentheorie.* Als Ergänzung schließt sich hieran eine Besprechung der im Sinne der alten Geometer behandelten *Proportionenlehre* und der *Lehre vom Flächeninhalt.*

3. Punkt, Gerade und Ebene. *Euklid* (ὅροι α′, β′, γ′) beginnt:

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Übersetzt:

Ein Punkt ist etwas, dessen Teil nichts ist.

Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.

Eine Fläche ist etwas, was nur Länge und Breite hat.

Und *Euklid* fügt hinzu, daß die Grenzen der Linie Punkte und die Grenzen der Fläche Linien sind.

Er geht darauf so vor, daß er unter den Linien und Flächen die Gerade und die Ebene charakterisiert, wie wir es bald sehen werden.

Im Anschluß hieran gibt es zwei Wege, um in die Elemente der Geometrie einzudringen:

1. Man nimmt den *Punkt* als ersten fundamentalen Begriff an, der durch Abstraktion aus der Vorstellung eines sehr kleinen Körpers entstanden ist, und sucht dann durch *Bewegung* des Punktes die Linien, durch Bewegung der Linien die Flächen und durch Bewegung der Flächen die Körper (oder den Raum) zu erzeugen.

2. Man geht von dem fundamentalen Begriffe des *Körpers* aus und führt dann die Flächen als *Grenzen* der Körper, die Linien als Grenzen der Flächen und die Punkte als Grenzen der Linien ein.

Jedoch ist zu bemerken, daß man weder auf dem einen noch auf dem andern Wege zu wirklichen logischen Definitionen kommt, sondern nur zu Angaben und Beschreibungen von einer gewissen physischen und psychologischen Bedeutung.

Was den zweiten Weg betrifft, so kann man sagen, daß der Begriff der *Grenze* eines Körpers, einer Fläche, einer Linie den Begriff der Fläche, der Linie, des Punktes, den man definieren will, bereits enthält, wenn er nicht etwa alle diese Begriffe gleichzeitig und im besonderen einige Beziehungen zwischen ihnen enthält, die schwer festzustellen sind.

Der erste Weg scheint zwar nicht einen so deutlichen Zirkelschluß zu enthalten, aber er erfordert doch eine tiefgehende Unter-

suchung, um zu einer logischen Systematisierung der in Rede stehenden Begriffe zu führen. Und die große Schwierigkeit dieser Untersuchung hängt damit zusammen, daß die von uns auf induktivem Wege erworbenen Begriffe der Linie und der Fläche sich sozusagen in einer fortschreitenden Weiterbildung befinden, der wohl bezeichnete Grenzen schwer zu setzen sind (vgl. Abschn. II dieses Referats und das Referat III A, B 2, *v. Mangoldt*).

Daher die Tendenz der modernen kritischen Elementargeometrie, den „Punkt" als ersten fundamentalen Begriff anzunehmen und nacheinander die einfachsten Linien und Flächen (die Gerade, die Ebene, ...) einzuführen, mit deren Hilfe man dann versucht, die allgemeinsten Begriffe der Linie und der Fläche zu gewinnen. Geht man in dieser Ordnung vor, so können die Linien- und Flächeneigenschaften der genannten besonderen Linien und Flächen mit der Leichtigkeit und Bestimmtheit, die der besondere Fall gestattet, ausgesprochen werden, wie wir es in Nr. 4 sehen werden.

Bevor wir den Begriff „Punkt" verlassen, wollen wir noch bemerken, daß er definiert werden könnte, indem man von den Begriffen „Körper" und „Bewegung" ausgeht, wenn man nämlich die Bewegungen als Glieder einer Gruppe von Transformationen betrachtet, denen man die Körper unterwirft (vgl. Abschn. V B dieses Referats). Dann entsprechen (nach *Poincaré*) die Punkte gewissen „Untergruppen der Gruppe der Bewegungen" (den Gruppen der Rotationen um die Punkte des Raumes) und sie können als solche definiert werden. Diese Entwicklungsweise würde zwar etwas mühsam sein, aber aus zwei Gründen interessant:

Erstens würden dabei die Postulate in einer Form ausgesprochen werden, die dem unmittelbaren Ergebnisse der physischen Erfahrungen am nächsten kommt;

zweitens kommt dabei zum Vorschein, daß der Begriff des Punktes, der der Existenz gewisser Untergruppen der Gruppe der Bewegungen entspricht, ein physisches Faktum voraussetzt.

Gehen wir nun dazu über, die Definitionen der *Geraden* und der *Ebene* zu prüfen.

Die Begriffe Gerade und Ebene können entweder als primitive Begriffe angenommen oder aber mit Hilfe der Begriffe Kongruenz und Bewegung definiert werden.

Euklid definiert in seinen „Elementen"[12]) die Gerade: *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.*

12) *J. L. Heiberg*sche Ausgabe, Leipzig 1883, 1, ὅροι δ΄.

Proclus[13]) interpretiert diese Definition, indem er sagt, daß die Gerade die Linie ist, deren Länge zwischen zwei Punkten mit deren Entfernung zusammenfällt, und dann könnte man sie an die sogleich zu nennende Archimedische Definition anschließen.

Allgemein übersetzt man: „die Gerade ist diejenige Linie, welche zu ihren Punkten in gleicher Weise liegt", und interpretiert dies vielfach als diejenige Linie, welche von jedem ihrer Punkte in zwei gleiche Teile geteilt wird[14]). Aber diese Eigenschaft charakterisiert die Gerade nicht, da sie auch der Schraubenlinie zukommt.

W. Leibniz[15]) hat die Gerade als die Linie betrachtet, welche die Ebene in zwei kongruente Teile teilt (und die Ebene als die Fläche, welche den Raum in zwei kongruente Teile teilt).

Diese Vorstellungen von *Euklid* und *Leibniz* können zu einer logischen Formulierung der Prinzipien der Geometrie führen, wenn man als primitive Begriffe die Begriffe *Punkt* und *gleiche Entfernung* annimmt und mit Hilfe eines geeigneten Systems von Postulaten die *Symmetrie* auf der Geraden, in der Ebene und im Raume herstellt[16]).

Archimedes[17]) hat die Gerade als die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten betrachtet, und dieser Begriff ist dann von *A. M. Legendre*[18]) wieder aufgenommen worden. Auch er kann zu einer logischen Definition der Geraden führen, wenn man als primitiven Begriff den der *Entfernung* zwischen zwei Punkten (oder genauer den Begriff *gleicher*, *größerer* oder *kleinerer Entfernung* bei zwei [als fest betrachteten] Punktepaaren) annimmt. Auf Grund eines geeigneten Systems von Postulaten kann man dann unter gewissen Bedingungen die *Länge einer Linie* und daher die Gerade als die Linie kleinster Länge zwischen zwei Punkten definieren[19]).

Allgemeiner bekannt ist die auch von *Leibniz*[20]) und anderen gebrauchte und von *M. Simon*[21]) im *Proclus* wiedergefundene Definition,

13) Commentarii, p. 109.

14) In bezug auf diese verschiedenen Interpretationen vgl. *M. Simon*, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901, p. 26; vgl. auch *H. G. Zeuthen*, Geschichte der Mathematik im Altertum, Kopenhagen 1896.

15) „*Leibniz*ens Mathematische Schriften", herausgegeben von *C. J. Gerhardt*, erste Abteilung, 1, Berlin 1849, p. 196.

16) Vgl. *T. Brodén*, Pedagogiske Tidskrift, Halmstad 1890.

17) *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, λαμβανόμενα α'*, opera I, p. 8; vgl. *P. Du Bois-Reymond*, Math. Ann. 15 (1879), p. 283.

18) Éléments de géométrie, 2. édit., Paris an VIII, p. 1.

19) Vgl. *R. Bettazzi*, Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 19.

20) Mathematische Schriften, erste Abtheilung, 1, p. 196, und zweite Abteilung, 1, p. 164.

21) „*Euklid*", p. 26.

nach welcher die Gerade als die Linie betrachtet wird, die unbewegt bleibt, wenn man sie um zwei ihrer Punkte rotieren läßt. *C. F. Gauß* bemerkt bei Gelegenheit (vgl. Werke 8, p. 196), daß man sich dieser Eigenschaft gerade in der Praxis, wenn man die Operationen mit dem Theodolithen vornimmt, bedient, um festzustellen, ob eine Linie eine Gerade ist.

Viele Mathematiker (darunter *H. Graßmann*[22]) haben die Gerade als diejenige Linie betrachtet, welche in jedem ihrer Punkte eine konstante Richtung beibehält. Soll diese Definition annehmbar sein, so muß man als primitiven Begriff den der *Richtung* annehmen, und das kann z. B. in Beziehung auf zwei Punkte, unabhängig von dem Begriffe der Geraden, geschehen. Diese Idee ist noch neuerdings von *Edw. F. Dixon*[23]) entwickelt worden. Sie hängt mit der anderen *Graßmann*schen Idee zusammen, nach welcher die Geometrie als ein *geometrisches Rechnen mit Strecken* oder, modern ausgedrückt, als eine *Vektoranalysis* dargestellt wird[24]). Die Grundvorstellungen und -sätze dieses geometrischen Rechnens hat kürzlich *G. Peano*[25]) analysiert. Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand haben *G. Darboux*[26]), *F. Siacci*[27]), *R. Schimmack*[28]), *F. Schur*[29]), *G. Hamel*[30]) veröffentlicht.

Eine bemerkenswertere Definition der Geraden und der Ebene ist die von *W. Leibniz*[31]) erdachte und dann von *Joh. Bolyai*[32]) und *N. Lobatschefskij*[33]) wieder aufgenommene und entwickelte, die darin besteht, daß man die Ebene als den Ort der Punkte betrachtet,

---

22) Vgl. Ausdehnunglehre von 1844, Einleitung, Abschn. C, Ges. Werke I 1, p. 28: „Die einfache Ausdehnungsform ist die Form, welche durch eine nach demselben Gesetze erfolgende Änderung des erzeugenden Elementes entsteht"; p. 29: „In der Raumlehre ist die Gleichheit der Richtung das die einzelnen Änderungen umfassende Gesetz".

23) The foundations of geometry, Cambridge 1891.

24) Vgl. etwa den orientierenden Aufsatz von *H. Graßmann:* Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre, Arch. Math. Phys. 6 (1845), wieder abgedruckt: Ges. Werke I 1, p. 297 ff., insbesondere die Abschnitte III und IV.

25) Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di *H. Graßmann*, Torino 1888.

26) Bull. math. astr. 9 (1875), p. 281, abgedruckt als Note 1 in *Despeyrous,* Cours de Mécanique 1 (1884), p. 371.

27) Napoli Rend. (3) 5 (1899), p. 34.

28) Göttinger Nachrichten 1903, p. 34.

29) Zeitschr. Math. Phys. 49 (1903), p. 352.

30) Zeitschr. Math. Phys. 49 (1903), p. 362.

31) Math. Schriften, zweite Abteilung, 1, p. 166.

32) Vgl. *W. Bolyai,* Tentamen, editio secunda II, Budapest 1904, p. 8.

33) *N. J. Lobatschefskij,* Zwei geometrische Abhandlungen, 1, p. 7 und 95.

die von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben[34]), und die Gerade als den Ort der Punkte, die von drei Punkten, deren gegenseitige Entfernungen den bekannten, zwischen den Seiten eines Dreiecks bestehenden Ungleichheiten genügen, gleich weit entfernt sind, oder auch als den Ort der Berührungspunkte der Kugeln, die zwei gegebene Mittelpunkte haben (vgl. auch *G. Peano,* Fußnote 60). Der Begriff der *gleichen Entfernung* von Punktepaaren tritt hier wieder als primitiv auf.

Wenn die Ebene nicht gleichzeitig mit der Geraden oder vor ihr definiert wird, so kann man den Begriff der Ebene unmittelbar auf den der Geraden zurückführen.

Euklid definiert die Ebene: ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται, was man gewöhnlich übersetzt: eine Ebene ist eine Fläche, die gleichmäßig zu ihren Geraden liegt. Diese Definition enthält sicher Überflüssiges; in der Tat ist die Ebene schon definiert als diejenige Fläche, welche die Gerade, die zwei beliebige ihrer Punkte verbindet, ganz enthält; diese Definition kann man bis auf *Heron* zurückführen.

C. F. Gauß[35]) hob hervor, daß diese Definition ein Postulat enthält, da eine Gerade und ein außerhalb derselben gelegener Punkt schon die Erzeugung der Ebene geben. Er hat vorgeschlagen, die Ebene als den Ort der in einem Punkte zu einer Achse errichteten Normalen zu definieren. Die gewöhnliche Definition verwandelt sich dann in ein Theorem, mit dessen Beweis sich *Gauß* in seinem Nachlasse beschäftigt[36]).

Eine analoge Überlegung hat *F. Deahna*[37]) ausgeführt. Er geht von einer Erzeugung der Ebene aus, die von der vorhergehenden wenig verschieden ist. Nachdem er zunächst die Begriffe der Geraden und der Kugel (mit Zugrundelegung des Begriffes der gleichen Entfernung) aufgestellt hat, nimmt er an, daß man die Kugel um einen Durchmesser in der Weise bewegen kann, daß jeder Punkt eine geschlossene Linie (einen Kreis) beschreibt; unter diesen Kreisen gibt es einen, der die Kugel in zwei kongruente Teile teilt; die Geraden,

---

34) Genau durch diesen Ansatz entsteht die *Hesse*sche Normalform der Gleichung der Ebene.

35) Brief an *Bessel* vom 27. Januar 1829; Werke 8, p. 200.

36) Werke 8, p. 194.

37) Demonstratio theorematis geometrici fundamentalis atque hucusque pro axiomate sumti: „esse superficiem planam", Diss. Marburg 1837; vgl. *W. Killing,* Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn 1893 und 1898, 2, p. 183.

welche die Punkte dieses Kreises mit dem Mittelpunkte der Kugel verbinden, erzeugen eine Ebene.

Neuerdings ist die Frage der Ebene von *G. Veronese*[38]) einer neuen Prüfung unterworfen worden. Dieser definiert, nachdem er einige einfache Postulate über die Gerade und die Kongruenz (vgl. Nr. 5) ausgesprochen hat, (für den Euklidischen Fall) zwei Gerade als *parallel*, wenn sie in bezug auf einen Punkt entgegengesetzt (symmetrisch) sind, und führt das Postulat ein: „Zwei parallele Gerade sind in bezug auf den Mittelpunkt jeder Strecke, deren Endpunkte auf ihnen liegen, entgegengesetzt.“ Auf dieser Grundlage konstruiert er die Ebene mit Hilfe des Büschels der Geraden, die von einem außerhalb gelegenen Punkte A aus die Punkte einer Geraden a projizieren, wobei die durch A zu a gezogene Parallele hinzugefügt wird, und darauf beweist er, daß die so konstruierte Ebene die Gerade enthält, die zwei beliebige ihrer Punkte verbindet[39]).

Gerade, Linie und Ebene lassen sich auch gruppentheoretisch fassen.

Nachdem wir untersucht haben, wie die Begriffe *Gerade* und *Ebene* mit Hilfe der Kongruenz und der Bewegung definiert werden können, wollen wir von der Idee sprechen, die Gerade oder die geradlinige Strecke und die Ebene oder die ebene Fläche als *fundamentale*, durch einige Gruppen von Postulaten charakterisierte *Begriffe* anzunehmen.

Wenn man von dem Begriffe der geradlinigen *Strecke* ausgeht, so kann man die Gerade definieren (*Pasch*, Neuere Geometrie; *Peano*, Principii und Fondamenti), und ebenso kann man die unbegrenzte Ebene definieren, wenn man in geeigneter Weise die Eigenschaften einer ebenen Fläche postuliert, indem man also ein geeignetes Raum-

---

38) Fondamenti di geometria, Padova 1891, deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1894, Buch I, Nr. 19, II, Nr. 7, ausführlicher in den Elementi.

39) *Veronese* hat angedeutet, wie man unabhängig von dem genannten Parallelenpostulat (das das Euklidische Parallelenpostulat und vielleicht etwas mehr enthält) die Frage der Ebene unter der *Lobatschefskij*schen Annahme behandeln könne, und er hat auch den *Riemann*schen Fall, in welchem es keine Parallelen gibt (Nr. 8), näher betrachtet. Aber in diesem Falle, in dem die vollständige Ebene durch die Projektion der (geschlossenen) Geraden von einem äußern Punkte aus gegeben ist, wird der Satz von der Ebene von *Veronese* nur unter Zuhilfenahme einer weiteren Annahme bewiesen, in der der Begriff des unendlich großen und des unendlich kleinen Gebietes auftritt. Der Autor drückt übrigens die Meinung aus, daß diese Annahme in seinem Systeme überflüssig sein muß. Aber diese Meinung bedarf noch der Rechtfertigung.

stück betrachtet; dagegen muß man, wenn man von dem fundamentalen Begriffe der Geraden ausgeht, einen anderen primitiven Begriff hinzunehmen, um die Strecke zu definieren.

Wir behalten uns vor, die Formulierung der Postulate, zu der man gelangt, wenn man den ersten Weg einschlägt, auseinanderzusetzen, wenn wir von den Prinzipien der projektiven Geometrie sprechen werden (III.), und wollen jetzt den anderen Weg durchlaufen, um zu zeigen, wie sich dabei die Eigenschaften, die mit den Beziehungen der *Lage* oder des *Einanderangehörens* (der „Verknüpfung" bei *Hilbert*, Grundlagen, p. 2) von Gerade und Ebene zusammenhängen, bis auf einen gewissen Punkt getrennt von den Linien- und Flächeneigenschaften (den Postulaten der *Anordnung*, der *Teilung*) ergeben.

Die Postulate des *Einanderangehörens* (der Verknüpfung) können wie folgt formuliert werden[40]):

I. Man setzt eine Klasse von Elementen, *Punkte* genannt, (deren Inbegriff *Raum* genannt wird), als gegeben voraus und in ihr Unterklassen (*Gerade* und *Ebenen*), die folgenden Postulaten genügen:

1) Zwei Punkte gehören einer und nur einer Geraden an.
2) Drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören, gehören einer und nur einer Ebene an.
3) Die durch zwei Punkte einer Ebene bestimmte Gerade gehört der Ebene an.
4) Zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, haben noch einen anderen Punkt (und also eine Gerade) gemeinsam.

Diesen Postulaten von zunächst nur hypothetischer Form fügt man die Existenzpostulate hinzu, die die Existenz mehrerer verschiedener Punkte und von Punkten *außerhalb* einer Geraden oder einer Ebene behaupten. Die Existenz einer unendlichen Zahl verschiedener Punkte, Geraden und Ebenen folgt dann aus den erst weiter unten unter II anzuführenden Postulaten der Anordnung.

Es ist zu bemerken, daß das vierte Postulat die Dreidimensionalität des Raumes ausspricht und auf Grund der in geeigneter Weise als Postulat ausgesprochenen Eigenschaft der Ebene, den Raum in zwei Teile zu teilen, bewiesen werden kann (vgl. Nr. 4).

4. Strecke, Winkel (der Begriff „**zwischen**"). Wir gehen nun dazu über, die Postulate zu untersuchen, die die *Linieneigenschaften* der Geraden und die *Flächeneigenschaften* der Ebene ausdrücken (vgl. Abschn. II. Theorie des Kontinuums) und sich auf die Begriffe

---

40) Wir bezeichnen sie mit der Ziffer I, weil wir später weiter numerieren; vgl. 4.

„zwischen", „natürliche Ordnung der Punkte einer Geraden", „Strecke", „Strahl", „Seite der Ebene", „Winkel" beziehen.

Bei *Euklid* und seinen Nachfolgern werden diese Begriffe noch nicht untersucht und Postulate, die sich auf sie beziehen, nicht formuliert, aber solche Postulate sind nötig, wenn man wünscht, daß die geometrische Betrachtung rein logisch und von dem Gegenstande der Anschauung unabhängig ist.

C. F. Gauß hat schon frühzeitig darauf aufmerksam gemacht[41]), daß der Begriff „zwischen" einer strengen Formulierung bedarf. Andererseits hat *Herbart* bemerkt, daß der Begriff der Ordnung der Punkte einer Geraden der ganzen Geometrie zugrunde liegt. Nun verfügte die analytische Geometrie durch ihre *Vorzeichen* immer über den Begriff *zwischen*. Dieses Prinzip der Zeichen hat dann *A. F. Möbius* (Barycentrischer Calcul) in die reine Geometrie übertragen, und auch *H. Graßmann* macht in seiner Ausdehnungslehre von 1844 davon konsequenten Gebrauch. Jedoch verdanken wir eine Systematierung dieser Dinge, d. h. die Aufstellung eines Postulatensystems zur Charakterisierung dieser Beziehungen erst *M. Pasch* (Neuere Geometrie, 1882), und derselbe Gegenstand ist dann in verschiedener Weise von *G. Peano* (Principii und Fondamenti), *G. Veronese* (Fondamenti), *D. Hilbert* (Grundlagen) u. A. behandelt worden (vgl. Abschn. II. Theorie des Kontinuums).

Man kann zwei Arten, diese Untersuchung zu führen, unterscheiden, und zwar knüpfen diese gewissermaßen an die erwähnten Bemerkungen von *Gauß* und von *Herbart* an: es handelt sich nämlich darum, ob man sich auf den Begriff der *fertigen* oder den der *werdenden* Figur bezieht.

a. Die *Linieneigenschaften* der Geraden können der *fertigen* Figur gegenüber postuliert werden, wenn man von dem Begriffe „zwischen" oder „Zerlegung in Teile" ausgeht, und zwar in folgender Weise:

II. 1) Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.

2) Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt.

3) Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt[42]).

41) Brief an *W. Bolyai* vom 6. März 1832, Werke 8, p. 222.

42) Nach *D. Hilbert,* Grundlagen, p. 4.

Oder in folgender Weise:

II'. Jeder Punkt A der Geraden *zerlegt die Gerade* in zwei Klassen von Punkten (*Teile*), die man mit den Namen rechter Teil und linker Teil bezeichnen kann, in der Weise, daß:

1) jeder von A verschiedene Punkt einem der beiden Teile angehört;
2) wenn A sich zur Linken (oder zur Rechten) von einem anderen Punkt B befindet, jeder Punkt zur Linken (oder zur Rechten) von A sich zur Linken (oder zur Rechten) von B befindet;
3) wenn A sich zur Linken von B befindet, B sich zur Rechten von A befindet.

Stellt man sich der *werdenden* Figur gegenüber, so hat man:

II''. Die Punkte der Geraden sind in zwei (*natürlichen*) *Ordnungen*, von denen die eine der anderen entgegengesetzt ist, in der Weise aneinander gereiht, daß bei Betrachtung einer bestimmten Ordnung:

1) wenn zwei Punkte A, B der Geraden gegeben sind, einer von ihnen, z. B. A, dem anderen, B, *vorangeht*, und alsdann B auf A *folgt*;
2) wenn drei Punkte A, B, C gegeben sind und A dem B und B dem C vorangeht, A dem C vorangeht;
3) zwischen zwei Punkten A und B Zwischenpunkte (die dem einen vorangehen und auf den anderen folgen) existieren;
4) kein erster (allen vorangehender) Punkt und auch kein letzter Punkt existiert.

Auf Grund dieses Postulats läßt sich die *Strecke* mit den *Endpunkten* A und B auf der Geraden (die die Zwischenpunkte enthält) definieren und der Beweis ihrer elementaren Eigenschaften führen.

b. Gehen wir nun zu den *Flächeneigenschaften* der Ebene.

Stellt man sich der *fertigen* Figur gegenüber, so kann man die Zerlegung der Ebene in zwei Teile durch eine ihrer Geraden zu Grunde legen, deren fundamentale Eigenschaft man (mit *Pasch*) durch das folgende Postulat ausdrückt, das wir in Anlehnung an die vorangehenden Postulate II 1—3 mit II 4 bezeichnen:

II. 4) Sind in einer Ebene drei Strecken AB, BC, CA gegeben, so hat eine Gerade (der Ebene), die mit einer von ihnen einen Punkt gemeinsam hat, auch mit einer der beiden anderen einen Punkt gemeinsam.

Eben infolge dieses Postulats wird die Ebene durch eine ihrer Geraden, r, in zwei Teile (*Seiten* oder *Halbebenen*) in der Weise geteilt, daß die Strecke, die zwei (nicht auf r liegende) auf derselben Seite von r befindliche Punkte verbindet, keinen Punkt mit r ge-

meinsam hat, während die Strecke, die zwei nicht auf derselben Seite von r befindliche Punkte verbindet, mit r einen Punkt gemeinsam hat.

Man kann dieselben Eigenschaften einführen, wenn man die *werdende* Figur betrachtet. Dies geschieht für die Euklidische Geometrie in einfacher Weise, indem man folgendes postuliert:

1) das Euklidische Parallelenpostulat,

2) daß, wenn zwei von einem Punkt ausgehende Geradenpaare von einer (zu keiner der vier Geraden parallelen) Transversalen in zwei sich trennenden Punktepaaren geschnitten werden, dasselbe für jede andere Transversale gilt, die nicht durch O geht und keiner der vier Geraden parallel ist (vgl. Abschn. III).

Das *Pasch*sche Postulat führt sofort zur Definition der *Winkelfelder,* in die zwei sich schneidende Gerade die Ebene zerlegen, und der zugehörigen *Winkel.*

Hier sei daran erinnert, daß die Frage, wie man den *Winkel* definieren soll, zu manchen Erörterungen geführt hat.

Euklid (ὅροι, η′) bezeichnet den *Winkel* als die „Neigung“ zweier sich schneidender Geraden, was offenbar eine Tautologie ist. Andere haben den Winkel als das „Maß einer Drehung“ betrachtet. Das Wesentliche dessen, was hier vorliegt, besteht in der Existenz einer gewissen Invariante bei einem Paar sich schneidender Geraden gegenüber der Gruppe der Bewegungen. Der Begriff einer solchen Invariante (der Winkelgröße) ist für die gewöhnliche Theorie der Kongruenz offenbar ausreichend.

Jedoch spielt der Winkel bei anderen Fragen eine hiervon verschiedene Rolle. Dies kann man vor allem behaupten, soweit es sich um gewisse Verhältnisse der Lage, um „Punkte innerhalb eines Winkels“ usw. handelt. Im Hinblick auf diese Beziehungen ist ein Winkelbegriff erwünscht, der von dem Begriffe der Winkelkongruenz unabhängig ist. Daher ist der Winkel (von *Louis Bertrand*[43]) als ein Teil der Ebene definiert worden, und zwar als „der Teil, der zwei, durch die Schenkel begrenzten Halbebenen gemeinsam ist (als ihre *Interferenz*)“.

G. Veronese[44]) bemerkt, daß die so definierte Figur (Winkelfeld oder -ausschnitt) der gewöhnlichen Anschauung des Winkels, der als etwas Eindimensionales, als ein Teil des Strahlenbüschels, betrachtet wird, nicht entspricht. Darum schlägt er (in Anlehnung an das in der projektiven Geometrie herrschende Prinzip der Dualität) vor, den

43) Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, 2 vol., Genève 1774.

44) Grundzüge, p. 307 f. und 695; Elementi.

Winkel als die Gesamtheit der zwischen zwei Strahlen befindlichen Strahlen zu definieren.

Wir wollen endlich noch hinzufügen, daß man auf Grund des *Pasch*schen Postulats alle Lagenverhältnisse der polygonalen Figuren allgemein entwickeln und im besonderen die „*Fläche* eines *Polygons*“ definieren kann. *Veronese*[45]) kommt zu diesen Entwicklungen auf rekurrente Weise, indem er zunächst das Dreieck (nämlich die Fläche des Dreiecks) als den Teil der Ebene, der zwei Winkeln gemeinsam ist, dann das konvexe Polygon als die Summe (*Vereinigung*) von Dreiecken betrachtet; werden diese Entwicklungen an die genetische Konstruktion der Ebene angeknüpft, so treten sie bei ihm in Beziehung zu dem Begriffe der Parallelen (vgl. Nr. 8). *Enriques* und *Amaldi*[46]) definieren das konvexe Polygon als „die Interferenz der Halbebenen, die die Eckpunkte enthalten und von den Seiten begrenzt sind“ und leiten daraus die elementaren Eigenschaften der Lage her, indem sie das *Pasch*sche Postulat direkt anwenden.

Die beiden Teile, in die eine Ebene durch ein konvexes Polygon zerlegt wird, lassen sich ebenfalls durch „Vereinigung“ und „Interferenz“ von Halbebenen definieren, und hieran anschließend leitet man dann die fundamentale Eigenschaft her, daß eine nicht durch einen Eckpunkt des Polygons gehende, zwei Punkte verbindende Strecke den Umfang in einer geraden oder in einer ungeraden Zahl von Punkten trifft, je nachdem die beiden genannten Punkte demselben Teile der Ebene angehören oder nicht. Der innere Teil (die Fläche des Polygons) scheint sich von dem äußeren Teile nur durch Berücksichtigung der Unendlichkeit des zweiten unterscheiden zu lassen.

c. Die oben untersuchten Begriffe der ebenen Geometrie erstrecken sich auch auf den *Raum*.

Die *Teile* oder *Seiten*, in welche der Raum durch eine Ebene zerlegt wird, lassen sich definieren, wenn man ein dem *Pasch*schen Postulat analoges Postulat annimmt, das die Aussage enthält, daß „der Raum drei Dimensionen hat“, und zu beweisen erlaubt, daß „zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, eine Gerade gemeinsam haben“. Wenn man dagegen diese Eigenschaft als Postulat annimmt (wie in Nr. 3), so folgt die Zerlegung des Raumes durch eine Ebene aus dem *Pasch*schen Postulat in bezug auf die Ebene.

Der Begriff des *Flächenwinkels* ist dem des Winkels analog und gibt zu neuen Betrachtungen keinen Anlaß.

---

45) Grundzüge, p. 346 ff.; Elementi.

46) Elementi di geometria, Bologna 1903, p. 98.

Die allgemeine Definition des *Polyeders* (der polyedrischen Figur oder des geschlossenen Körpers) erfordert einige Aufmerksamkeit; im besonderen tritt hier eine neue Schwierigkeit in der Definition der polyedrischen Figur (unabhängig von dem Begriffe des Körpers) auf (vgl. III A,B 3, *Dehn-Heegard,* Analysis situs, und die späteren Referate über Polyeder).

Wir schließen die Untersuchung dieser Begriffe mit der Bemerkung ab, daß die Begriffe des *Sinnes* eines Winkels (oder einer Figur, einer Strecke usw.) in der Ebene und des *Sinnes einer Schraubenlinie* im Raume (des Sinnes eines Flächenwinkels usw.) auf Grund des *Pasch*schen Postulats und des analogen Satzes für den Raum aufgestellt werden können, ohne daß andere primitive Anschauungen zu Hilfe zu nehmen sind; dieser Gegenstand ist in verschiedener Weise von *G. Veronese* und *Enriques-Amaldi* behandelt worden[47]).

5. Kongruenz und Bewegung. Hinsichtlich der Kongruenz oder geometrischen Gleichheit und der Bewegung (der starren Körper), die jene (im physischen Raume) zu verifizieren gestattet, gibt es zwei verschiedene Anschauungsweisen.

Nach einigen bietet der Begriff der Bewegung, insofern durch eine Bewegung Figuren zur Deckung gebracht werden können, die Definition der Kongruenz dar. Nach anderen schließt der Begriff der geometrischen Bewegung, d. i. einer Lagenänderung *ohne Deformation,* bereits implicite den Begriff der Kongruenz ein.

Wir wollen nicht von den Versuchen sprechen, die seit *Euklid* gemacht worden sind, den Begriff der Bewegung aus den Prinzipien der Geometrie zu verbannen. Wir wollen nur daran erinnern, daß in neuester Zeit *H. v. Helmholtz*[48]) behauptet hat, daß der Begriff der Bewegung (wenn man von der Zeit abstrahiert) die natürliche Grundlage des Begriffes der Kongruenz ist (Abschn. V B), und daß aus diesem Grunde später *J. Hoüel*[49]) es als die Frucht einer Gedankenverwirrung bezeichnet hat, die Bewegung aus den Elementen der Geometrie verbannen zu wollen. Auch *Poincaré* (Wissenschaft und Hypothese) betrachtet den Begriff der Bewegung als den eigentlichen Fundamentalbegriff der Geometrie. Ebenso z. B. *Ch. Méray*[50]).

---

47) *G. Veronese,* Elementi di geometria; *Enriques-Amaldi,* Elementi di geometria, p. 58. Vgl. auch den Artikel von *U. Amaldi* in *Enriques,* Questioni, und *B. Levi,* Per. di mat. (3) 1 (1904) p. 207.

48) Wissensch. Abhandl. 2, p. 610 u. 618.

49) Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, Paris 1883.

50) Nouveaux éléments de géométrie, Dijon 1874, 2. Auflage 1903. *Méray*

Aber auf mathematischem Gebiete können beide erwähnte Anschauungsweisen als legitim verteidigt werden. Wenn man auch zugibt, daß in der psychologischen Entstehung der Begriff der Kongruenz in der physischen Bewegung der starren Körper seinen Ursprung hat, so kann man doch nicht leugnen, daß der *entwickelte* Geist des Mathematikers die beiden Begriffe der Kongruenz und der Bewegung in gleicher Weise enthält, so daß jeder von ihnen (unabhängig von dem andern) logisch als ein primitiver Begriff, der durch ein geeignetes System von Postulaten zu charakterisieren ist, angenommen werden kann. Und vielleicht ist nicht ohne tiefere Prüfung die Meinung von der Hand zu weisen, daß die Kongruenz, als eine *physische* Beziehung aufgefaßt, an und für sich eine Bedeutung hat, unabhängig von der Bewegung der Körper.

Neben den beiden oben erwähnten Anschauungsweisen möchte eine dritte (*Veronese*[51])) den Begriff der geometrischen Kongruenz mit demjenigen der logischen Identität verknüpfen. Aber es ist schon, und wie uns scheint mit Recht, von der Kritik hervorgehoben worden, daß diese Anschauungsweise sich auf eine falsche Auffassung des logischen Prinzips der Identität stützt.

Wir möchten nun hier, wo es sich um die elementare Richtung handelt, die Postulatensysteme kurz angegeben, mit deren Hilfe *M. Pasch*, *G. Veronese* und *D. Hilbert* die fundamentalen Eigenschaften der geometrischen Kongruenz logisch formuliert haben, während wir später (Nr. **32**—**35**) die Entwicklungen prüfen wollen, nach welchen, entsprechend den Ideen von *H. v. Helmholtz*, die Gesamtheit der Bewegungen sich als eine *Gruppe von Transformationen* charakterisieren läßt.

a. *M. Pasch* (Neuere Geometrie) führt, nachdem er die deskriptiven[52]) Eigenschaften der Geraden und der Ebene in Postulaten, die den Postulaten I und II der Nrn. **3** und **4** äquivalent sind, formuliert hat, als logisch primitiven (wenn auch psychologisch durch die Erfahrung der Bewegung erworbenen) Begriff den Begriff der *Kongruenz zwischen zwei* aus Punkten bestehenden geometrischen *Figuren* ein; diese Beziehung wollen wir durch $M \equiv M'$ bezeichnen.

Die Kongruenz wird als eine umkehrbar eindeutige *Beziehung* zwischen den Punkten der beiden Figuren aufgefaßt von folgender Art:

---

geht von der Translation aus, um zum Begriffe des Parallelismus zu gelangen (p. 21), und die Rotation führt ihn zum Begriffe der Orthogonalität (p. 31).

51) Grundzüge, Teil I, Buch 1.

52) Vgl. Fußnote 5.

Homologe Teile kongruenter Figuren sind kongruent. Figuren, die einer dritten kongruent sind, sind unter einander kongruent. Wenn zwei Figuren M und M' kongruent sind ($M \equiv M'$) und man fügt zu M einen Punkt A hinzu, so kann man immer einen Punkt A' in der Weise wählen, daß die zusammengesetzten Figuren $M + A$ und $M' + A'$ kongruent sind ($M + A \equiv M' + A'$).

Für die Gerade und die Ebene werden die fundamentalen Eigenschaften der Kongruenz durch sieben Postulate ausgesprochen, deren Inhalt wir im folgenden angeben, indem wir Punkte mit den Buchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnen. Die ersten fünf dieser Postulate beziehen sich auf die Gerade, die beiden übrigen auf die Ebene.

1) Die Figuren AB und BA sind kongruent, d. h. $AB \equiv BA$.

2) In der (ebenen) Figur ABC gibt es auf der Geraden AC in dem Teile, wo C liegt, einen bestimmten Punkt B', so daß $AB' \equiv AB$.

3) Wenn $ABC \equiv A'B'C'$ und C ein Punkt innerhalb der Strecke AB ist, so ist C' ein Punkt innerhalb der Strecke $A'B'$.

4) Wenn der Punkt C_1 sich innerhalb der Strecke AB befindet und man auf der Geraden AB in dem Teile, der A nicht enthält, den Punkt C_2 in der Weise konstruiert, daß $C_1C_2 \equiv AC_1$, darauf den Punkt C_3 in der Weise, das $C_2C_3 \equiv C_1C_2, \ldots$, so erhält man eine Strecke C_nC_{n+1}, die den Punkt B enthält.

5) Wenn in der Figur ABC $AB \equiv BC$ ist, so ist $ABC \equiv CBA$.

6) Wenn D, E, F drei nicht in gerader Linie liegende Punkte sind und $AB \equiv DE$ ist, so gibt es in einer gegebenen, durch AB gehenden Ebene *zwei Punkte* C von der Art, daß $ABC \equiv DEF$.

7) Wenn zwei nicht ebene Figuren $ABCD$ und $ABCE$ kongruent sind, so fällt der Punkt E mit D zusammen.

Die Annahme 4) enthält das sogenannte *Archimedische Postulat*, von dem wir weiter unten noch ausführlicher handeln werden.

b. Wenn auch dieses *Pasch*sche System logisch vollkommen ist, so bedeutet ihm gegenüber das Postulatensystem von *G. Veronese* doch insofern einen Fortschritt, als es nicht den Begriff der Kongruenz zwischen irgend welchen zwei Figuren als primitiv annimmt, sondern nur den Begriff der *Kongruenz zweier Strecken*.

Es wird durch fünf Postulate, deren Inhalt wir im folgenden angeben[53]), charakterisiert.

---

53) Bei dieser Formulierung sind nicht nur die Fondamenti, sondern auch zum Teil die Elementi des genannten Verfassers berücksichtigt, jedoch wird hier das (in den Elementi nicht enthaltene) allgemeine Postulatensystem, das von dem Parallelenpostulat absieht, wiedergegeben.

1) Die Kongruenz zwischen zwei Strecken ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen deren Punkten, in der aufeinanderfolgenden Punkten aufeinanderfolgende Punkte entsprechen und homologe Teilstrecken kongruent sind.

2) Strecken, die einer dritten kongruent sind, sind unter einander kongruent.

3) Ist auf einer Geraden eine Strecke AB gegeben und ein Punkt C, so gibt es auf der Geraden eine bestimmte Strecke CD, die AB kongruent ist und denselben Sinn hat.

4) Ist auf einer Geraden eine Strecke AB gegeben, so gibt es auf ihr eine bestimmte Strecke AB_1, die AB kongruent ist und den entgegengesetzten Sinn hat.

5) Wenn zwei Gerade einen Punkt A gemeinsam haben, so ist jeder Strecke AB der einen eine Strecke AB' der anderen (und eine Strecke AB'' von entgegengesetztem Sinne) kongruent.

Auf Grund dieser Postulate und der Postulate, die den primitiven Begriff der Geraden (die Ordnung ihrer Punkte, ihre Stetigkeit im Sinne der Nr. 7, ihre Bestimmung durch *zwei* Punkte) definieren, kann man irgend zwei Strecken mit einander vergleichen, indem man von *größeren* und *kleineren Strecken*, von der *Summe* oder der *Differenz* zweier Strecken usw. spricht. Im übrigen enthalten diese Postulate noch nicht das Archimedische Postulat, das man daher, wenn man es braucht, den vorhergehenden hinzufügen muß.

Die Kongruenz irgend welcher zweier (aus Punkten zusammengesetzter) Figuren läßt sich darauf als eine Beziehung von der Art *definieren*, daß die durch homologe Punktepaare bestimmten Strecken kongruent sind.

Zum Studium der kongruenten Figuren führt *G. Veronese* schließlich ein Postulat über die inzidenten *Geradenpaare* (d.h. die *Winkel*) ein:

6) Wenn AB, AC und $A'B'$, $A'C'$ zwei Geradenpaare sind und die Strecken der Paare AB, $A'B'$; AC, $A'C'$; BC, $B'C'$ kongruent sind, so sind die beiden genannten Geradenpaare kongruent.

Und außerdem benutzt er das Postulat:

7) Wenn eine Seite eines Dreiecks unendlich klein wird, so wird die Differenz der beiden anderen Seiten auch unendlich klein.

Wenn bei diesem Postulatensystem und seiner Entwicklung manches etwas kompliziert erscheint, so hängt dies mit den beiden Forderungen zusammen, die der Verfasser sich gestellt hat, nämlich 1) die fundamentale Eigenschaft der Ebene (vgl. Nr. 3) nicht als gegeben anzunehmen und 2) den Begriff der Kongruenz und im be-

sonderen der Winkelkongruenz allein auf den der Streckenkongruenz zurückzuführen.

Die Bedeutung des letzten Postulats über die Stetigkeit der Ebene (die bei dem gewöhnlichen Verfahren aus der Stetigkeit der Geraden folgt und hier als Zusatz zu ihr erscheint) läßt sich klar machen, wenn man die Konstruktionen der Ebene ohne den Begriff der Winkelkongruenz zu entwickeln sucht, wie es *J. Mollerup* (Math. Ann. 58 (1904), p. 479) macht. Bei dem *Mollerup*schen Verfahren zeigt sich die Notwendigkeit, das Postulat aufzustellen, daß „man über einer gegebenen Geraden als Basis und auf einer Seite von ihr nur ein Dreieck konstruieren kann, dessen Seiten der Reihe nach denen eines gegebenen Dreiecks gleich sind“. Nun läßt sich in dem Veroneseschen System dieser Satz auf Grund des angegebenen Postulats über die Stetigkeit der Ebene beweisen[54]).

c. *D. Hilbert*[55]) hat, indem er die Postulate der Verknüpfung und der Anordnung (I, II der Nrn. **3** und **4**) von einander getrennt hält und daher die fundamentale Eigenschaft der Ebene bereits als gegeben annimmt (I der Nr. **3**), ein neues, sehr einfaches Postulatensystem aufgestellt, in dem sowohl die Begriffe der *Strecken-* wie die der *Winkelkongruenz* als primitiv auftreten.

Man betrachte die Strecken und die Winkel als unabhängig von ihrem Sinne (Nr. **4**) definiert, dann lassen sich die genannten Postulate wie folgt wiedergeben (wobei wir uns in der Numerierung an I und II in den Nummern **3** und **4** anschließen).

✓ III. Es ist eine *symmetrische* Beziehung zwischen den *Strecken* und den *Winkeln*, die mit den Namen *Kongruenz* bezeichnet wird, in folgender Weise gegeben:

1) Jede Strecke, und ebenso jeder Winkel, ist sich selbst kongruent.
2) Strecken, und ebenso Winkel, die einer (einem) dritten kongruent sind, sind sich selbst kongruent[56]).
3) Auf einer Geraden und auf einer Seite eines gegebenen Punktes A' kann man *eine* Strecke $A'B'$ bestimmen, die einer gegebenen Strecke AB kongruent ist:

$$A'B' = AB.$$

---

54) Vgl. auch *A. Guarducci* in *F. Enriques,* Questioni.

55) Grundlagen, p. 7.

56) Diese beiden ersten Sätze (die die mathematischen Logiker *reflexive* und *transitive* Sätze nennen) wie auch die symmetrische Eigenschaft (wenn $a = b$ ist, so ist $b = a$) bilden allgemein die formalen Eigenschaften jeder Beziehung, die sich als eine Gleichung betrachten läßt.

4) Wenn B ein Punkt der Strecke AC, B' ein Punkt der Strecke $A'C'$ ist, und wenn

$$AB = A'B', \quad BC = B'C'$$

ist, so ist auch

$$AC = A'C'.$$

5) Ist in einer Ebene ein von einem Punkte O' ausgehender Strahl a' gegeben, und wird ein durch die Gerade a' gebildeter Teil der Ebene ins Auge gefaßt, so kann man in ihm *einen* Strahl b' durch O' bestimmen, der mit a' einen Winkel bildet, der einem gegebenen Winkel ab kongruent ist:

$$\sphericalangle a'b' = \sphericalangle ab.$$

6) Wenn b ein Strahl des Winkels ac, b' ein Strahl des Winkels $a'c'$ ist und wenn

$$\sphericalangle ab = \sphericalangle a'b', \quad \sphericalangle bc = \sphericalangle b'c'$$

ist, so ist auch

$$\sphericalangle ac = \sphericalangle a'c'.$$

7) Wenn A, B, C; A', B', C' zwei nicht in gerader Linie liegende Punkttripel sind und wenn

$$AB = A'B', \quad AC = A'C'$$
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$$

ist, so ist auch

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$$

(und daher auch $BC = B'C'$).

Diese Postulate enthalten noch nicht das Archimedische Postulat, das also, sobald es nötig ist, ausdrücklich hinzugefügt werden muß. Sie bilden die Grundlage für die gewöhnlichen Dreieckskongruenzsätze, auf denen die ganze Theorie der Kongruenz beruht.

6. Über die Reduktion der in den vorhergehenden Nummern betrachteten fundamentalen Begriffe. Bevor wir weitergehen, müssen wir eine Gruppe von Arbeiten erwähnen, die aus der mathematisch-logischen Schule von *G. Peano*[57]) hervorgegangen ist und (unter Beiseitelassung jedes Interesses, das nicht rein logisch-formal ist) den Zweck verfolgt, die Zahl der in den vorhergehenden Nummern untersuchten fundamentalen Begriffe zu beschränken und die Untersuchung der Postulate so weit als möglich zu treiben, indem diese in ihre Elemente zerlegt werden.

---

57) Vgl. das Formulaire de mathématiques, Torino, seit 1904, mehrere Auflagen.

Vor allem übersetzte 1889 *G. Peano* (Principii) mit Hilfe der Symbole der damals zu einem vollkommenen System ausgebildeten mathematischen Logik die auf die Begriffe „Punkt", „Strecke" (oder „zwischen") und „ebene Fläche" sich beziehenden deskriptiven Postulate von *Pasch*, wobei er den Begriff der ebenen Fläche auf den der Strecke zurückführte (vgl. Nr. 5); später (Fondamenti) drückte er die Begriffe der Kongruenz durch die vorhergehenden und den Begriff der „Bewegung" aus und außerdem beschäftigte er sich damit (mit Hilfe verschiedener Interpretationen, vgl. die Einleitung), die Unabhängigkeit seiner Postulate zu beweisen.

M. Pieri [58]) hat die „Strecke" mit Hilfe der Begriffe „Punkt" und „Bewegung" definiert und zu diesem Zwecke ein Postulatensystem entwickelt.

M. Pieri [58]) und *A. Padoa* [59]) haben vorgeschlagen, den Begriff der Bewegung durch den Begriff „Paare äquidistanter Punkte" zu ersetzen, der sich wiederum (indem man eine Idee verfolgt, die in den ersten Euklidischen Sätzen zum Vorschein kommt und von *Veronese* entwickelt worden ist) auf den Fall von Paaren mit einem gemeinsamen Punkte zurückführen läßt.

G. Peano [60]) hat diese Entwicklungen zu den Definitionen der Geraden und der Ebene von *Leibniz* (Nr. 3) in Beziehung gesetzt (und andererseits zu seinen Postulaten für die Vektorentheorie).

Es ist jedoch zu bemerken, daß eine vollständige Formulierung der Postulate sich bis jetzt nur bei *Pieri* findet; diese Postulate sind aber, besonders weil die primitiven Begriffe der Anordnung unterdrückt werden sollten (d. h. die Linieneigenschaft der Geraden beiseite bleiben sollte), sehr kompliziert geworden und haben jede Übersichtlichkeit und anschauliche Gewißheit verloren; dieser Eigenschaft legt jedoch *Pieri* keinen Wert bei [61]).

In neuester Zeit hat *B. Levi* [62]) ein Postulatensystem nur auf Grund der Begriffe „Punkt" und „äquidistante Paare" entwickelt, aber die *Levi*schen Postulate definieren nicht nur die gewöhnliche (Euklidische und nicht-Euklidische) metrische Geometrie, sondern ein allgemeineres geometrisches System, von dem aus man mit Hilfe von Anordnungsbegriffen zur genannten metrischen Geometrie gelangt.

---

58) Torino Mem. (2) 49 (1899), p. 173.

59) Vgl. im besonderen Congrès des mathématiciens à Paris 1900, p. 353.

60) Torino Atti 38 (1903), p. 6.

61) Vgl. Fußnote 58.

62) Torino Mem. 1904, p. 283.

Neben diesen Arbeiten ist die Abhandlung von *B. Kagan*[63]) zu erwähnen, in der ein System von Definitionen und Postulaten aufgestellt wird, die auf Grund der fundamentalen Begriffe *Punkt*, *Bewegung* (Transformation der Punkte) und *Entfernung* (die den Bewegungen gegenüber als Invariante betrachtet wird) zur Charakterisierung der Euklidischen Geometrie geeignet sind. Die Entwicklung in dieser Abhandlung ist übersichtlich und die Postulate sind einfach genug; jedoch wird diese Einfachheit durch die Annahme erreicht, daß die Entfernung ohne weiteres durch eine Zahl dargestellt wird, und diese Annahme soll im besonderen die fundamentalen Begriffe der Anordnung ersetzen.

In einem anderen Sinne, jedoch noch im Anschluß an denselben leitenden Gedanken der mathematisch-logischen Schule, hat *O. Veblen* (Amer. math. soc. Trans. 5 (1904), p. 343) ein System von sehr einfachen Postulaten aufgestellt, in denen der „Punkt" und „aufeinanderfolgende, in gerader Linie befindliche Punkttripel" als primitive Begriffe erscheinen, und auf Grund dieser Postulate hat er auch die Kongruenz definieren wollen. Diese Definition gründet sich jedoch auf die konventionelle Wahl einer gewissen Polarität (vgl. unten Nr. **22**, **24**, die projektive Begründung der Metrik), und scheint daher nur die Einführung eines neuen primitiven Begriffes zu maskieren.

7. Stetigkeit und Archimedisches Postulat. Die Untersuchung der Stetigkeitsbegriffe hat in unseren Tagen im Zusammenhang mit der Entwicklung der infinitesimalen Betrachtungen eine große Ausdehnung erfahren (vgl. Abschn. VII). Aber die ersten Anfänge dieser Untersuchung kann man in einigen von den griechischen Geometern gepflegten Theorien feststellen: im besonderen in der Theorie der *Proportionen*, in der die mit dem Fall des inkommensurablen Verhältnisses zusammenhängenden Schwierigkeiten glücklich überwunden worden sind (*Euklid*, Elemente, Buch 5), und in der Anwendung des sogenannten *Exhaustionsverfahrens* (Elemente, Buch 10). Jedoch kommt in beiden Fällen nur das von *Stolz* so genannte *Archimedische Postulat*[64]) ins Spiel:

„Sind zwei Strecken gegeben, so gibt es immer ein Vielfaches der kleineren, das größer als die größere ist."

---

63) Deutsche M.-V. Jahresb. 11 (1902), p. 403.

64) Vgl. Innsbruck Ber. 12 (1882), p. 75, wieder abgedruckt Math. Ann. 22 (1883), p. 504. Der Name „Archimedisches Postulat" ist irreführend. *Stolz* erwähnt selbst (ebenda, p. 86), daß schon frühere Geometer, vermutlich bereits *Eudoxus*, diesen Grundsatz benutzten. Vgl. auch *H. G. Zeuthen*, Heidelberger Kongreß, p. 541.

Dieses Postulat verbirgt sich bei *Euklid* in der vierten Definition des fünften Buches:

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν;

Auf Deutsch:

Ein Verhältnis zueinander haben Größen, welche vervielfältigt einander übertreffen können.

Die Bedeutung des Archimedischen Postulats kann man, wenn man die Vorstellung ins Auge faßt, die wir heute von der Stetigkeit der Geraden haben, durch die Bemerkung dartun, daß man mit seiner Hilfe jeder Strecke eine rationale oder irrationale Zahl zuordnen kann. Denn auf Grund dieses Postulats kann man bei zwei Größen der betrachteten Art die Frage der Gleichheit oder Ungleichheit sofort entscheiden; man kann also mit diesen Größen rechnen, und das Verhältnis (*λόγος*) zweier dieser Größen ist dann, wenn eine der Größen als *Maßeinheit* gewählt wird, auf Grund der Euklidischen Theorie der Proportionen nichts anderes als eine Zahl, die Maßzahl einer derartigen Größe[65]). Und aus diesem Postulat folgt im besonderen auch, daß es für die in Betracht kommenden Entwicklungen ein aktual Unendlichkleines nicht gibt (vgl. weiter unten p. 37). Aber es folgt aus ihm umgekehrt noch nicht, daß jeder irrationalen Zahl eine Strecke entspricht.

Unser Stetigkeitsbegriff enthält, insofern er auch diesen umgekehrten Satz in sich schließt, eine positive Existenzaussage, die bei den Griechen noch nicht vorgekommen zu sein scheint; einige berühmte Sophismen, wie z. B. das von Achill und der Schildkröte, scheinen das zu beweisen. So viel von dieser Existenzaussage nötig war, erscheint implicite in den Euklidischen Elementen, wo die Grundtatsachen hinsichtlich des Schneidens von Geraden und Kreisen angenommen werden, und die auf diesen Tatsachen beruhenden Konstruktionen bilden für *Euklid* die einzige Art, die *Existenz* der Figuren zu beweisen[65]). Vielleicht gibt es im Euklidischen Texte nur eine einzige Ausnahme von dieser Regel, nämlich in dem Satze des fünften Buches, wo die Existenz einer vierten Proportionalen zu drei Größen vorausgesetzt wird, aber es handelt sich hier wohl um eine apokryphe Interpolation.

Für den modernen Standpunkt entsteht das Postulat der Stetigkeit der Geraden (und daher des Raumes), wie wir angedeutet haben,

65) Vgl. *O. Hölder,* Leipzig Ber. 53 (1901), p. 1.

65) Vgl. *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 47 (1896), p. 222.

bei der Aufgabe die Zahlen geometrisch darzustellen, die die Grundlage der analytischen Geometrie bildet. Mit der Formulierung dieses Postulats hat sich *C. Weierstraß* in seinen Vorlesungen beschäftigt; in anderer Weise ist das genannte Prinzip von *G. Cantor*[66]) und *R. Dedekind*[67]) formuliert worden.

Cantors Stetigkeitspostulat drückt sich geometrisch folgendermaßen aus:

1) Wenn es in einer geradlinigen Strecke OM zwei unbegrenzte Reihen von Strecken $OA, OB, OC, \dots, OA', OB', OC', \dots$ gibt, von denen die ersten wachsen und die zweiten abnehmen in der Weise, daß die Strecken $AA', BB', CC', \dots$ beständig abnehmen und schließlich jede gegebene Strecke unterschreiten,

so *existiert ein* Punkt X der Strecke OM von der Beschaffenheit, daß OX größer ist als alle Strecken der ersten Reihe und kleiner als alle Strecken der zweiten[68]).

Fügt man dieses Postulat dem Archimedischen Postulat hinzu, so kann man die Beziehung zwischen Strecken und Zahlen, die aus dem Messen der Strecken hervorgeht, umkehren und gelangt damit dazu, daß „jeder irrationalen Zahl eine Strecke entspricht, deren Maßzahl sie ist“. Daher kann man sagen: *Die Postulate von Archimedes und von Cantor entsprechen zusammen der cartesischen Darstellung der Punkte der Geraden.*

Zu dem Archimedischen Postulat kann anstelle des *Cantor*schen Stetigkeitspostulats auch ein Postulat der *Vollständigkeit* hinzutreten wie bei *D. Hilbert*[69]):

Der Raum ist eine Mannigfaltigkeit von Elementen (Punkten), die durch Hinzufügen anderer Elemente nicht so erweitert werden kann, daß auch in der neuen Mannigfaltigkeit das System der der Geometrie zu Grunde liegenden Postulate erfüllt ist.

Der geometrische Ausdruck der *Weierstraß*schen und *Dedekind*schen Formulierungen führt (im Gegensatze zu dem *Cantor*schen Stetigkeitspostulat) auf zwei Aussagen des Stetigkeitspostulats in *deskriptiver* Form:

2) Wenn es in einer Strecke OM eine unbegrenzte Reihe auf-

---

66) Math. Ann. 5 (1871), p. 128.

67) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872.

68) Zu diesem Stetigkeitspostulate von *G. Cantor* bemerkt *F. Klein,* daß man vom physikalischen Standpunkte aus schon die Existenz solcher Punkte, denen eine rationale Abszisse mit großem Nenner zukommt, als Postulat ausdrücklich einführen muß. Gutachten, p. 18.

69) Grundlagen, p. 16.

einanderfolgender Punkte $A, B, C, \ldots$ gibt, so *existiert* ein (*Grenz-*) Punkt von der Beschaffenheit, daß in jede Umgebung von ihm ein Punkt der Reihe fällt (*Weierstraß*).

2') Wenn die Strecke OM in zwei Klassen von Punkten geteilt ist in der Weise, daß, wenn O der ersten Klasse angehört und M der zweiten, jeder Punkt von OM *einer* der beiden Klassen angehört und irgend ein Punkt der ersten Klasse sich innerhalb der Strecke befindet, die von O mit jedem Punkte der zweiten Klasse gebildet wird,

so *existiert* ein Punkt X (von dem man dann zeigt, daß er der einzige ist) von der Beschaffenheit, daß alle Punkte innerhalb der Strecke OX der ersten Klasse angehören, während alle Punkte innerhalb XM der zweiten angehören (wobei die Möglichkeit, daß X mit O oder mit M zusammenfällt, eingeschlossen ist (*Dedekind*)).

Diese beiden Postulate sind einander unmittelbar äquivalent.

Wenn man zusammen mit ihnen die Postulate über die Kongruenz (III in Nr. 5) von Strecken auf der Geraden als gegeben annimmt, so kann man

a) das Archimedische Postulat beweisen[70]),

b) die Punkte der Geraden auf dem Zahlenkontinuum in umkehrbar eindeutiger Weise darstellen.

Also kann man sagen:

Sind die Postulate über die Streckenkongruenz (III. 1, 2, 3, 4 in Nr. 5) *gegeben, so ist das Postulat* 2 (*oder* 2') *dem Inbegriff der Stetigkeitspostulate von Cantor und Archimedes gleichwertig.*

Nun entsteht die Frage, „ob das Archimedische Postulat auch eine Folge der Postulate über die Streckenkongruenz und des oben formulierten *Cantor*schen Stetigkeitspostulats ist". Auf diese Frage hat *G. Veronese*[71]) eine negative Antwort gegeben und damit also bewiesen, daß das *Cantor*sche Stetigkeitspostulat mit der Annahme einer (in bezug auf eine gegebene Einheit) *aktual unendlich kleinen* Strecke verträglich ist (vgl. unten Abschn. VII, Nr. **40**).

Das geht am einfachsten aus folgender Betrachtung hervor[72]):

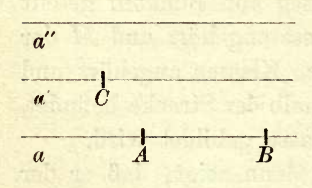
Es sei ein System unendlich vieler paralleler Geraden $a, a', a'', \ldots$, etwa von gleichem Abstand, gegeben, und man betrachte die Gesamtheit ihrer Punkte als ein System von Punkten, das in der Weise geordnet ist, daß jeder Punkt B *rechts* von einem Punkte A als auf

70) *Stolz*, Innsbruck Ber. 12 (1882), p. 75; vgl. Fußnote 64. Eine genaue Aufzählung der hierzu notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen gab erst *O. Hölder*, Leipzig Ber. 53 (1901), p. 1.

71) Rom Lincei Mem. (4) 6 (1890), p. 603; Grundzüge, Einleitung, § 105.

72) *Veronese*, Grundzüge, Einleitung, p. 184, Fußnote.

ihn folgend betrachtet wird und jeder Punkt C *höher* als A auch als auf A folgend betrachtet wird. In diesem System (das man auch nach der anderen Seite fortgesetzt denken könnte) ist die *Strecke* (die endliche Strecke AB oder die aus zwei Halbgeraden oder auch noch aus mehreren Geraden zusammengesetzte unendliche Strecke AC) definiert, und man kann auch in einer mit der Anschauung verträglichen Weise von kongruenten Strecken sprechen; somit sind alle Postulate über die Streckenkongruenz wie auch die der Anordnung erfüllt. Und es ist auch das Stetigkeitspostulat 1) (nicht das Stetigkeitspostulat 2) oder 2')) erfüllt, aber das Archimedische Postulat gilt für unser System nicht. In der Tat ist irgend ein Vielfaches der (endlichen) Strecke AB immer kleiner als die aus zwei Halbgeraden zusammengesetzte (unendliche) Strecke AC.



Man schließt also daraus, daß *das Archimedische Postulat von dem Cantorschen Stetigkeitspostulat unabhängig ist.*

Den Unterschied zwischen dem *Cantor-Dedekind*schen und dem *Veronese*schen Stetigkeitsbegriff kann man auch folgendermaßen formulieren[74].

Werden alle Punkte einer Strecke OM gemäß 2') in zwei Klassen M' und M'' geteilt, so sind folgende vier Fälle möglich: 1) M' hat einen letzten Punkt A', und M'' einen ersten A'' (es liegt ein *Sprung* vor); 2) M' hat einen letzten Punkt A', M'' keinen ersten; 3) M' hat keinen letzten Punkt, M'' einen ersten A''; 4) weder hat M' einen letzten, noch M'' einen ersten Punkt (es liegt eine *Lücke* vor). Die Dedekindsche Stetigkeit schließt nun sowohl Lücken wie Sprünge aus. Die *Veronese*sche schließt Sprünge immer aus, Lücken aber nur unter gewissen Bedingungen. Bei dem *Veronese*schen Kontinuum treten nämlich Lücken wirklich auf, und zwar immer dann, wenn die in 1) genannten Strecken AA', BB', CC', ... *nicht* jede gegebene Strecke des Systems unterschreiten, was möglich ist.

Eine weitere Frage ist, „ob das Archimedische Postulat mit Hilfe aller Postulate des Einanderangehörens, der Anordnung und der Kongruenz (I., II., III. in den Nrn. **3**, **4**, **5**) bewiesen werden kann".

Diese Frage ist zu verneinen (vgl. Abschn. VII). Doch wollen wir inzwischen (wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird) *an dem Stetigkeitspostulat in der Weierstraßschen oder der Dedekindschen Form festhalten,* das wir aber (entgegen der von den genannten Autoren

74) *Schoenflies,* Art. I A 5, Nr. **18**, **19**, und Deutsche M.-V. Jahresb. 15 (1906), p. 26.

festgehaltenen Darstellungsweise) auf rein deskriptive (vgl. Fußnote 5) und im besonderen auf die durch die Postulatengruppe Nr. 5 III. bestimmten Begriffe beziehen.

8. Das Parallelenpostulat. Die fünfte Forderung der Euklidischen Elemente[75]) behauptet:

„Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.“

Auf Deutsch:

„Zwei Gerade einer Ebene, die mit einer dritten, und auf derselben Seite von dieser, Winkel bilden, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist, treffen sich, hinreichend verlängert.“

Dieses Postulat bildet die Grundlage der Parallelentheorie, von der die ersten 28 Sätze des *Euklid* unabhängig sind; es kommt der Behauptung gleich, daß durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden nur eine Parallele zu dieser gezogen werden kann.

Schon im Altertum wurden zahlreiche Versuche gemacht, das genannte Postulat zu beseitigen, indem man es auf Grund der vorhergehenden Sätze logisch zu beweisen suchte[76]). Es seien *Claudius Ptolemäus* (87—165 n. C.), *Proklus* (410—485) und der Araber *Nasir-Eddin* (1201—1274) genannt. Bemerkenswert ist, daß in den Entwicklungen des zuletzt Genannten das Parallelenpostulat implizite angenommen wird, indem *Nasir-Eddin* von einem Dreiecke ausgeht, dessen Winkelsumme gleich zwei Rechten ist.

John Wallis[77]) (1616—1703) hat in die Parallelentheorie einen neuen Gesichtspunkt hineingebracht, indem er bemerkte, daß das Euklidische Postulat durch ein anderes ersetzt werden kann, nämlich durch dasjenige, das behauptet, daß zu einem gegebenen Dreiecke ein ähnliches von beliebiger Größe existiert. In der Tat braucht man, um die dem Euklidischen Postulat entgegenstehenden Annahmen auszuschließen, nur die Existenz zweier ähnlicher und ungleicher Dreiecke anzunehmen. *L. N. Carnot*[78]) und *P. S. Laplace*[79]) schlugen vor, an Stelle des Euklidischen Postulats eben diese Annahme zu machen.

---

75) Kritische Ausgabe von *J. L. Heiberg,* 1, Leipzig 1883.

76) Die Geschichte dieser Untersuchungen bis auf *N. Lobatschefskij* und *J. Bolyai* findet man in dem Werke von *P. Stäckel* und *Fr. Engel,* Die Theorie der Parallellinien von *Euklid* bis auf *Gauß,* Leipzig 1895. Vgl. auch den Artikel von *R. Bonola* in *F. Enriques,* Questioni.

77) De postulato quinto et definitione quinta lib. 6. Euclidis disceptatio geometrica. Operum mathematicorum volumen alterum, Oxford 1693, p. 665.

Giordano Vitale da Bitonto[80]) (1633—1711), der (wie mehrere Vorgänger) parallele Gerade als „Gerade gleichen Abstands" betrachtete, hat bewiesen, daß „wenn drei Punkte einer Geraden von einer anderen Geraden gleichen Abstand haben, die beiden Geraden durchweg gleichen Abstand von einander haben".

Der Pater *Girolamo Saccheri* (1667—1733), der durch *E. Beltrami*[81]) in weiteren Kreisen neu bekannt geworden ist, hat in seinem Werke „Euclides ab omni naevo vindicatus . . ."[82]) eine tiefe Kritik des Parallelenpostulats verfaßt, indem er sich einerseits an *Nasir-Eddin*, andererseits an *Giordano Vitale* anschloß. Er geht von folgendem Gesichtspunkte aus: Man nehme in einer Ebene eine Strecke AB an, errichte in ihren Endpunkten nach einer Seite hin die Normalen zu der Strecke und trage auf diesen zwei gleiche Strecken AC und BD ab; in dem Vierecke $ABCD$ sind nach der Konstruktion zwei Winkel Rechte, und von den beiden andern Winkeln beweist man, daß sie gleich sind; hinsichtlich ihrer Größe kann man drei Annahmen machen, nämlich daß sie *spitze*, *rechte* oder *stumpfe Winkel* sind. *Saccheri* beweist, daß, wenn in einem Falle eine der drei Annahmen erfüllt ist, sie immer erfüllt ist. Die zweite Annahme ist dem Euklidischen Postulat gleichwertig, während die erste und die dritte auf die nicht-Euklidischen Geometrien von *Bolyai-Lobatschefskij* und *Riemann* führen würden. Aber *Saccheri* will das Ungereimte dieser beiden Annahmen nachweisen; er schließt den Fall des stumpfen Winkels aus, indem er sich auf die Unendlichkeit der Geraden stützt, und glaubt etwas Ungereimtes in dem asymptotischen Verhalten der Parallellinien zu finden, zu dem man unter der Annahme des spitzen Winkels gelangt.

Johann Heinrich Lambert (1728—1777) hat sich in seiner „Theorie der Parallellinien"[83]) auf einen Standpunkt gestellt, der dem des *Saccheri* sehr ähnlich ist. Insbesondere bemerkt *Lambert*, daß bei Nichtannahme des Euklidischen Parallelenpostulats, da dann die Betrachtung ähnlicher Figuren wegfällt, eine Art *natürlicher* oder *absoluter*

---

78) Géométrie de position, Paris 1803, p. 481 Fußnote.

79) Oeuvres 6, p. 472.

80) Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati, Roma 1680, zweite Ausgabe 1686; vgl. *R. Bonola*, Boll. di bibliogr. e stor. delle mat. 1905.

81) Un prescursore italiano di Legendre et di Lobatschewsky. Rom Linc. Rend. (4) 5^1 (1889), p. 441.

82) Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Mediolani 1733.

83) Aufgesetzt 1766, veröffentlicht 1786 im Magazin für die reine und angewandte Mathematik.

Maßeinheit existieren muß, und er findet, daß der Inhalt eines Dreiecks der Differenz zwischen der Winkelsumme und zwei rechten Winkeln gleich ist; endlich bemerkt er (hierin ein Vorläufer von *B. Riemann*), daß die Annahme des stumpfen Winkels (vgl. oben) in der Geometrie auf der Kugel erfüllt wird und daß die Annahme des spitzen Winkels auf einer Kugel von imaginärem Radius erfüllt sein würde.

Die *Saccheri*schen und *Lambert*schen Ergebnisse umfassen den wesentlichen Teil dessen, was später und unabhängig davon von den französischen Geometern und insbesondere von *Adrien Marie Legendre*[84]) wiedergefunden wurde, daß nämlich „das Euklidische Postulat der Annahme gleichwertig ist, daß die Summe der Winkel eines (besondern) Dreiecks gleich zwei Rechten ist, und daß diese Annahme dann für jedes Dreieck erfüllt ist" (wenigstens dann, wenn man alle Postulate I, II, III der Nr. **3**—**5** und das Archimedische Postulat als gegeben annimmt; vgl. Nr. **44**).

Gauß scheint der erste gewesen zu sein, der die Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats und daher die Möglichkeit einer allgemeinen Geometrie, die davon absieht, erfaßt hat, und er hat selbst deren Grundlagen aufgestellt[85]).

In Beziehung zu *Gauß* stehen *F. K. Schweikart*[86]) und *F. Ad. Taurinus*[87]), die sich zwischen 1816 und 1826 mit dieser Frage beschäftigt haben. Es ist bemerkenswert, daß *Schweikart* in Briefen und persönlichen Mitteilungen die Überzeugung klar ausgesprochen hat, daß ein geometrisches System möglich ist, in dem das Parallelenpostulat nicht gilt. *Taurinus* hat bei der Entwickelung eines Gedankens, dessen Keim sich bei *Lambert* findet, die Formeln der nicht-Euklidischen Trigonometrie erhalten und bemerkt, daß diese ein sich nicht widersprechendes System bilden; gleichwohl hält er, irregeführt durch eine sophistische Interpretation der Konstanten (der Krümmung), die in den genannten Formeln vorkommt, die Euklidische Geometrie für allein im physischen Raume gültig.

Nikolai Lobatschefskij[88]) war der erste, der, in seinen seit 1829

84) Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle, Paris Mém. 12 (1833), p. 365.

85) Jedenfalls von 1816 an; vgl. Werke 8, p. 175 und 182.

86) *Stäckel* und *Engel*, Parallelentheorie, p. 243; *Gauß*, Werke 8, p. 178.

87) Theorie der Parallellinien, Köln 1825; Geometriae prima elementa, Coloniae Agrippinae, 1826. Vgl. *Stäckel* und *Engel*, Parallellinien, p. 246, und *Gauß*, Werke 8, p. 186.

88) Vgl. *Fr. Engel*, Nik. Iwan. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhand-

veröffentlichten Abhandlungen, öffentlich die Möglichkeit einer Geometrie, die von dem Euklidischen Postulat absieht, aussprach, und wenig später (1832) veröffentlichte *Johann Bolyai* eine in demselben Sinne gehaltene Schrift[89]). Die von diesen Geometern erhaltenen übereinstimmenden Resultate wurden von *Gauß* in seinem Briefwechsel mit *Bessel*, *W. Bolyai*, *Olbers* und *Schumacher* bestätigt. Sie bilden ein Lehrgebäude, das mit den Namen *imaginäre Geometrie, absolute Geometrie, nicht-Euklidische Geometrie, Pangeometrie, allgemeine Geometrie* bezeichnet wird. Von den ersten beiden Namen deutet der eine die Meinung, daß die neuen Theorien physisch unsinnig seien, der andere den Glauben an die absolute Geltung der geometrischen Postulate abgesehen vom Parallelenpostulate an; der von *Gauß* gebrauchte Name „nicht-Euklidische Geometrie“ wird passend im eigentlichen Sinne angewandt, wenn man das geometrische System betrachtet, das aus der *Negation* des Euklidischen Postulats hervorgeht, aber er wird oft im uneigentlichen Sinne gebraucht, um die *allgemeine Geometrie* des Raumes, die den Euklidischen und den nicht-Euklidischen Fall in sich begreift, zu bezeichnen. Wir werden den Namen nicht-Euklidische Geometrie nur in seinem eigentlichen Sinne gebrauchen, indem wir für das umfassendere geometrische System den Namen *allgemeine Geometrie* annehmen.

Die *Bolyai*schen und *Lobatschefskij*schen Resultate, auf die oben hingedeutet wurde, erschöpfen jedoch, wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, nicht den ganzen Bereich der nicht-Euklidischen Geometrie. Sie beruhen immer auf der Annahme, daß die Gerade eine offene Linie ist und also eine unendliche Länge hat. Man kann aber voraussetzen, daß die *Gerade* eine geschlossene Linie von *endlicher Länge* ist, und kommt dann zu einem anderen nicht-Euklidischen geometrischen Systeme. Dieser Fall wurde erst von *B. Riemann* klar erfaßt (vgl. Nr. **19**).

Wir haben nun folgende Grundlage der allgemeinen Parallelentheorie:

---

lungen, 1. Teil: Die Übersetzung, 2. Teil: Anmerkungen, Lobatschefskijs Leben und Schriften, Register, Leipzig 1898 und 1899.

89) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens usw. in *W. Bolyais* Tentamen 1, für sich neu hrsgeg. Leipzig 1903. Vgl. die Publikationen von *P. Stäckel:* Gauß, die beiden Bolyai und die nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. 49 (1897), p. 149 (zusammen mit *F. Engel*); Die Entdeckung der nicht-Euklidischen Geometrie durch Joh. Bolyai, Ungar. Ber. 17 (1901), p. 1; Aus Joh. Bolyais Nachlaß, Untersuchungen aus der absoluten Geometrie, Ungar. Ber. 18. (1902), p. 280. *Joh. Bolyai* hatte die Sache schon im Jahre 1823.

Man nehme die fundamentalen Sätze über die Gerade und die Ebene, über die Kongruenz und die Bewegung an, die in den Postulatengruppen I, II, III der Nrn. **3**, **4**, **5** (unter Hinzufügung der Stetigkeit) enthalten sind, modifiziere jedoch die Postulate II in der Weise, daß die Möglichkeit, daß die Gerade nicht eine offene, sondern eine geschlossene Linie ist, vorbehalten bleibt.

Man betrachte eine Gerade a und einen außerhalb gelegenen Punkt A und konstruiere alle Geraden, die von A aus die Punkte von a projizieren; die *Grenzgeraden* dieses Büschels heißen, sofern sie existieren, die durch A zu a gezogenen *Parallelen*.

Bei der *Euklidischen* Annahme gibt es durch A *eine Parallele* zu a; aber noch zwei andere Annahmen sind mit den bereits angenommenen Postulaten verträglich: durch A gehen *zwei Parallele* zu a (die *Bolyai-Lobatschefskij*sche Annahme); durch A geht *keine Parallele* zu a (die *Riemann*sche Annahme)

Wenn man in bezug auf einen Punkt A und eine Gerade a eine der drei Annahmen macht, so gilt dieselbe Annahme auch für irgend eine andere Gerade und irgend einen anderen außerhalb gelegenen Punkt. In jedem Falle kommt der Charakter des Parallelismus einer durch A gehenden Geraden b zu einer Geraden a der Geraden b auch für jeden anderen ihrer Punkte zu, und die Beziehung des Parallelismus zweier Geraden ist immer gegenseitig.

Die drei geometrischen Systeme, die aus den drei Annahmen von *Bolyai-Lobatschefskij*, *Euklid* und *Riemann* hervorgehen, bezeichnet man nach *F. Klein* durch die Namen *hyperbolisch*, *parabolisch*, *elliptisch*; siehe unten (Abschnitt III, Nr. **23**) unter projektiver Geometrie. Sie können (wie bereits angedeutet worden ist) dadurch charakterisiert werden, daß man den Wert der Winkelsumme irgend eines geradlinigen Dreiecks ins Auge faßt, der in den drei Fällen der Reihe nach kleiner als zwei rechte Winkel, gleich zwei rechten Winkeln oder größer als zwei rechte Winkel ist (vgl. Nr. **44**).

Anstelle des Pythagoräischen Satzes der Euklidischen Geometrie tritt eine allgemeinere Relation, die für die Formeln der elliptischen und der hyperbolischen Trigonometrie die Grundlage bildet; die Euklidische oder parabolische Trigonometrie ist in dieser allgemeinen Trigonometrie als Grenzfall enthalten[90]). Für unendlich kleine Dreiecke

---

90) Die Formeln der hyperbolischen Trigonometrie sind von *J. Bolyai* und *N. Lobatschefskij* gegeben worden; die des elliptischen Falles sind die Formeln der sphärischen Trigonometrie (*J. H. Lambert*), und man geht von den zweiten zu den ersten über, indem man den Radius der Kugel imaginär nimmt.

sind die Formeln der allgemeinen Trigonometrie dieselben wie die der Euklidischen Trigonometrie[91]).

9. Weitere Ausführungen zur Parallelentheorie. Gemäß den Erörterungen der Einleitung ziehen wir jetzt zwei Fragen in Erwägung:

a) wie man dazu gelangt, die logische Möglichkeit der nicht-Euklidischen Geometrie und also die Unabhängigkeit des Euklidischen Postulats von den vorhergehenden zu beweisen;

b) unter welchen einfachen, dem Euklidischen Postulate gleichwertigen Formen die Annahme, die der gewöhnlichen Parallelentheorie zugrunde liegt, ausgesprochen werden kann.

ad a) *N. Lobatschefskij* hat gezeigt, daß die Beziehungen der hyperbolischen Trigonometrie durch ein in sich widerspruchfreies System analytischer Formeln wiedergegeben werden, und daraus den ersten Beweis der logischen Möglichkeit der nicht-Euklidischen Geometrie hergeleitet.

Darauf kam man (*Riemann, Beltrami*) auf den Gedanken, eine wirkliche Interpretation der nicht-Euklidischen Geometrie in der Geometrie auf den Flächen konstanter Krümmung (vgl. Nr. **17**) zu suchen, und daraus leitete man einen neuen Beweis der logischen Möglichkeit der nicht-Euklidischen Systeme der Ebene her. Leider repräsentiert eine solche Fläche immer nur ein Stück der Ebene.

Noch überzeugender ist die Interpretation, welche die nicht-Euklidische Geometrie nach *F. Klein* in der zu einem beliebigen Kegelschnitt gehörigen *Cayley*schen Maßbestimmung findet (weil nämlich dabei die *ganze* nicht-Euklidische Ebene zur Veranschaulichung kommt); hierüber wird weiter unten, unter projektiver Geometrie (Nr. **23**), näheres anzugeben sein.

Durch die projektive Interpretation wird zugleich ein feiner Punkt klargestellt. Ursprünglich nahm man (wie es schon *Lambert* angedeutet hatte) zum Muster der elliptischen ebenen Geometrie die Geometrie auf der Kugel, und da auf dieser zwei größte (Gerade darstellende) Kreise sich immer in zwei Punkten schneiden, so betrach-

---

91) Diese Bemerkung hat als Grundlage für einen Integrationsprozeß gedient, durch den man die Formeln der allgemeinen Trigonometrie erhält, indem man von denjenigen für unendlich kleine Dreiecke ausgeht. Vgl. *C. Flye St.-Marie,* Études analytiques sur la théorie des parallèles, Paris 1871; *J. De La Vallée Poussin,* Mathesis (2) 5 (1895), Suppl. 5, p. 6, und Brux. Soc. sc. (2) 19 B (1895), p. 17, und *Gauß*, Werke 8, p. 255. — Hinsichtlich der Möglichkeit, die hyperbolische Geometrie zu begründen, ohne von der Stetigkeit Gebrauch zu machen, vgl. *Hilbert,* Grundlagen, Anhang III, p. 107.

tete man diese Eigenschaft als der elliptischen Geometrie der Ebene zukommend, in der darum das Postulat „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade" eine Ausnahme erleiden müßte. Diese Anschauungsweise wurde von *F. Klein* berichtigt, der bemerkte, daß, wenn man die nicht-Euklidische Geometrie der Ebene in der Geometrie auf einer Fläche wiederspiegelt, zunächst nur die Geometrie eines einfach zusammenhängenden *Gebietes* der Ebene mit der Geometrie eines entsprechenden Gebietes der Fläche übereinstimmt und es nicht ohne weiteres erlaubt ist, das, was man von der Fläche *als Ganzes* betrachtet aussagt, auf die Ebene anzuwenden (vgl. Nr. **17** und **36**). Die Geometrie der vollständigen elliptischen Ebene spiegelt sich nicht in der Geometrie auf der Kugel, sondern in der gewöhnlichen Geometrie des *Strahlenbündels* wieder; das will sagen: wenn man die „Punkte" der Ebene durch die „Geraden" des Bündels und die Ausdrücke „Gerade" und „Entfernung" durch die Ausdrücke „Büschel" und „Winkel" ersetzt, so gehen alle Sätze der (elliptischen) Ebene, in denen die elliptische Geometrie gilt, in die gewöhnlichen Sätze der Geometrie des Bündels über, und umgekehrt. Dadurch wird auch klar, daß die elliptische Ebene (ebenso wie die projektive Ebene) eine sogenannte Doppelfläche (oder einseitige Fläche) ist, d. h. durch eine Gerade nicht in zwei Stücke zerlegt wird, denn auch das Strahlenbündel wird durch eine Ebene nicht in zwei Stücke zerlegt (vgl. Nr. **24** b). Man erkennt auf diese Weise die vollkommene Verträglichkeit der die ebene Geometrie betreffenden elliptischen Annahme mit den Postulaten der Geraden und der Kongruenz.

Immerhin genügen die oben angeführten Interpretationen noch nicht, um die Unabhängigkeit des Euklidischen Postulats von den voranstehenden Postulaten der Geometrie des *Raumes* darzutun, weil sie die Möglichkeit nicht ausschließen, daß das genannte Postulat (wie der Satz von den homologen Dreiecken) durch *Konstruktionen im Raume*, indem man aus der Ebene herausgeht, bewiesen werden könnte. Es muß also der Beweis der logischen Möglichkeit der nicht-Euklidischen Geometrie im Raume gegeben werden. Diesen Beweis entnimmt man der Theorie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung (Nr. **19**), oder auch wieder im Sinne *Kleins* der im Raume auf eine Fläche zweiten Grades zu gründenden *Cayley*schen Maßbestimmung[92]). Jeder dieser Wege bietet den Beweis der

---

92) Hinsichtlich der Unabhängigkeit des Parallelenpostulats von den anderen in den Euklidischen „Elementen" vorher gemachten Annahmen vergleiche man die kritische Erörterung dieser Annahmen durch *F. Lindemann* bei *A. Clebsch* und *F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie, 2^1, Leipzig 1891, Abschn. 3.

Unabhängigkeit des Euklidischen Postulats von den Postulaten, die sich auf das Einanderangehören von Geraden und Ebenen, auf die Kongruenz und die Stetigkeit beziehen, dar, da man die *logische Existenz* der dabei auftretenden Entwicklungen entweder durch die zugehörigen einander nicht widersprechenden analytischen Formeln oder dadurch dartun kann, daß man die Möglichkeit der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie (auf Grund der Anschauung) als gegeben annimmt (vgl. die Einleitung).

In philosophischer Hinsicht entsteht darauf die Frage, ob die nicht-Euklidische Geometrie außer einer *logischen Möglichkeit* auch eine *physische Möglichkeit* bilden kann. In dieser Hinsicht ist zu bemerken, daß nur die Erfahrung Richter sein kann; aber die zur Entscheidung der Frage herbeigezogenen Messungen haben notwendigerweise nur einen approximativen Wert. Sie könnten also die Geltung der nicht-Euklidischen Geometrie beweisen, wenn das Maß der Winkelsumme eines Dreiecks einen durch die Wahrnehmung einzuschätzenden Wert unter oder über zwei Rechten ergäbe. Umgekehrt aber wird es (bei dem approximativen Charakter aller Messungen) niemals möglich sein, die physische Geltung der Euklidischen Annahme exakt zu beweisen. Wirkliche Winkelmessungen an geodätischen (*Gauß*) oder astronomischen (*Lobatschefskij*) Dreiecken haben nie eine Abweichung im bestimmten Sinne von 180^0 erkennen lassen[93]).

ad b) Wir zählen nun die hauptsächlichen Annahmen auf, die dem Euklidischen Postulat gleichwertig sind, wenn man alle Annahmen über die Verknüpfung (I in Nr. **3**), die Anordnung (II in Nr. **4**), die Kongruenz (III in Nr. **5**) und die Stetigkeit macht, aber die Postulate II in Nr. **4** in der Weise modifiziert nimmt, daß sie nicht die Unendlichkeit der Geraden einschließen:

1) Existenz einer einzigen Parallelen durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden.

2) Existenz zweier Geraden einer Ebene, die sich nicht schneiden und überall gleich weit von einander entfernt sind.

3) Existenz zweier ähnlicher und nicht kongruenter Dreiecke (*Wallis*, *Carnot*, *Laplace*).

4) Existenz eines Dreiecks, in dem die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist (*Legendre*).

5) Existenz von Dreiecken, deren Fläche beliebig groß ist (*Gauß*, Brief an *W. Bolyai* vom 16. Dez. 1799, Werke 8, p. 159; vgl. Nr. **10**).

---

93) Vgl. *F. Zöllner*, Wissenschaftliche Abhandlungen 1, p. 229.

Nimmt man die Unendlichkeit der Geraden an, so kann das Euklidische Postulat durch die folgenden ersetzt werden:

Durch einen in der Ebene eines spitzen Winkels und innerhalb desselben gelegenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, die die beiden Schenkel des Winkels trifft (*Legendre*).

Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte liegen immer auf einem Kreise (*J. Bolyai*).

Endlich läßt sich die Euklidische Geometrie im Hinblick auf die Mechanik charakterisieren:

Das Euklidische Postulat läßt sich auf das mechanische Postulat des Archimedes zurückführen, wonach „wenn zwei gleiche und gleichgerichtete Kräfte an den Enden einer Strecke AB normal angebracht sind, die (durch den Mittelpunkt von AB gehende) Resultante der Summe der Komponenten gleich ist“. In den nicht-Euklidischen Fällen würde die Resultante eine andere Funktion der Komponenten sein[94]). Über die Beziehungen des Parallelenpostulats zu dem Archimedischen Postulat vgl. Nr. **44**.

10. Flächeninhalt und Rauminhalt[95]). *Euklid* behandelt die Flächen- und Rauminhalte[96]) als *Größen* sui generis, wobei er als Attribute des allgemeinen Größenbegriffs folgende ganz allgemein gehaltene *Axiome* zu Grunde legt[97]):

1) *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.*

2) *Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.*

3) *Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.*

4) *Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

5) *Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν* [*ἐστιν*].

Auf Deutsch:

1) Was demselben (dritten) gleich ist, ist einander gleich.

2) Und wenn zu Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, so sind die Summen gleich.

---

94) *A. Genocchi*, Torino Atti 12 (1877), p. 489; Torino Mem. 29 (1877); vgl. *J. d'Andrade*, Leçons de mécanique physique, Paris 1898, notes, p. 355 ff. Die ersten Arbeiten über die Mechanik bei der nicht-Euklidischen Annahme finden sich bei *M. de Tilly*, Études de mécanique abstraite, Brux. Mémoires couronnés 21 (1870); vgl. Bordeaux Mémoires (2) 3 (1879), p. 1, besonders Fußn. zu Nr. 21; ferner *E. Schering*, Gött. Nachr. 1870, p. 311, und 1873, p. 149; *R. Lipschitz*, J. f. Math. 74 (1872), p. 116; *W. Killing*, J. f. Math. 98 (1884), besonders p. 24 f.

95) Es sei hier auf die ausführliche Erörterung dieses Gegenstandes bei *Enriques*, Questioni (Artikel von *U. Amaldi*), sowie bei *Hölder* (Fußnote 65) hingewiesen.

96) Elemente, Buch 1, 11, 12.

97) Elemente, Buch 1.

3) Und wenn von Gleichem Gleiches hinweggenommen wird, so sind die Reste gleich.

4) Und was sich zur Deckung bringen läßt, ist einander gleich.

5) Und das Ganze ist größer als sein Teil.

A. Wir besprechen zunächst den Fall *ebener Figuren*.

Die ersten vier dieser Axiome stellen zwei wesentlich verschiedene Kriterien auf, um die Flächengleichheit ebener Figuren zu erkennen: a) ihre Zerlegbarkeit in kongruente Teile (Flächengleichheit durch Summation — 1, 2, 4), b) die Möglichkeit, zwei Figuren als Differenzen kongruenter Figuren aufzufassen (Flächengleichheit durch Subtraktion — 3, 4). Von diesen beiden Kriterien bringt *Euklid* in der Theorie der Flächengleichheit der ebenen Polygone bald den einen bald den anderen zur Anwendung, während er auf Grund des fünften Axioms imstande ist, die *umgekehrten* Theoreme zu beweisen, in denen man aus der Flächengleichheit gewisser Polygone auf die Gleichheit von Strecken schließt.

Diesen Gesichtspunkten a) und b) fügt *Euklid* einen anderen hinzu, der sich auf die stillschweigende Voraussetzung gründet, daß, „wenn zwei Flächen (oder Volumina) ungleich sind, eine Flächengröße (oder ein Volumen) existiert, die, zu der einen von beiden (der kleineren) addiert, eine Summe gleich der anderen (der größeren) ergibt", und diese Voraussetzung liegt dem *Exhaustionsverfahren* zugrunde, in dem die Gleichheit von Flächen- oder Rauminhalten indirekt bewiesen wird.

In den von *Euklid* zur Erkennung der Gleichheit polygonaler Flächen angewandten Kriterien a) und b) ist etwas Überflüssiges enthalten, denn *P. Gervien*[98]) hat bewiesen, daß „zwei flächengleiche ebene (oder sphärische) Polygone immer durch Summation flächengleich sind".

W. Bolyai[99]) hatte dieselbe Bemerkung gemacht und wollte für irgendwelche Flächen den folgenden Satz beweisen:

Die sich nicht deckenden Teile zweier sich zum Teil deckender kongruenter Figuren lassen sich in kongruente Teile zerlegen;

aus dem sich der allgemeinere Satz ergeben würde:

Wenn man von zwei kongruenten Flächen kongruente Teile wegnimmt, so lassen sich die übrig bleibenden Stücke in kongruente Teile zerlegen;

aber sein Beweis des ersten Satzes ist leider ungenügend.

---

98) Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke. Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke, J. f. Math. 10 (1833), p. 228, 235.

99) Tentamen 1, § 35.

J. M. C. Duhamel[100]), der die uns beschäftigende Frage in kritischer Absicht studierte, hat zum ersten Male die logische Notwendigkeit dargetan, für jede Klasse geometrischer Größen die Begriffe *Summe, Teil, größer* und *kleiner* zu definieren. Er ist auf diese Weise zur Angabe eines neuen Weges für die Entwicklung der Theorie der Flächengleichheit geführt worden, wobei dieser Begriff nicht mehr als eine nicht definierte, den Euklidischen Axiomen 1) ... 5) genügende Beziehung erscheint. Die Flächengleichheit wird vielmehr ausdrücklich als Gleichheit durch Summation definiert, und diese Definition tritt an Stelle der Axiome 1), 2), 4). Duhamel entwickelt einige Gleichheitssätze, indem er die Benutzung der Subtraktion und daher des Axioms 3) systematisch zu vermeiden sucht; im besonderen hat er durch ein Verfahren, in dem das Archimedische Postulat[101]) auftritt, bewiesen, „daß zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind".

Diese Entwicklungen wurden von *A. Faifofer*[102]) zu einer Theorie vervollständigt, die sich ohne ein neues Axiom auf Definitionen aufbaut. Aber *A. De Zolt*[103]) hat hervorgehoben, daß bei dem Beweise der umgekehrten Sätze, in denen von der Flächengleichheit auf die Gleichheit von Strecken geschlossen wird, immer das oben erwähnte fünfte Axiom auftritt, das, wenn man die Flächengleichheit durch Summation definiert, sich in folgendem *Prinzipe* ausspricht:

„Wenn ein Polygon in irgend einer Weise in Teile zerlegt wird, so ist es, wenn man einen dieser Teile wegläßt, nicht möglich, die übrigen so anzuordnen, daß sie das Polygon vollständig bedecken."

Dieses Prinzip bildet, wenn man es als unmittelbar einleuchtend annimmt, ein Postulat, und *R. De Paolis* hat es auch in seinen Elementen ausdrücklich als solches ausgesprochen[104]). Die italienischen Geometer pflegen es ausdrücklich das *De Zolt*sche *Postulat* zu nennen.

Daß dieses Postulat überflüssig ist, d. h. daß dieser Satz aus der Gesamtheit aller in den vorstehenden Nummern untersuchten Annahmen folgt, ist leicht zu erkennen, wenn man die allgemeine moderne Auffassung des Flächenmaßes als der Grenze einer Summe

100) Des méthodes dans les sciences de raisonnement, Paris 1865—68, 2, im besondern die Kapitel 1 und 5 und die Note über die Flächengleichheit, p. 445.

101) Die Benutzung dieses Axioms ist nötig, wie *D. Hilbert* hervorgehoben hat (vgl. Nr. 43).

102) Elementi di geometria.

103) Principii della eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni) preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica, Milano 1881; Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici, Milano 1883.

104) Elementi di geometria, Torino 1884, p. 281.

von Quadraten zu Hilfe nimmt; in der Tat wird dann das *De Zolt*sche Prinzip zu einer Folge des fundamentalen Satzes über die Existenz des Integrals, wie dies *W. Killing*[105]) (1885) hervorgehoben hat.

Aber ein direkter und elementarer Beweis dieses Prinzips ist das erste Mal von *F. Schur*[106]) (1892) geliefert worden, dann auf verschiedene Weise von *O. Rausenberger*[107]) (1893), von *G. Veronese*[108]) (1894/95), von *L. Gérard*[109]) (1895) und von *G. Lazzeri*[110]) (1895).

Also ergibt sich als elementar bewiesen:

Die Theorie der Gleichheit der ebenen Polygone kann entwickelt werden, wenn man die Gleichheit als Zerlegbarkeit in kongruente Teile definiert, ohne daß den Postulaten des Einanderangehörens, der Kongruenz und der Anordnung (das Stetigkeits- oder das Archimedische Postulat inbegriffen) *ein anderes hinzuzufügen ist.*

Gehen wir nun zu den *Flächen von krummliniger Begrenzung* über.

Hier ist das für den Vergleich der Polygone angenommene elementare Kriterium nicht anwendbar, denn ein Satz von *M. Réthy*[111]) stellt die Bedingungen auf, die erfüllt sein müssen, damit zwei gleiche Flächen sich in eine endliche Zahl kongruenter Teile zerlegen lassen, und diese Bedingungen werden im allgemeinen, z. B. bei einem Kreise und einem Quadrate von gleichem Inhalt, nicht erfüllt.

Die allgemeine Theorie des Flächeninhalts erfordert also, daß man entweder auf das Exhaustionsverfahren zurückgreift, das von den Alten zur Bestimmung der Fläche des Kreises, des Parabelabschnitts usw. angewandt worden ist[112]), oder auf das moderne Verfahren der Integralrechnung (I A III, *Pringsheim,* Nr. **11**).

Jedoch gilt auch für Flächen von krummliniger Begrenzung das

---

105) Nicht-Euklidische Raumformen, Leipzig 1885; näheres in der Einführung in die Grundlagen der Geometrie 2, Paderborn 1898, p. 24 f.

106) Dorpat. Naturf. Ges. Ber. 1892. Ergänzungen bei *G. Biasi,* Ancora sulla equivalenza dei poligoni (Riv. di mat. 9 (1899), p. 85).

107) Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre, Math. Ann. 42 (1893), p. 275.

108) Dimostrazione della proposizione fondamentale dell' equivalenza delle figuri, Ist. Ven. Atti (7) 6 (1894—95).

109) Sur le postulat relatif à l'équivalence des poligones considéré comme corollaire du théorème de Varignon, Paris Bull. Soc. math. 23 (1895), p. 268.

110) Sulla teoria dell' equivalenza geometrica, Riv. di mat. 1895, fasc. 3—4 und 5—6.

111) Endlich-gleiche Flächen, Ung. Ber. 1890, 16. Juni; Math. Ann. 38 (1891), p. 145.

112) Eine kritische Entwicklung dieses Exhaustionsverfahrens bei den elementarsten Flächenfragen findet sich in den Elementi di geometria von *F. Enriques* und *U. Amaldi,* Bologna 1903, zweite Auflage 1905.

für die Polygone erhaltene Resultat, das wir jetzt in folgender Weise aussprechen können:

Die Postulate des Einanderangehörens, der Kongruenz und der Anordnung (das Stetigkeits- oder das Archimedische Postulat inbegriffen) *haben zur Folge, daß, wenn man die Gleichheit als Zerlegbarkeit in eine endliche oder unendliche Zahl kongruenter Teile definiert, ebene Flächeninhalte als eine Klasse von Größen betrachtet werden können.*

B. Nun wenige Worte über den *Rauminhalt.*

Euklid behandelt die Volumina in analoger Weise wie die Flächen als Größen. Das schließt eine Voraussetzung ein, die man durch das auf die Volumina übertragene *De Zolt*sche Prinzip ausdrücken kann. Aber auch hier gelingt ein elementarer Beweis dieses Prinzips durch eine Erweiterung der oben angeführten Beweise für die Ebene; diese Erweiterung ist von *Rausenberger*[107]) und *Gérard*[109]) kurz angegeben worden und findet sich bei *Veronese*[108]) in ihren Einzelheiten ausgeführt.

Es folgt also, daß auch die Theorie der Gleichheit im Raum sich auf der gewöhnlichen Definition ohne Hinzufügung eines besondern Postulats aufbauen läßt[113]).

Aber wenn man die Gleichheit der Polyeder studiert, so tritt die neue Frage auf, „ob zwei Polyeder von gleichem Rauminhalt in eine endliche Zahl kongruenter Teile zerlegt werden können". Die fruchtlosen Versuche, eine solche Zerlegung bei dem Tetraeder zu erhalten, und eine Bemerkung *G. Sforzas*[114]) ließen erwarten, daß die Antwort auf diese Frage im allgemeinen negativ sein werde. Und dies ist neuerdings von *M. Dehn*[115]) bewiesen worden.

Bevor wir diese Nummer schließen, wollen wir noch zwei Fragen berühren.

1) *Das Verhältnis der Theorie des Flächeninhalts (und des Rauminhalts) zu dem Parallelenpostulat.*

Das Prinzip, daß man die Flächen- und Rauminhalte als Größen betrachten kann, ist von dem Parallelenpostulat unabhängig, da es sich auch bei der nicht-Euklidischen Annahme aufstellen läßt. Aber alle Sätze über Flächen*gleichheit* hängen direkt von der Annahme ab, die man über die Parallelen macht. Die von *Gauß*, *Bolyai*, *Lobat-*

---

113) Vgl. auch *S. O. Schatunovsky,* Über den Rauminhalt der Polyeder, Math. Ann. 57 (1903), p. 496.

114) Un osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti, Riv. di mat. 7 (1897), p. 105. Vgl. auch *R. Bricard,* Nouv. Ann. (3) 15 (1896), p. 331.

115) Math. Ann. 55 (1902), p. 465.

schefskij entwickelte nicht-Euklidische Theorie des Flächeninhalts führt zu der Erkenntnis, daß der Inhalt eines Dreiecks durch die Differenz zwischen seiner Winkelsumme und zwei Rechten (in der hyperbolischen Geometrie als *Defekt*) gegeben ist, woraus z. B. die Existenz einer oberen Grenze für den Inhalt eines Dreiecks folgt (*Gauß*, Brief an *Ch. L. Gerling* vom 16. März 1819, Werke 8, p. 181; vgl. Nr. **9**). In der elliptischen Geometrie wird es ein Exzeß.

Hinsichtlich der den Rauminhalt betreffenden Probleme der nicht-Euklidischen Geometrie vergleiche man *Lobatschefskij* (Fußnote 88).

2) *Verhältnis der Theorie des Flächeninhalts zu dem Archimedischen Postulat.*

Bei dem oben skizzierten Aufbau der elementaren Theorie der Flächengleichheit und auch bei den gewöhnlichen Entwicklungen der Integralrechnung wird das Archimedische Postulat gebraucht. Nun hat *D. Hilbert*[116]) gezeigt, daß man ein Maß der polygonalen Flächen unabhängig von diesem Postulate erhalten kann; allerdings lassen sich dann zwei Polygone von gleichem Flächeninhalt nicht mehr stets in eine endliche Zahl kongruenter Teile zerlegen (vgl. Nr. **43**).

11. Neue Entwicklungen zur Proportionentheorie im Sinne der Alten. Bei *Euklid* finden sich mehrere Sätze, die zweimal bewiesen werden, einmal mit Hilfe der Flächengleichheit, das andere Mal mit Hilfe seiner arithmetischen Theorie der Proportionen (wir nennen diese Theorie arithmetisch, weil der von *Euklid* gebrauchte Begriff des *λόγος*, wie wir schon bemerkten (Nr. 7), genau dem modernen Zahlbegriff entspricht). *H. G. Zeuthen* erblickt hierin den letzten Rest eines gewissen Kampfes, der zwischen diesen beiden Behandlungsweisen der Aufgaben bestehen mußte, bis in der arithmetischen Proportionentheorie (von den unmittelbaren Vorgängern *Euklid*s) die Schwierigkeiten überwunden waren, die mit dem Falle eines inkommensurablen Verhältnisses zusammenhängen. Im Anschlusse an *Euklid* erhielt dann die arithmetische Methode der Proportionen endgültig die Oberhand.

Jedoch sind die Entwicklungen, welche darauf ausgehen, die Geometrie von den Betrachtungen des Zahlbegriffes zu befreien, in unseren Tagen wieder aufgenommen worden, und es ist in der Tat gelungen, eine rein *geometrische* Theorie der Proportionen zwischen Strecken aufzustellen.

Die Sätze, die einer solchen Behandlungsart zu Grunde liegen können, sind:

---

116) Grundlagen, §§ 20, 21.

1) der Satz von *Thales*: die Proportionalität der Strecken, die auf den beiden Schenkeln eines Winkels von parallelen Geraden abgeschnitten werden;

2) die Flächengleichheit zweier Dreiecke (oder Parallelogramme), die einen Winkel gemeinsam haben und in denen die diesen Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportional sind.

Legt man den einen oder den anderen Satz einer *Definition* der Proportion zwischen Strecken zu Grunde, so drücken sich die fundamentalen Eigenschaften der Proportionen in *Behauptungen über den Parallelismus* oder *über die Flächengleichheit* aus, und diese müssen also direkt bewiesen werden, ohne daß der Begriff des Verhältnisses und damit des Zahlbegriffes zu Hilfe genommen wird.

Beide hier angedeuteten Wege haben (was moderne Untersuchungen angeht) ihren Ursprung in der Ausdehnungslehre von *H. Graßmann*[117]), wo jedoch die Strecken nicht nur in ihrer Größe, sondern auch in ihrer Richtung betrachtet werden. Insbesondere drückt sich die distributive Eigenschaft der Multiplikation bei der *Graßmann*schen Rechnung sofort in der Identität der beiden auf die Sätze 1) und 2) gegründeten Definitionen der Proportion aus.

Rajola Pescarini[118]) (1876) definiert die Proportion zwischen Strecken mit Hilfe des Satzes von *Thales* in bezug auf einen *gegebenen* Winkel und leitet daraus geometrisch den Satz 2) ab, indem er sich auf den 35. Satz des dritten Buches von *Euklid* über die Kreissehnen stützt, der dort mit Hilfe des *Pythagoräischen Satzes* bewiesen wird; es gelingt ihm auf diese Weise, die Definition der Proportion von dem besonderen Winkel, von dem er ausgegangen ist, frei zu machen. Er entwickelt dann einen Beweis des Satzes, daß „Streckenpaare, die einem dritten proportional sind, unter sich proportional sind" (die *transitive* Eigenschaft der Gleichheit von Verhältnissen); aber dieser Beweis ist von einer Einschränkung abhängig, die man vermeiden kann, wenn man einen Weg einschlägt, der neuerdings von *G. Vailati*[119]) angegeben worden ist.

R. Hoppe[120]) hat eine geometrische Behandlung der Proportionen entwickelt, die ebenfalls von dem Satze von *Thales* ausgeht, insofern

117) Ausdehnungslehre von 1844, Nr. 75—78.

118) Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia, Napoli 1876.

119) Di un modo di riattaccare le teorie delle proporzioni tra segmenti a quella dell' equivalenza. Atti del II. Congresso dell' associazione Mathesis, Livorno 1902.

120) Rein geometrische Proportionslehre, Arch. Math. Phys. 62 (1878), p. 153.

zwei Streckenpaare proportional genannt werden, wenn sie die Seiten gleichwinkliger Dreiecke bilden. Er beschäftigt sich vor allem mit dem Beweise, daß die so definierte Beziehung nicht von dem Winkel abhängt, der von den beiden Streckenpaaren gebildet wird, und gelangt zu diesem Beweise durch Betrachtungen im Raume (die zu dem *Desargues*schen Satze der Ebene über homothetische Dreiecke führen). Dann führt er die Transitivität der Gleichheit von Verhältnissen auf denselben Satz zurück, und auf die Transitivität der Gleichheit der Richtungen (das Parallelenpostulat) den Satz von dem *zusammengesetzten Verhältnisse* (wenn $a : b = c : d$ und $b : e = d : f$, so ist $a : e = c : f$).

Endlich nimmt er den Satz 2) als Definition an und leitet daraus im besonderen die Vertauschbarkeit der Mittelglieder in einer Proportion ab[121]).

Bei dieser *Hoppe*schen Behandlungsweise gelingt es also bis auf diese Vertauschbarkeit der Mittelglieder, die Theorie der Proportionen aufzustellen, indem man sich auf die Eigenschaften der Parallelen stützt und die Benutzung der Flächengleichheit durch Betrachtungen im Raume ersetzt, aber schließlich wird auch in ihr der Begriff der Flächengleichheit zu Hilfe genommen, um die Vertauschbarkeit der Mittelglieder darzutun.

Diese Eigentümlichkeit tritt übrigens bei dem allgemeineren Satz von dem *unregelmäßigen Verhältnisse* (wenn $a : b = e : f$ und $b : c = d : e$, so ist $a : c = d : f$) wieder auf. Dieser Satz kommt hier auf den folgenden zurück:

Wenn es auf den beiden Schenkeln eines Winkels zwei Punkttripel 1, 3, 5 und 2, 4, 6 gibt von der Art, daß die Geradenpaare 12, 45 und 23, 56 parallel sind, dann sind auch die Geraden 34, 61 parallel.

Dieser Satz und ein auf Flächengleichheitsbetrachtungen gegründeter Beweis desselben findet sich schon in den Collectanea des *Pappus*[122]) (daher wird er im folgenden kurz *Pappusscher Satz* genannt).

Ein einfacher Beweis des *Pappus*schen Satzes, der sich auf die Gleichheit der Peripheriewinkel im Kreise gründet und daher von dem

---

121) *Hoppe* faßt die Sache auch noch anders an, indem er von dem Satze 2) ausgeht. Vgl. auch *G. Biasi,* Corso di lezioni sulla teoria delle proporzioni, autographiert, Sassari 1882.

122) Dieser *Pappus*sche Satz bildet einen besondern Fall des *Pascal*schen Satzes von dem einem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechseck, III C 1, *Dingeldey,* Nr. 18, und wird daher in der neueren Literatur oft kurzweg als *Pascal*scher Satz bezeichnet.

Begriffe des Flächeninhalts unabhängig ist, scheint das erste Mal von *K. Kupffer*[123]) (1893) entwickelt worden zu sein; ein Beweis, der das Rotationshyperboloid zu Hilfe nimmt, ist von *F. Schur*[124]) (1898) angegeben worden; andere Beweise in der Ebene sind von *D. Hilbert*[125]) (1899) geführt worden. *Hilbert* hat überhaupt die ganze geometrische Theorie der Proportionen zwischen Strecken neu aufgebaut.

Hieraus ergibt sich für den *Desargues*schen Satz der Ebene (Nr. 20 a) folgendes: Dieser Satz läßt sich bekanntlich auf Grund der Postulate des Einanderangehörens, der Anordnung und des Parallelenpostulats nur mit Hilfe räumlicher Betrachtungen beweisen. Solche räumliche Betrachtungen sind nun in dem hier betrachteten Zusammenhange zur Aufstellung des *Desargues*schen Satzes der Ebene überflüssig, da, wenn die Vertauschbarkeit der Mittelglieder gegeben ist, die transitive Eigenschaft der Gleichheit von Verhältnissen und der Satz von dem zusammengesetzten Verhältnisse auf einander zurückkommen und daher der *Desargues*sche Satz auf die Transitivität des Parallelismus (das Parallelenpostulat) zurückkommt.

Ein anderes wichtiges Resultat geht aus den Betrachtungen von *F. Schur* und *D. Hilbert* hervor:

Die in der Ebene auf die Eigenschaften der Parallelen und der Kongruenz gegründete geometrische Theorie der Proportionen zwischen Strecken ist von dem Archimedischen Postulat unabhängig.

Wir wollen hinzufügen, daß die Behandlung der Theorie noch weiter vereinfacht worden ist und zwar durch folgende Arbeiten:

F. Schur[126]) hat bemerkt, daß es genügt, den *Pappus*schen Satz in einem einzigen Falle, z. B. für das einem rechten Winkel einbeschriebene Sechseck, zu beweisen, und hat einen einfachen Beweis für diesen Fall angegeben, der sich auf den Satz stützt, daß die Höhen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen.

J. Mollerup[127]) hat einen einfachen allgemeinen Beweis desselben Satzes erbracht.

B. Levi[128]) hat den Entwicklungen, die zur Aufstellung des besonderen Falles des *Pappus*schen Satzes nötig sind, der der Vertauschbarkeit der Mittelglieder entspricht, eine elementare Form gegeben.

---

123) Dorp. Naturforscherges. Ber. 1893, p. 373 f.

124) Math. Ann. 51 (1899), p. 401.

125) Grundlagen, § 14 und Kap. 6.

126) Math. Ann. 57 (1903), p. 205.

127) Math. Ann. 58 (1903/4), p. 479.

128) Per. di mat. 6 (1903) Suppl., p. 114.

Die Theorie der Proportionen, von der wir hier gesprochen haben, ist auf das engste mit den Fragen verknüpft, die sich auf den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie beziehen, vgl. Nr. 20; in bezug auf den *Pappus*schen Satz in der nicht-Archimedischen Geometrie siehe näheres in Nr. 42.

12. Schluß der vorstehenden Untersuchung und Disposition der folgenden Kapitel. Die oben gegebene (und weiterhin bis zur Prüfung der hauptsächlichen Konsequenzen durchgeführte) Untersuchung der Begriffe und Postulate läßt drei Gruppen geometrischer Eigenschaften erkennen:

1) Eigenschaften, die mit den Begriffen „zwischen", „Seite der Ebene", „Strecke", „Winkel" usw. zu tun haben (Linieneigenschaften der Geraden — die auch die Stetigkeit umfassen — und Flächeneigenschaften der Ebene);

2) das Einanderangehören von Punkten, Geraden und Ebenen;

3) die Kongruenz.

In der Elementargeometrie sind diese drei Arten von Eigenschaften miteinander innig verbunden; sie stehen dort in einem Verhältnisse gegenseitiger Unterordnung, so daß man die Eigenschaften der einen Gruppe nicht aussprechen kann, ohne sich, wenigstens zum Teil, auf Eigenschaften einer anderen Gruppe zu beziehen. Aber die Entwicklung der geometrischen Wissenschaft führte zu einer Scheidung.

Man kann diesen Vorgang wohl verstehen, wenn man (wie zuerst *F. Klein* in seinem Erlanger Programm) die verschiedenen Forschungsrichtungen der Geometrie durch die ihnen zugehörigen Transformationsgruppen charakterisiert (III A B 4 b, Gruppentheoretische Klassifikation, *Fano*).

Zur *Elementargeometrie* gehört eine Gruppe von Transformationen, die Gruppe der Bewegungen und Umlegungen nebst den Ähnlichkeitstransformationen, die von *Klein* sogenannte „Hauptgruppe"[129]), die alle oben untersuchten Eigenschaften 1), 2), 3) gleichzeitig unverändert läßt.

Man kann aber anstelle der Bewegungen allgemeinere Transformationen betrachten, die nur einen Teil jener Eigenschaften unverändert lassen; man erhält dann Geometrien, die sich nur mit diesen invarianten Eigenschaften beschäftigen. Im besonderen entstehen auf diese Weise:

a) Die *projektive Geometrie* (III A B 6, projektive Geometrie, *Schoen-*

129) Erlanger Programm.

flies), die diejenigen Eigenschaften studiert, welche der Gruppe der Kollineationen gegenüber invariant sind, d. h. die aus den Postulatengruppen I und II der Nrn. **3** und **4** unter Mithinzunahme der gewöhnlichen Stetigkeit hervorgehenden Eigenschaften.

b) Die *Theorie des Kontinuums* (oder Analysis situs, III A B 3, *Dehn-Heegaard*), die diejenigen Eigenschaften betrachtet, welche beliebigen stetigen Transformationen gegenüber invariant sind. Es sind dies die Eigenschaften der Gruppe I der Nr. **3**, die durch eine solche Behandlungsweise von den besonderen Eigenschaften der Geraden und der Ebene abgelöst werden.

Fügen wir diesem eine andere Betrachtung hinzu [130]). Wenn man eine Gruppe von Transformationen des Raumes in bezug auf irgend ein besonderes Gebilde betrachtet (indem man von dem, was *außerhalb dieses Gebildes* ist, absieht), so nehmen die der Gruppe gegenüber invarianten geometrischen Eigenschaften eine neue, weniger umfassende Bedeutung an, indem sie zu einer besonderen *Geometrie auf dem Gebilde* führen.

Man betrachte in diesem Sinne die Gruppe der Bewegungen, die der Elementargeometrie zugrunde liegt, im Hinblick auf eine Fläche; auf diese Weise entsteht eine allgemeinere Art, die metrischen Beziehungen der Figuren auf einer Fläche zu betrachten, welche die (differentiale Maß-) *Geometrie auf den Flächen* (in der die der Abwickelbarkeit gegenüber invarianten Eigenschaften betrachtet werden, III D 6a, *Voß*) bildet, von der man durch Verallgemeinerung zu der *Maßgeometrie auf den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten* (III D, *Stäckel*) und im besonderen auf den Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen gelangt. Diese Geometrie umfaßt die Eigenschaften der Kongruenz (3), die im Hinblick auf die elementaren Eigenschaften der Analysis situs (1), aber unabhängig von den Begriffen der Geraden und der Ebene definiert werden.

Ein Abstraktionsprozeß, der sein Gegenstück in der Erweiterung der ursprünglichen Transformationsgruppe findet, führt also von der Elementargeometrie auf drei allgemeinere Zweige geometrischer Untersuchungen, die man in ihrem gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnis durch das folgende Schema darstellen kann:

Theorie des Kontinuums (Analysis situs),
{ Projektive Geometrie,
{ Allgemeine Maßgeometrie auf den Mannigfaltigkeiten,
Elementargeometrie.

---

130) Vgl. *F. Enriques,* Conferenze di geometria Nr. 28, p. 124.

Die zu den genannten drei Zweigen gehörigen Eigenschaften[131]) könnte man in folgender Weise mit drei Gruppen von Empfindungen verknüpfen:

Eigenschaften, die mit dem allgemeinen Tast- und Muskelgefühl zusammenhängen,

Optische (deskriptive) Eigenschaften,

Mechanische (metrische) Eigenschaften im Hinblick auf ein besonderes, mit Bewegungsfähigkeit ausgerüstetes Tastorgan.

Nun kann man das System der Geometrie in doppeltem Sinne durchlaufen:

Entweder man beginnt mit der Elementargeometrie, erhebt sich dann auf der einen Seite zur projektiven Geometrie, auf der anderen Seite zur Maßgeometrie auf den Mannigfaltigkeiten und endet mit der Analysis situs.

Oder man beginnt umgekehrt mit der Theorie des Kontinuums und steigt von da zur projektiven Geometrie oder zur Maßgeometrie auf den Mannigfaltigkeiten und endlich zur Elementargeometrie herab.

Der Abstieg von der Analysis situs zur projektiven Geometrie wird dabei dadurch gegeben sein, daß man ein besonderes System von Kurven und Flächen (mit geeigneten Eigenschaften) gegeben denkt, die man als gerade Linien und Ebenen bezeichnet [*Klein*, im Anschluß an *v. Staudt*, Math. Ann. 6 (1872/73), p. 112, und Erlanger Programm, p. 32].

Der Abstieg von der Analysis situs zur allgemeinen Maßgeometrie geschieht, indem man eine gewisse *Maßoperation* (das Maß einer Linie oder der Entfernung zweier Punkte usw.) mit bestimmten Eigenschaften gegeben denkt (*Riemann*) oder indem man ein gewisses System von Linien und Flächen (z. B. geodätische Linien usw.) mit Bezugnahme auf die genannte Maßoperation als gegeben annimmt.

Der Abstieg von der projektiven Geometrie zur Elementargeometrie geschieht dadurch, daß man bei der Maßbestimmung ein Gebilde zweiten Grades auszeichnet (*Cayley*, *Klein*). Wenn man insbesondere zur Euklidischen Maßbestimmung kommen will, so bildet die *affine Geometrie* eine Zwischenstation (*Moebius*, *Graßmann*).

---

131) *W. Fiedler* und *F. Klein* haben zunächst diesen Unterschied zwischen deskriptiven und metrischen Eigenschaften bemerkt. *Enriques* hat ihn durch eine besondere Untersuchung der Daten der physiologischen Psychologie zu beweisen versucht und ist dazu geführt worden, die Eigenschaften der Theorie des Kontinuums mit dem allgemeinen Tast- und Muskelgefühl, der gemeinsamen Grundlage der besonderen Empfindungen, zu verknüpfen; vgl. Art. 1 in den Questioni und Rivista filosofica di Pavia 1901.

Der Abstieg von der allgemeinen Maßgeometrie der Mannigfaltigkeiten zur gewöhnlichen oder auch nicht-Euklidischen Elementargeometrie des Raumes geschieht, indem man der angenommenen Maßoperation besondere Bedingungen auferlegt (z. B. die Homogenität und Isotropie des Raumes, den Charakter der Bewegungsgruppe — *Riemann*, *Beltrami*, *Schläfli*, *Lie*, *Schur*, vgl. Abschn. V B).

In den folgenden Kapiteln wollen wir den zweiten Weg durchlaufen, nämlich zunächst von den Grundlagen der Analysis situs handeln, um dann auf der einen Seite durch die projektive Geometrie, auf der anderen Seite durch die allgemeinen Maßbestimmungen zur Elementargeometrie herabzusteigen.

II. Prinzipien der Theorie des Kontinuums.

13. Vorbemerkung. Die Prinzipien der Theorie des Kontinuums (vgl. III AB 3, *Dehn-Heegaard*) sind von geometrischer Seite nur erst zum Teil in Untersuchung gezogen worden[132]). Aber andere Untersuchungen dieser Art knüpfen an die analytischen Fragen der Darstellung der Linien und Flächen (vgl. III A B 2, *v. Mangoldt*) und an die von *G. Cantor* begründete Mengenlehre (I A 5, *Schoenflies*) an, und *Cantor*s neuere Arbeiten[133]) erstrecken sich zum Teil direkt auf das Gebiet der geometrischen Prinzipien. Eine neue Wendung ist in diese Untersuchungen durch die sogenannte nicht-Archimedische Geometrie hineingekommen (Abschn. VII).

Von den anderweitig erhaltenen Resultaten muß man sich folgende gegenwärtig halten:

1) die Möglichkeit, die Punkte einer Strecke (u) und eines Quadrates (x, y) umkehrbar eindeutig auf einander zu beziehen (*Cantor*), auch durch stetige, nicht eindeutig umkehrbare Funktionen $x(u)$, $y(u)$ (*Peano*) (vgl. III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. 8);

2) die Unmöglichkeit, zwischen zwei Gebieten $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_m)$ von verschiedener Dimensionenzahl $(n \gtrless m)$ eine umkehrbar eindeutige stetige Beziehung herzustellen (wegen 1) und 2) vgl. I A 5 Nr. 2, *Schoenflies*);

3) den *Jordan*schen Satz: *Es sei eine geschlossene Kurve* $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ *ohne mehrfache Punkte, wo* φ *und* χ *endliche und stetige Funktionen sind, gegeben; dann zerlegt sie die Ebene* (xy) *in ein inneres und in ein äußeres Gebiet* (*die Jordanschen Gebiete*) von der

132) *Enriques,* Palermo Rend. 12 (1898), p. 222.
133) Math. Ann. 46 (1895), p. 481.

Art, daß ein stetiger Zug, der einen inneren und einen äußeren Punkt verbindet, die Kurve schneidet (vgl. III A, B 2, *v. Mangoldt*, Nr. 8);

4) *die Unterscheidung zwischen analytischen und nicht-analytischen ebenen Kurven hängt nicht nur von der in der Ebene betrachteten Kurve ab, sondern auch von der Wahl des Koordinatensystems, auf das sie bezogen wird.*

Die Gesamtheit der analytischen Kurven der Ebene genügt, wenn man die singulären Punkte ausschließt und nur ein endliches Gebiet betrachtet, in Übereinstimmung mit dem, was uns die Anschauung bei dem Vergleich der zusammen vorgestellten Linien lehrt, der fundamentalen Bedingung:

Zwei Linien haben nur eine endliche Zahl von Punkten gemeinsam.

Umgekehrt, wenn man die Geraden und die algebraischen Parabeln von der Ordnung 2, 3, ... innerhalb eines endlichen Gebietes als gegeben betrachtet, so läßt sich beweisen, daß jede Linie, die im Hinblick auf sie der genannten Bedingung genügen soll, in jedem Punkte eine Tangente (wenigstens zur Rechten und zur Linken) und daher eine oskulierende Parabel (von der Ordnung $n = 2, 3, \ldots$) hat; sie wird daher in cartesischen Koordinaten durch Funktionen dargestellt, die alle aufeinanderfolgenden Ableitungen (wenigstens zur Rechten und zur Linken) haben, und es scheint, daß diese Funktionen (in jedem geeignet begrenzten Bereiche) sich auch als analytisch werden ergeben müssen, wenn die gegebene Linie alle analytischen Linien ohne singuläre Punkte in einer endlichen Zahl von Punkten schneiden soll.

14. Die Linie. Der fundamentale Begriff in der Theorie des Kontinuums ist der der *stetigen Mannigfaltigkeit einer Dimension.* Abstrakt genommen kann dieser Begriff mit dem Begriffe der *Linie* identifiziert werden, wenn man den *Punkt* der Linie als Element der Mannigfaltigkeit betrachtet und von den Beziehungen der Linie zu dem übrigen Raume absieht und ebenso von irgend welchem (metrischen) Begriffe der Länge der Strecken (oder Bogen) der Linie. Es werden also nur diejenigen Eigenschaften der Linie in Betracht gezogen, welche mit der geometrischen Bestimmung der Linie durch die Bewegung eines Punktes verknüpft sind: die *natürlichen Ordnungen* der Punkte der Linie und ihre *Stetigkeit,* die *Strecken* (4 II′) usw.

Will man die Eigenschaften, die eine Mannigfaltigkeit einer Dimension oder eine in dem oben genannten Sinne vom Standpunkte des Kontinuums aus betrachtete Linie charakterisieren, in ein logisches System bringen, so ist es zweckmäßig, sich zunächst auf einen be-

stimmten Fall zu beziehen, indem man z. B. als Typus die *doppelpunktfreien, offenen* (d. h. nicht *begrenzten*) Linien nimmt und als *elementare Mannigfaltigkeiten* v_1 diejenigen bezeichnet, welche den erwähnten Bedingungen entsprechen.

Man kann die fundamentalen Eigenschaften einer v_1 formulieren, indem man die v_1 entweder als *werdend* oder als *fertig vorliegend* betrachtet. Und man hat dann die in Nr. 4 ausgesprochenen Postulate für die Gerade und das Stetigkeitspostulat in der *Weierstraß*schen oder der *Dedekind*schen Form (Nr. 7) auszusprechen. Diese Annahmen können in der Aussage zusammengefaßt werden, daß sie der v_1 *zwei stetige und einander entgegengesetzte Ordnungen* erteilen.

Es entsteht nun die Frage, „ob diese Annahmen genügen, um die Punkte der v_1 auf das Kontinuum der numerischen Variablen x oder auf die gewöhnliche geradlinige Strecke (die Endpunkte ausgeschlossen) abzubilden", d. h. ob sie zur *Einführung der Koordinaten* genügen.

B. Riemann[134]), bei dem der Begriff des Kontinuums einer Dimension sich zum ersten Male in seiner ganzen Allgemeinheit findet, betrachtete dies als ohne weiteres einleuchtend, insofern er die kontinuierliche Variation eines erzeugenden Elementes der v_1 mit dem Verlaufe der *Zeit* in Verbindung brachte.

Man hat bald hervorgehoben, daß in dieser Annahme ein Postulat enthalten ist[135]).

Die Formulierung dieses Postulats ist leicht, wenn man in der v_1 die Vergleichbarkeit der Strecken (die Kongruenz) wenigstens für den Fall als gegeben annimmt, daß die Strecken einen gemeinsamen Endpunkt haben und auf entgegengesetzten Seiten von ihm liegen. Sieht man aber von solchen Kongruenzbeziehungen ab, so genügt es, die Möglichkeit vorauszusetzen, daß irgend ein Verfahren gestattet,

in der v_1 eine abzählbare Punktmenge G zu konstruieren, so daß jeder Punkt der v_1 ein Grenzpunkt von G ist.

Mit Hilfe dieses Postulats bestimmt *G. Cantor*[136]) den Begriff der v_1 in der Weise, daß sie auf das Zahlenkontinuum abbildbar ist.

Wir bemerken dazu, daß dieses *Cantor*sche Postulat innerhalb der v_1 eine ausgezeichnete Menge G einführt; aber die Anschauung der *an sich*, abgesehen von dem Kongruenzbegriff, *betrachteten* v_1 gibt uns über die Konstruktion dieser Menge nichts an. Daher halten wir *den Begriff der v_1 für allgemeiner als den des Zahlenkontinuums* (vgl. in der Tat die nicht-Archimedischen Theorien, Abschn. VII).

134) Habilitationsvortrag I 2.

135) Vgl. *Klein,* Math. Ann. 6 (1872/73), p. 132, 143, 144.

136) Math. Ann. 46 (1895), p. 481.

Wir werden später sehen, daß die Frage der Einführung der Koordinaten in der v_1 durch die Betrachtung der v_1 in einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen neues Licht erhält.

Den Begriff der *begrenzten* Mannigfaltigkeit einer Dimension oder der für sich betrachteten *linearen Strecke* kann man nunmehr durch geringfügige Abänderungen der voraufgehenden Sätze aufstellen, da man bemerkt, daß aus einer linearen Strecke durch Entfernung der *Endpunkte* eine offene, nicht begrenzte Linie wird.

Der *allgemeinere Begriff einer Mannigfaltigkeit einer Dimension* oder einer Linie läßt sich auf die vorhergehenden zurückführen, da man eine Linie im allgemeinen als die Vereinigung mehrerer Strecken betrachten kann, die an den Endpunkten in geeigneter Weise verbunden sind.

Vereinigt man im besonderen die Endpunkte zweier Strecken, so erhält man eine *geschlossene Linie.*

Die Postulate, die in der Theorie des Kontinuums die Eigenschaften der *geschlossenen* Linie V_1 charakterisieren, kann man bei Betrachtung der *werdenden* Figur direkt aufstellen, wenn man folgendes annimmt:

Die Elemente einer geschlossenen V_1 können in einer *natürlichen zyklischen Anordnung* in dem einen oder dem andern Sinne vorgestellt werden, und zwar in folgender Weise:

1) Ist irgend ein Element der V_1 gegeben, so existiert *eine* natürliche *Ordnung* der V_1, die einen bestimmten Sinn und ein erstes Element A besitzt, in der

a) von zwei Elementen B und C immer das eine, z. B. B, dem anderen, dem C, vorangeht (und alsdann C auf B folgt),

b) wenn B dem C vorangeht und C dem D vorangeht, immer B dem D vorangeht,

c) zwischen zwei Elementen B und C unendlich viele Elemente existieren,

d) kein letztes Element existiert.

2) Die beiden natürlichen Ordnungen der V_1, die dasselbe erste Element und entgegengesetzten Sinn haben, sind Umkehrungen von einander.

3) Wenn drei Elemente P_1, P_2, P_3 in einer der natürlichen Ordnungen auf einander folgen, so folgen in einer anderen Ordnung von demselben Sinn P_1, P_2, P_3 oder P_2, P_3, P_1 oder P_3, P_1, P_2 auf einander[137]).

137) Vgl. *F. Enriques,* Ist. Lomb. (2) 27 (1894), p. 550, und Vorlesungen über projektive Geometrie 1903, p. 23.

Diesen Postulaten ist noch das engere (das *Cantor*sche) Stetigkeitspostulat hinzuzufügen (Nr. 7).

Bei Betrachtung der *fertigen* Figur können die Postulate für die geschlossene Linie aufgestellt werden, wenn man als primitiven Begriff den Begriff „sich trennender Paare" annimmt[138]). Man postuliert dann:

Vier Elemente der V_1 kann man nur in *einer* Weise in sich trennende Paare zerlegen.

Wenn die Paare AB, CD und AC, BE sich trennen, so trennen sich auch die Paare CD, BE und AC, ED.

Dann kann man die natürliche Ordnung der V_1, die A zum ersten Elemente hat und in der zwei Elemente B und C auf einander folgen, *definieren*.

Den genannten Postulaten über die sich trennenden Paare ist noch das Stetigkeitspostulat in einer geeigneten Form hinzuzufügen.

Es sei noch bemerkt, daß ohne dieses Postulat die vorstehenden Postulate auch auf den Fall einer offenen Linie Anwendung finden könnten.

15. Flächen und Mannigfaltigkeiten mehrerer Dimensionen. Wie die Linie als der Typus der Mannigfaltigkeit einer Dimension angesehen werden kann, so führen die *Fläche* und der *Raum*, abstrakt betrachtet, auf die Begriffe der *Mannigfaltigkeiten zweier* und *dreier Dimensionen*, und von diesen aus gelangt man durch Verallgemeinerung zu dem Begriffe der *Mannigfaltigkeit von mehreren* (n) *Dimensionen.*

Es ist schwer zu sagen, wem in Wahrheit die Priorität dieses allgemeinen Gedankens zuzuschreiben ist, da es, noch bevor dieser Gedanke als eine Richtung geometrischer Forschung erscheint, z. B. bei *Lagrange* vorkommt, daß die Mechanik mit einer Geometrie von vier Dimensionen verglichen wird. Der fundamentale Gedanke, um den es sich hier handelt, besteht in einer Erweiterung des Begriffes der zweifachen oder dreifachen Ordnung, in welcher die Punkte einer Fläche oder die Punkte des Raumes gedacht werden können, zu einer *vielfachen Ordnung.* So kann man, während die Punkte auf einer Linie geordnet sind, durch Bewegung der Linie eine Fläche und durch Bewegung der Fläche einen Körper oder den gesamten Raum erzeugen.

Die Möglichkeit einer solchen Verallgemeinerung wurde z. B. von *Herbart* angedeutet, dessen philosophische Ansichten, wie bekannt,

---

138) *G. Vailati,* Riv. di mat. 5 (1895), p. 75. Vgl. *M. Pieri,* Torino Atti 30 (1895), p. 607, und 31 (1896), p. 381, 457; *G. Vailati,* Riv. di mat. 5 (1895), p. 183; *A. Padoa,* Riv. di mat. 6 (1896), p. 35; *M. Pasch,* Math. Ann. 48 (1896), p. 111.

einen starken Einfluß auf den Gedankengang *Graßmanns* und *Riemanns* ausgeübt haben. In mathematischer Form finden wir den Begriff der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit bereits im Jahre 1843 bei *A. Cayley* völlig entwickelt vor[139]). Wir finden dann, daß *H. Graßmann*[140]) im Jahre 1844 die Idee eines allgemeineren Begriffes, der den des Raumes umfaßt, ausdrücklich ausgesprochen hat. Hierzu benutzt er eine Verallgemeinerung der Vektorensummierung, für die das kommutative Gesetz gültig ist. Der so hergestellte Begriff der extensiven Größe enthält jedoch etwas mehr, als dem reinen Begriffe der Mannigfaltigkeit in der Theorie des Kontinuums zukommt.

In einer durchaus allgemeinen Weise wird der Begriff der Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen von *B. Riemann*[141]) mit Hilfe einer *rekurrenten genetischen Definition* aufgestellt. *Riemann* betrachtet eine Mannigfaltigkeit v_n von n Dimensionen als eine Klasse von Elementen, die sich in unendlich viele Mannigfaltigkeiten v_{n-1} von $n-1$ Dimensionen derart verteilen lassen, daß deren Gesamtheit als eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension betrachtet werden kann, so daß jedes Element der v_n einer v_{n-1} angehört.

Nimmt man den einfachsten Fall, so wird eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen als durch unendlich viele Mannigfaltigkeiten von einer Dimension erzeugt erscheinen, deren Gesamtheit eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension bildet. Diese Definition entspricht genau der oben erwähnten Tatsache, daß eine Fläche (d. h. eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen, deren Elemente *Punkte* sind) als durch die Bewegung einer Linie erzeugt betrachtet werden kann in der Weise, daß die Aufeinanderfolge der erzeugenden Linien eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension bildet, deren Elemente Linien sind; dadurch werden die Punkte der Fläche, so zu sagen, in eine *doppelte Ordnung* gebracht.

Nehmen wir z. B. eine *einfach zusammenhängende, offene, d. i. nicht begrenzte Fläche*, die wir als Typus derjenigen betrachten, die wir *elementare Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen* nennen und mit v_2 bezeichnen wollen.

Die Erzeugung der Fläche, von der *Riemann* ausgeht, führt dazu, auf ihr ein Büschel *erzeugender* Linien und ein Büschel von *Leitlinien*, die von den Punkten der erzeugenden beweglichen Linie beschrieben werden, zu betrachten. Daher wird man die Definition einer v_2 im

---

139) Cambr. math. Journ. 4 (1845), p. 119, abgedruckt: Coll. math. pap. 1, p. 55.

140) Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, 2. Aufl. 1878; vgl. Ges. math. und phys. Werke, hrsgeg. von *Fr. Engel*, Leipzig 1[1], 1894.

141) Habilitationsvortrag I 3.

Hinblick auf *zwei erzeugende Büschel elementarer Mannigfaltigkeiten* v_1 von einer Dimension in der Weise festsetzen können, daß

1) ein Element der v_2 einer v_1 jedes Büschels angehört (Eigenschaft des *Büschels*);

2) eine v_1 des einen Büschels und eine des anderen *ein und nur ein* Element gemeinsam haben;

3) wenn mehrere v_1 eines Büschels gegeben sind, diejenigen Elemente von ihnen, die zwei v_1 des anderen Büschels angehören, auf diesen in gleicher Weise geordnet sind.

Man kann sagen, daß die beiden Büschel, die den Bedingungen 1), 2), 3) genügen (wenn man das *Netz* oder das System der beiden Büschel betrachtet), zu einer *netzförmigen Verteilung* der Elemente der v_2 führen, im Hinblick auf welche die Begriffe *Umgebung, Grenzpunkt,* umkehrbar eindeutige *stetige* Beziehung zwischen zwei v_2, eine *stetige* v_1 auf der v_2 usw. definiert sind (vgl. Nr. **14**).

Auf diesen Grundlagen, von der gegebenen Erzeugung ausgehend, kann man eine Theorie der v_2 entwickeln, in der die elementaren Eigenschaften der Zerlegung der v_2 in Teile durch eine auf ihr als existierend vorausgesetzte stetige v_1 bewiesen werden.

Aber es handelt sich hier um eine hypothetische Theorie, da kein Mittel vorhanden zu sein scheint, um außer den zweierlei v_1 des gegebenen Netzes andere stetige v_1 auf der v_2 zu konstruieren, so lange wenigstens, als man nicht annimmt, daß die gegebenen erzeugenden v_1 auf das Zahlenkontinuum bezogen werden können, indem man das *Cantor*sche Postulat von der Existenz einer ausgezeichneten Teilmenge (vgl. III A B 2, *v. Mangoldt,* Nr. 8, 9) für sie gelten läßt (Nr. **14**). Fügt man diese Annahme hinzu, so würde man offenbar auf der v_2 *Koordinaten einführen,* d. h. die v_2 in umkehrbar eindeutiger Weise auf eine Zahlenmannigfaltigkeit (x, y) abbilden können.

Aber man kann, ohne das eben erwähnte *Cantor*sche Postulat zu benutzen, einen anderen Weg zur Einführung der Koordinaten einschlagen.

Da eine Mannigfaltigkeit v_2 nach dem allgemeinen Begriffe, den wir uns von ihr bilden, verschiedene Erzeugungsweisen gestattet, so wird man darauf geführt, sich zu fragen, ob nicht die Annahme der Existenz zweier verschiedener Erzeugungsweisen genügt, um auf die Möglichkeit unendlich vieler solcher Erzeugungsweisen zu schließen. Und auf diese, in geeigneter Weise präzisierte Frage erhält man eine bejahende Antwort.

So wird man für die v_2 darauf geführt, den oben ausgesprochenen drei Sätzen das Postulat hinzuzufügen:

4) Es existiert auf einer v_2 ein drittes Büschel von auf derselben v_2 stetigen v_1, die die v_1 der beiden erzeugenden Büschel je einmal schneiden.

Ist dies geschehen, so kann man die elementare Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen v_2 der Zahlenmannigfaltigkeit (x, y) in umkehrbar eindeutiger stetiger Weise zuordnen[142]).

Um von hier aus zu einer geeigneten Definition der v_2 zu kommen, ist nur noch ein Schritt nötig.

Die für eine v_2 im Hinblick auf eine besondere netzförmige Verteilung der Elemente aufgestellten Begriffe der Umgebung und daher des Grenzpunktes usw. sind in der Tat von dieser Verteilung unabhängig, da sie dem Begriffe der v_2 selbst angehören. Wenn man sich ein Netz ursprünglich gegeben denkt, so kann man auf Grund dieser Unabhängigkeit jedes andere Netz mit Rücksicht auf das erste definieren; aber wenn man *nur* die v_2 gegeben denkt, so erscheint diese Unabhängigkeit als eine Beziehung zwischen zwei netzförmigen Verteilungen ihrer Elemente, und diese Beziehung bildet einen Teil der Bedingungen, die zur Definition der v_2 dienen können.

Man kann daher eine *genetische Definition* der v_2 durch die folgenden *sie charakterisierenden Postulate* aufstellen:

a) Die Elemente einer v_2 können in einer netzförmigen Verteilung (die den Forderungen 1), 2), 3) genügt) angeordnet werden.

b) Wenn es zwei netzförmige Verteilungen der Elemente der v_2 gibt und σ eine Umgebung eines Elementes S bei einer dieser Verteilungen ist, so existiert immer eine Umgebung von S bei der anderen Verteilung, die in σ enthalten ist.

c) Es existieren auf v_2 zwei Netze, die eines der beiden erzeugenden Büschel gemeinsam haben, und wobei die v_1 der beiden anderen Büschel sich je in einem Elemente schneiden.

Diese Entwicklungen lassen sich leicht auf die *Mannigfaltigkeiten von $n > 2$ Dimensionen* übertragen; für die (den v_2 analogen) *elementaren* Mannigfaltigkeiten v_n muß man von einer Erzeugung ausgehen, die auf n erzeugende Büschel von Mannigfaltigkeiten v_{n-1} führt. Auf weiteres brauchen wir nicht einzugehen, da neue Schwierigkeiten nicht auftreten.

Kehren wir zu dem Begriffe der v_2 zurück, um uns zu fragen, ob er nicht im Hinblick auf die *fertig vorliegende* Mannigfaltigkeit definiert werden kann, indem man nämlich die Eigenschaften, die mit dem Begriffe der Umgebung eines Elementes auf der Mannig-

142) Vgl. *Enriques,* Palermo Rend. 12 (1898), p. 222.

faltigkeit zusammenhängen, charakterisiert, ohne durch den Begriff der Umgebung in bezug auf eine netzförmige Verteilung (der später von dieser durch das obige Postulat unabhängig gemacht worden ist) hindurch zu gehen.

Diesem Zwecke dienen die folgenden *Postulate*, mit deren Hilfe *D. Hilbert*[143]) eine *Definition* der v_2 gegeben hat, indem er sich auf die abstrakt betrachtete Ebene bezieht:

„Die Ebene ist ein System von Dingen, welche Punkte heißen. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Teilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.

„Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen *Jordan*schen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Das *Jordan*sche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt.

„Jedes in einem Bilde enthaltene *Jordan*sche Gebiet, innerhalb dessen der Punkt A liegt, ist wiederum ein Bild einer Umgebung von A. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte, umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden *Jordan*schen Gebiete auf einander stetig.

„Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

„Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A gibt es stets eine solche Umgebung des Punktes A, die beiden Umgebungen gemeinsam ist.

„Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so gibt es stets eine Umgebung von A, die zugleich den Punkt B enthält."

In bezug auf diese Formulierung bemerken wir, daß in ihr als primitiver, nicht definierter Begriff nicht nur der Begriff der *Umgebung*, sondern auch der einer *gewissen Abbildung* der Umgebung auf ein *Jordan*sches Gebiet, die ihr *Bild* genannt wird, auftritt. Das schließt eine *Vorschrift über die Wahl* zwischen den unendlich vielen (stetigen und unstetigen) Beziehungen ein, die sich zwischen jenen beiden Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen aufstellen lassen. Nun hat *Hilbert* eine solche Vorschrift nicht gegeben, sondern (neben anderen Bedingungen) die Forderung aufgestellt, daß zwei *Jordan*sche Gebiete, die in seinem Sinne Bilder derselben Umgebung sind, in *stetiger* Beziehung zu einander stehen sollen. Aber eine solche Forderung läßt nicht erkennen, ob ein einzelnes auf die Umgebung umkehrbar eindeutig bezogenes *Jordan*sches Gebiet ein Bild von ihr ist oder nicht,

143) Gött. Nachr. 1902, p. 233; Grundlagen, p. 122 Fußnote.

wenn nicht ein besonderes Bild irgendwie als schon gegeben angenommen wird. Aber diese letzte Annahme (durch welche in der Umgebung die netzförmige Verteilung $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ angegeben wäre) würde uns tatsächlich auf die oben angegebene Definition der v_2 bei Betrachtung der *werdenden* Mannigfaltigkeit zurückführen.

Wir wollen nun im allgemeinen von den *irgendwie zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten* von zwei Dimensionen sprechen.

Vor allem sind zur Definition des Begriffes der *durch eine Linie begrenzten* elementaren Mannigfaltigkeit oder *Fläche* V_2 nur wenige und geringfügige Abänderungen dessen nötig, was über die offene Mannigfaltigkeit v_2 gesagt worden ist.

Den *allgemeineren Begriff der Mannigfaltigkeit* oder *Fläche von zwei Dimensionen* und im besonderen den Begriff der *geschlossenen Fläche ohne Ränder* kann man aufstellen, indem man durch geeignetes Aufeinanderlegen von Strecken der Begrenzungslinie eine endliche Anzahl von v_2 vereinigt; man muß dabei hinterher von der besonderen Erzeugungsart absehen und also durch ein geeignetes Postulat die Beziehungen zwischen zwei verschiedenen *Einteilungen* der Mannigfaltigkeit V_2 ausdrücken.

Die hier sich darbietende Untersuchung ist bisher als eine Frage der Prinzipien nicht behandelt worden; man suchte im besonderen nach der Definition des *Geschlechts*, des *Zusammenhanges* usw. der Mannigfaltigkeit.

Wir wollen uns auf die Bemerkung beschränken, daß bei diesem Gedankengange als *innere* Eigenschaft einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen oder einer Fläche die Eigenschaft erscheint, die bei den Flächen des gewöhnlichen Raumes durch die Worte *einseitig* und *zweiseitig* bezeichnet wird (Umkehrbarkeit und Nichtumkehrbarkeit des Drehungssinnes um einen Punkt; vgl. *Klein*, Math. Ann. 9 (1876), p. 479.)

Über diese Betrachtungen und ihre Ausdehnung auf mehrere Dimensionen vgl. III A B 3 *Dehn-Heegaard.*

16. Linien auf den Flächen. Die Untersuchungen über den Begriff der Linie auf einer Fläche oder auf einer Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen (und allgemeiner über den Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit innerhalb einer anderen Mannigfaltigkeit) lassen sich vor allem an diejenigen Untersuchungen *G. Cantor*s in der Mengenlehre anknüpfen, in denen er eine *stetige Menge* als *perfekt* und *zusammenhängend*[144]) definiert hat.

---

144) Vgl. den Artikel I A 5 Mengenlehre, *Schoenflies*, Nr. **13**, **16**.

Beschränken wir uns auf den Fall einer elementaren (vgl. Nr. **14**) Linie auf einer Fläche, so erhalten wir eine geeignete Definition, wenn wir fordern[145]):

1) die Existenz einer (und damit auch einer zweiten, entgegengesetzten) stetigen Ordnung *innerhalb* der Linie;

2) daß, wenn ein Punkt A der Linie und eine *Umgebung* σ *von* A *auf der Fläche* gegeben ist, immer eine den Punkt A enthaltende Strecke der Linie existiert, die ganz in σ enthalten ist.

Von diesen beiden Bedingungen bezieht sich die erste auf die *inneren* Eigenschaften der Linie als einer v_1, die zweite auf ihre *äußere* Eigenschaft (in bezug auf die Fläche), durch welche die innere Stetigkeit der Linie die Bedeutung der Stetigkeit auf der Fläche annimmt. Die rationalen Punkte einer Strecke und die irrationalen Punkte einer anderen ihr parallelen Strecke in der Ebene können als Ganzes so angeordnet werden, daß zwar die erste Bedingung erfüllt ist, diese Menge aber der zweiten Bedingung nicht genügt.

Man wird auch bemerken, daß nach der *Cantor*schen Ausdrucksweise[146]) die Forderung 2) aussagt, daß die Linie eine *in sich dichte* Menge ist, und daß die Forderung 1) der inneren Stetigkeit dem hinzufügt, daß diese Menge *abgeschlossen* ist, so daß also beide Forderungen zusammen aussagen, daß die Menge *perfekt* ist; außerdem verlangt die innere Ordnung nach der Forderung 1), daß es zwischen zwei Punkten der Linie immer ein Intervall gibt, und dies schließt die aus mehreren unzusammenhängenden stetigen Teilen gebildeten Mengen aus.

In analoger Weise wie die elementare stetige Linie wird man die *geschlossene stetige Linie* (ohne Doppelpunkte) *auf einer Fläche* definieren können, und für diese Linien wird auf einer einfach zusammenhängenden Fläche der *Jordan*sche Satz[147]) (Nr. **13**) bestehen und, wie *Schönflies* gezeigt hat, auch seine Umkehrung (vgl. III AB 2, *v. Mangoldt*, Nr. 8).

Bei weiteren Untersuchungen über die *Zerlegung* der Fläche durch Linien handelt es sich um die Frage, inwieweit diese Linien zu einem besonderen Linien- (oder Koordinaten-)system auf der Fläche

---

145) Vgl. *F. Enriques,* Conferenze di geometria 1894—95, p. 45 und Palermo Rend. 12 (1898), p. 222.

146) Math. Ann. 21 (1883), p. 545, abgedruckt: Acta math. 7 (1885), p. 105.

147) Er könnte nach der Meinung des Referenten auf Grund der hier angenommenen Definition bewiesen werden, und damit würde gezeigt sein, daß er von einer besonderen Wahl der Koordinaten nicht abhängt.

in Beziehung stehen. Hierüber verweisen wir auf das für die Linien in der Ebene Gesagte (Nr. **15**).

Wenn also im folgenden (z. B. wenn von den *Maßbestimmungen Riemanns* die Rede ist) *analytische Linien* in einer Fläche (oder in einer Mannigfaltigkeit) betrachtet werden, so soll das heißen, daß man *sich auf der Fläche eine Familie von Linien* gegeben denkt, die infolge der Wahl eines bestimmten Koordinatensystems von Parametern, die auf unendlich verschiedene Weise gewählt werden können, analytisch abhängt.

III. Prinzipien der projektiven Geometrie.

17. Postulate in einem Raumstück. Die „Geometrie der Lage" von *v. Staudt*, in der die *deskriptiven* (vgl. Fußnote 5) Eigenschaften der Figuren systematisch studiert werden, während die *metrischen* Begriffe beiseite bleiben, muß als die Grundlage der Untersuchungen über die Prinzipien der projektiven Geometrie betrachtet werden.

Die Kritik dieser Prinzipien wurde durch *F. Klein*[148]) eröffnet, der insbesondere die Unabhängigkeit der genannten Geometrie von dem Parallelenpostulat dargetan hat, indem er u. a. bemerkte, daß es genügt, alle Konstruktionen der projektiven Geometrie nur in einem begrenzten Raumstücke auszuführen.

Die Postulate der projektiven Geometrie in einem begrenzten Raumstücke sind dann von *M. Pasch*[149]) in streng logischer Fassung aufgestellt worden.

Sind die Betrachtungen anfangs nur für ein in geeigneter Weise begrenztes Raumstück (z. B. für das Innere eines Tetraeders oder einer zusammenhängenden Fläche) entwickelt worden, so kann man die Gerade aus einer (geradlinigen) linearen Strecke, die sich nach der einen oder der anderen Seite verlängern läßt, hervorgehen lassen. Die charakteristischen Eigenschaften dieser Strecken, in der Fassung, die durch die Betrachtung der fertigen Figur gegeben wird (Nr. 4), wobei indeß die Stetigkeit noch ausgeschlossen bleibt, und an zweiter Stelle die Eigenschaft, daß „zwei Punkte eine geradlinige Strecke bestimmen", bilden den Inhalt der ersten acht Grundsätze von *M. Pasch.* Auf diese Postulate von der Geraden folgen vier Postulate von der Ebene (oder besser von der ebenen Fläche), die sich auf folgende Eigenschaften beziehen: Bestimmung der Ebene durch drei nicht in einer

---

148) Gött. Nachr. 1871, p. 419; wieder abgedruckt Math. Ann. 4 (1871), p. 573; ferner Math. Ann. 6 (1873), p. 112; 7 (1874), p. 531; 17 (1880), p. 52.

149) Neuere Geometrie; vgl. *G. Peano*, Principii.

Geraden liegende Punkte; ihre Eigenschaft, die geradlinige Strecke zu enthalten, die zwei beliebige ihrer Punkte verbindet; zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, haben wenigstens noch einen anderen Punkt gemeinsam; eine Gerade, die in der Ebene eines Dreiecks ABC liegt und eine seiner Strecken, Seiten, trifft, trifft noch eine andere dieser Strecken (diese Eigenschaft sagt im wesentlichen aus, daß „die Gerade die Ebene in *zwei* Teile zerlegt", und setzt also fest, daß die Ebene eine Fläche ist, auf der die Gerade eine Linie ist (vgl. Nr. 8).[150])

In den genannten Postulaten erscheinen die Begriffe der geradlinigen Strecke und der ebenen Fläche als primitiv (empirisch gegeben).

150) Diese Postulate sind übrigens den Postulaten I der Nr. 3 und II der Nr. 4 gleichwertig. Wenn man ihnen das *Dedekind*sche Stetigkeitspostulat in der oben (Nr. 7) angegebenen deskriptiven Form hinzufügt, so erhält man das *vollständige System der deskriptiven Postulate für ein Raumstück.*

Schließt man sich der von *G. Peano* (Riv. di mat. 4 (1894), p. 51) vorgeschlagenen Reduktion des Begriffes der Ebene an, so können die genannten Postulate, abgesehen von der Stetigkeit, wie folgt formuliert werden:

1. Es gibt unbegrenzt viele Elemente, die wir Punkte nennen.

2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte bestimmen eindeutig eine Klasse von unbegrenzt vielen Punkten, der sie selbst angehören und die Strecke genannt wird. Irgend zwei Punkte einer Strecke bestimmen eine andere Strecke, deren Punkte der ersten angehören.

3. Jede Strecke AB bestimmt zwei andere Klassen von Punkten, ihre Verlängerungen über B resp. A hinaus, derart daß jeder Punkt der ersten resp. zweiten Klasse mit A resp. B eine Strecke bestimmt, der B resp. A angehört. Ist C ein Punkt der Strecke AB, so fällt die Verlängerung von CB über B hinaus mit derjenigen von AB über B hinaus zusammen und die Verlängerung von AC über C hinaus besteht aus der Strecke CB und ihrer Verlängerung über B hinaus.

4. Es gibt keinen Punkt, der beiden Verlängerungen einer Strecke gleichzeitig angehört.

Erste Definition: Eine Gerade besteht aus den Punkten einer Strecke und ihren beiden Verlängerungen.

5. Außerhalb jeder Geraden gibt es Punkte.

6. Wenn A, B, C drei nicht in einer Geraden liegende Punkte sind und D ein Punkt der Strecke BC, ferner E ein Punkt der Strecke AD ist, dann existiert ein der Strecke AB angehöriger Punkt F derart, daß E auf der Strecke CF liegt.

7. Wenn A, B, C drei nicht in gerader Linie liegende Punkte sind, D ein Punkt der Strecke BC und F ein Punkt der Strecke AB ist, dann existiert ein Punkt, der den Strecken AD und CF gemeinsam ist.

Zweite Definition: Die Klasse der Punkte derjenigen Strecken resp. Geraden, welche drei nicht in einer Geraden liegende Punkte mit den Punkten der durch die beiden anderen bestimmten Strecke verbinden, heißt Dreieck resp. Ebene.

Das durch die erwähnten Sätze definierte Raumstück kann durch Einführung der *uneigentlichen* oder *idealen* Punkte zum vollen projektiven Raum erweitert werden; dieser Gedanke erscheint als eine natürliche Erweiterung der Idee, die *unendlich fernen Punkte* als die gemeinsamen Punkte zweier Parallelen zu betrachten [151]).

Zu dieser Einführung der uneigentlichen Punkte gelangt man, indem man den Begriff des „Strahlenbündels" verallgemeinert. Wenn man „komplanar" zwei Gerade nennt, die in einer Ebene liegen, so beweist man (*Pasch*), daß, „wenn a, b zwei komplanare Gerade sind, die also einer Ebene ab angehören, und wenn c, d zwei andere Gerade sind, von denen jede mit den a, b komplanar ist, die genannten Geraden c, d selbst komplanar sind", und zwar unabhängig von der Existenz eines (in dem begrenzten Raumstücke gelegenen) gemeinsamen Punktes der Geraden a, b. Auf diesen Umstand gründet sich der erweiterte Begriff des *Bündels,* als einer Gesamtheit von Geraden, die zu je zweien komplanar sind und nicht sämtlich in einer und derselben Ebene liegen: des *eigentlichen* Bündels, wenn die genannten Geraden sämtlich durch einen (*eigentlichen*) Punkt gehen, des *uneigentlichen* im entgegengesetzten Falle. Und hieraus entspringt dem ursprünglich begrenzten Raumgebiet gegenüber der Begriff des *uneigentlichen* oder *idealen Punktes* und dann weiter der der *uneigentlichen Geraden* und der der *uneigentlichen Ebene.*

Die Einführung der uneigentlichen Elemente hat zur Folge, daß es für die Sätze, die sich auf die Bestimmung von Geraden und Ebenen durch Punkte und auf ihre gegenseitigen Schnitte beziehen, eine Ausnahme nicht mehr gibt; andererseits modifiziert sie unsere Vorstellung von dem Zusammenhange der *Geraden,* die nach der Erweiterung durch die uneigentlichen Punkte nicht mehr wie eine offene, sondern wie eine *geschlossene Linie* erscheint. So wird unsere gewöhnliche Raumanschauung modifiziert, und im Gegensatz zu dem Begriffe des *gewöhnlichen Raumes* erhält man den Begriff, den wir mit dem Namen *vollständiger projektiver Raum* bezeichnen wollen.

---

151) *G. Battaglini*, Napoli Rend. 1867 oder Nouv. ann. (2) 7, p. 202, 265, hat bereits bemerkt, daß in der *Lobatschefskij*schen Geometrie die unendlich fernen Punkte der Geraden als durch ein *ideales Gebiet* hindurch verbunden betrachtet werden; *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1872), p. 130, bemerkt, daß die idealen Punkte durch Strahlenbündel gegeben sind, und diese Bemerkung erscheint wieder bei *G. Battaglini*, Giorn. di mat. 12 (1874), p. 300. Die vollständige Theorie der idealen Punkte ist später von *M. Pasch* entwickelt worden, Fußn. 149; vgl. auch *V. Reyes y Prosper,* Math. Ann. 32 (1888), p. 157; *M. Pasch*, Math. Ann. 32 (1888), p. 159; *F. Schur,* Math. Ann. 39 (1891), p. 113; *R. Bonola,* Giorn. di mat. 38 (1900), p. 105.

18. Postulate für den vollständigen projektiven Raum. Zu dem Begriffe des projektiven Raumes kann man auch durch einen Abstraktionsprozeß von der durch das Auge vermittelten sinnlichen Anschauung her gelangen. Indem wir über einige Schwierigkeiten, die mit einer solchen psychologischen Konstruktion zusammenhängen, hinweggehen, wollen wir zusehen, wie sich das Problem, die elementaren Postulate, die den projektiven Raum charakterisieren, anzugeben, darstellt, wenn dessen Begriff als in dem Kopfe des Mathematikers ausgebildet vorausgesetzt wird [152]).

Hier gibt es wesentlich zwei Gruppen von Postulaten:

a) *Die Postulate, die sich auf die Bestimmung von Geraden und Ebenen und auf ihre gegenseitigen Schnitte beziehen* (Postulate des Einanderangehörens).

Vor allem: zwei Punkte bestimmen *eine Gerade* (eine Gesamtheit von Punkten), die auch durch irgend zwei ihrer Punkte bestimmt ist.

Die (vollständige) *Ebene* kann durch *Projektion* der Punkte einer Geraden von einem außerhalb gelegenen Punkte aus *erzeugt* werden.

Es muß dann das fundamentale Postulat von der Ebene gegeben werden, das *M. Pieri* in der folgenden einfachsten Form annimmt: Wenn A, B, C drei nicht in einer Geraden liegende Punkte sind, so haben die Gerade, die durch A und einen Punkt von BC bestimmt ist, und die Gerade, die durch B und einen Punkt von AC bestimmt ist, einen Punkt gemeinsam (vgl. Fußnote 150).

Daraus folgt die Eigenschaft der vollständigen Ebene (in dem projektiven Raume), die durch zwei ihrer Punkte bestimmte (vollständige) Gerade zu enthalten, und die Eigenschaft, daß „zwei Gerade der Ebene immer einen Punkt gemeinsam haben“.

Wie die Ebene durch Projektion der Geraden erzeugt wird, so kann der projektive Raum durch Projektion der Ebene erzeugt werden. Hier wird man dann ferner (wenn man zur gewöhnlichen projektiven Geometrie kommen will) postulieren, daß auf diese Weise die Gesamtheit aller Punkte erschöpft wird, indem man annimmt, daß „eine Gerade und eine Ebene immer einen Punkt gemeinsam haben“. Dieses Postulat entspricht dem anderen der Nr. 17, nach welchem (in dem dort betrachteten Raumstücke) zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, noch einen anderen Punkt gemeinsam haben. Es

152) Diesem Gedankengange gehören an die Arbeiten von: *F. Amodeo,* Torino Atti 26 (1891), p. 741; *G. Fano,* Giorn. di mat. 30 (1892), p. 106; *F. Enriques,* Fußn. 130; *M. Pieri,* Torino Atti 30 (1895), p. 607; 31 (1896), p. 381, 457; 32 (1897), p. 343; Ist. Lomb. Rend. (2) 31 (1898), p. 780, zusammengefaßt in Torino Mem. (2) 48 (1898), p. 1. Vgl. auch *H. Thieme,* Progr. Oberrealschule Posen 1900.

hat die Bestimmung, die Dimensionenzahl des Raumes auf *drei* zu beschränken. Wenn man von diesem Postulate absieht, so erzeuge man durch Projektion einer Ebene von einem äußeren Punkte aus einen *projektiven Raum von drei Dimensionen* S_3; dann kann man, im Gegensatze zu dem eben erwähnten Postulate, annehmen, daß *außerhalb* dieses Raumes noch ein Punkt existiert; wenn man S_3 von diesem Punkte aus projiziert, so erzeugt man einen *projektiven Raum von vier Dimensionen* S_4 usw.

Diese rekurrente Erzeugung der *projektiven Räume von n Dimensionen* S_n ist von *G. Veronese* (III C 9, *Segre,* Mehrdimensionale Räume) entwickelt worden. Fügt man für den S_n (wie für den S_3) die Postulate hinzu, die sich auf die Linieneigenschaften der Geraden und auf die Flächeneigenschaften der Ebene beziehen (diese Postulate werden wir gleich erwähnen), so erscheint der S_n als eine besondere Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, deren charakteristische Eigenschaft durch das in geeigneter Weise zu modifizierende Postulat von der Ebene ausgedrückt ist.

b) *Die Postulate, die sich auf die Linieneigenschaften der Geraden und auf die Flächeneigenschaften der Ebene beziehen.*

Die Gerade des projektiven Raumes ist eine geschlossene Linie, d. h. ihre Punkte sind in einer *cyklischen Anordnung* vorhanden (vgl. Nr. **15**).

Die Eigenschaft der Ebene, eine Fläche zu sein, in welcher die Geraden Linien sind, kann man (wenn man die werdende Figur betrachtet) ausdrücken, indem man den *projektiven Charakter* der cyklischen Anordnung der Punkte der Geraden postuliert[153]). Es folgt aus diesem Postulate in Verbindung mit dem anderen, daß „zwei Gerade einer Ebene immer einen Punkt gemeinsam haben", daß die projektive Ebene eine Fläche mit einem Sinne ist (*L. Schläfli* bei *Klein,* Math. Ann. 7 (1874), p. 550; vgl. Nr. **15**, **23**). Hierbei sei bemerkt, daß der hierin liegende Unterschied zwischen der gewöhnlichen metrischen Ebene und der projektiven Ebene im Raum kein Analogon hat: in dem dreidimensionalen projektiven Raume gibt es immer *zwei ineinander nicht überführbare Schraubensinne.*

19. Projektive Koordinaten. Auf Grund der Postulate der Nr. **17** oder der gleichwertigen der Nr. **18** kann man die Punkte des projektiven Raumes durch die Verhältnisse von vier homogenen Koordinaten (sogenannten *projektiven* Koordinaten) in der Weise darstellen, daß die Ebenen durch lineare Gleichungen dargestellt werden.

153) Vgl. *Enriques,* Vorlesungen über projektive Geometrie, p. 24.

In dem gewöhnlichen (Euklidischen, oder auch nicht-Euklidischen) Raume kann man ein System von projektiven Koordinaten aufstellen, wenn man ein fundamentales Tetraeder und einen Einheitspunkt annimmt und die Projektionen dieses Einheitspunktes auf jede Kante des Tetraeders von der gegenüberliegenden Kante aus betrachtet; in derselben Weise betrachtet man die analogen Projektionen eines willkürlichen Punktes P des Raumes; auf jeder Kante erhält man dann vier Punkte (zwei Eckpunkte des Tetraeders und die Projektionen des Einheitspunktes und des Punktes P), und diese führen auf ein gewisses Doppelverhältnis; die so erhaltenen Doppelverhältnisse liefern gerade die wechselseitigen Verhältnisse der projektiven Koordinaten des Punktes P.[154])

Genau dieselbe Konstruktion wird man zu dem gleichen Zwecke in dem projektiven Raume ausführen, wobei man nur das Doppelverhältnis oder, wie *v. Staudt* sagt, den *Wurf* von vier Punkten einer Geraden als Zahl in deskriptiver Weise definieren wird, d. h. in der Weise, daß man von dem Begriffe der Strecken*länge* absieht, der in der reinen projektiven Geometrie ohne Bedeutung ist.

Diese deskriptive Definition des Doppelverhältnisses ist von *v. Staudt*[155]) gegeben worden im Anschluß an die von ihm eingeführte, später von *J. Lüroth*[156]) erweiterte Rechnung mit Punktquadrupeln oder *Würfen*; diese Definition umfaßt, wenn man noch den Begriff der Involution einführt, auch den Fall komplexer Punkte.

Für den Fall reeller Punkte kann man eine deskriptive Definition des Doppelverhältnisses, das ein Punkt P einer Geraden mit drei gegebenen Punkten A, B, C bildet, geben, die sich auf das gewöhnliche Meßverfahren reduziert, wenn man den Punkt C als den unendlich fernen Punkt der Geraden betrachtet; die Punkte P, für welche das Doppelverhältnis $(ABCP)$ einen rationalen Wert hat (Punkte, die

---

154) Zu diesem (möglichst allgemeinen) Systeme projektiver Koordinaten ist *A. F. Möbius* in dem Buche „Der barycentrische Calcul" (1827) gelangt, indem er die Verhältnisse seiner barycentrischen Koordinaten zu denen eines festen Punktes (des Einheitspunktes) betrachtete und auch bemerkte, daß diese Verhältnisse sich durch Doppelverhältnisse ausdrücken lassen; vgl. im übrigen *W. Fiedler,* Zürich Vierteljahrschr. 15 (1871), p. 152, und „Die darstellende Geometrie", Leipzig, drei Aufl. 1871, 1875, 1885. Über die Einführung des Doppelverhältnisses in die nicht-Euklidische Geometrie vgl. *Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 129.

155) Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856, Heft 2, p. 261. Vgl. *W. Hamilton,* Elements of quaternions, London 1866, p. 24, 62; *W. Fiedler,* Fußn. 154.

156) Math. Ann. 8 (1875), p. 145.

dem durch A, B, C bestimmten *harmonischen Systeme* oder *Netze* angehören), erhält man durch wiederholte Konstruktion der vierten harmonischen Punkte in einer durch den genannten Wert bestimmten Weise, während man zu den Punkten, für welche das Doppelverhältnis irrational ist, durch einen Grenzprozeß gelangt[157]). *v. Staudt* hat dies alles auch auf imaginäre Elemente ausgedehnt (vgl. III A B 6, *Schoenflies*).

20. Bemerkungen über die grundlegenden Sätze der projektiven Geometrie. Mit Hilfe des in Nr. **17** oder in Nr. **18** dargelegten Postulatensystems kann man die projektive Geometrie vollständig begründen (vgl. III A B 6, Projektive Geometrie, *Schoenflies*). Hinsichtlich der Beziehungen, in denen ihre Hauptsätze zu den genannten Postulaten stehen, müssen wir einige Bemerkungen machen.

a) *Über den Desargues*schen *Satz* (Satz von den homologen Dreiecken).

Dieser Satz ist zuerst von *v. Staudt* bei bloßer Benutzung der Postulate des Einanderangehörens durch räumliche Betrachtungen bewiesen worden.

F. Klein hat zuerst[158]) darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht anders geht, indem er zeigte, daß der genannte *Desargues*sche Satz sich nicht beweisen läßt, wenn man sich allein auf die Postulate der projektiven Geometrie eines *ebenen Gebietes* stützt, da sonst folgen würde, daß, wenn auf irgend einer Fläche ein Liniensystem von der Art gegeben ist, daß durch zwei Punkte immer *eine* Linie geht, die Linien des Systems bei Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten sich durch lineare Gleichungen darstellen lassen würden, während dies z. B. für die geodätischen Linien einer Fläche mit variabler Krümmung nach *Beltrami* nicht möglich ist[159]).

Neuerdings hat *D. Hilbert*[160]) in elementarer Weise eine konventionelle Geometrie der *Gesamtebene* begründet, in der der *Desargues*sche Satz nicht gilt, wohl aber die projektiven Postulate. (Dagegen kann man bei Benutzung der Kongruenzpostulate und des Parallelenpostulats

157) Vgl. z. B. *R. De Paolis,* Rom Linc. Mem. 1888/89. Hinsichtlich der Beziehungen, in denen die Einführung der projektiven Koordinaten zu der Bestimmung der Projektivität zwischen zwei abstrakten projektiven Räumen steht, vgl. *F. Enriques,* Lezioni di geometria proiettiva, Bologna 1898, Appendice, deutsche Ausgabe von *H. Fleischer,* Leipzig 1903, Anhang, und Palermo Rend. 12 (1898), p. 222.

158) Math. Ann. 6 (1873), p. 112.

159) *E. Beltrami*, Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 185 (III D 5, *v. Lilienthal*, Nr. **34**, und III D 6 a, *Voß,* Nr. **9**).

160) Grundlagen Nr. **3**. Über die nicht-Desarguessche Geometrie vgl. auch *F. R. Moulton,* Am. Soc. Trans. 3 (1902), p. 192.

den *Desargues*schen Satz in der Ebene, d. h. ohne räumliche Konstruktionen zu Hilfe zu nehmen, beweisen. Vgl. auch Nr. **11**.)

D. Hilbert hat auch bemerkt, daß umgekehrt der *Desargues*sche Satz in der Ebene die Anwendung der Postulate des Raumes beim Beweise der der projektiven Geometrie der Ebene zukommenden Eigenschaften vollständig ersetzt[161]).

b) *Über die Trennung der konjugierten Punkte einer harmonischen Gruppe.*

Dieser Satz ist von *v. Staudt* in einer nicht rein deskriptiven Weise bewiesen worden, indem er den Begriff der metrisch aufgefaßten *körperlichen Ecke* (deren Kanten Halbgerade sind) einführte. Der Beweis von *M. Pasch*[162]) zeigt eine Lücke, weil er die Möglichkeit nicht ausschließt, daß der zu drei Punkten gehörige vierte harmonische Punkt mit einem dieser Punkte zusammenfällt, so daß *G. Fano*[163]) geglaubt hat, daß hier ein neues Postulat eingeführt werden müsse.

Dagegen hat der von *F. Enriques* (Fußnote 137) gegebene Beweis des Satzes klargestellt, daß dieser Satz sich aus den oben ausgesprochenen deskriptiven Postulaten allein herleiten läßt, da er sich wesentlich auf die Ordnungen der Punkte der Geraden und auf deren projektiven Charakter (ohne daß die Stetigkeit nötig wäre) stützt.

c) *Über v. Staudts Fundamentalsatz der Projektivität.*

Durch das Studium der Beziehung zwischen den Punkten zweier Ebenen, in der jeder Geraden eine Gerade entspricht (Kollineation), wurde *v. Staudt* dazu geführt, die „Projektivität" zwischen Geraden (oder Gebilden erster Stufe) als eine umkehrbar eindeutige Beziehung zu definieren, bei der die harmonischen Gruppen erhalten bleiben[164]). Die Konstruktion der Projektivität durch Projizieren und Schneiden hängt dann von dem *fundamentalen Satze* ab: „Die Projektivität zweier Grundgebilde erster Stufe ist durch drei Paare homologer Elemente bestimmt", den *v. Staudt* auf den Fall einer Projektivität mit drei Doppelpunkten auf einer Punktreihe zurückführt. Es ist wichtig hervorzuheben, daß die Bedeutung dieses Satzes wesentlich mit der von *v. Staudt* gewählten Definition der Projektivität zusammenhängt. Wenn man statt der *v. Staudt*schen Definition die Definition *Poncelet*s nimmt:

---

161) Die Benutzung von projektiven Räumen S_n für $n > 3$ beim Beweise von Eigenschaften des Raumes S_3 führt zu keinem Resultate, das man nicht schon aus den Postulaten der projektiven Geometrie des S_3 selbst ableiten könnte; vgl. *C. Segre*, Riv. di mat. 1 (1891), p. 42.

162) Neuere Geometrie, p. 85.

163) Giorn. di mat. 30 (1892), p. 106.

164) Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, § 9.

„Projektiv sind zwei Gerade, die durch Projizieren und Schneiden auf einander bezogen sind"[165]), so bildet die Bestimmung der Projektivität durch drei Paare homologer Punkte einen *fundamentalen Satz nur in eingeschränktem Sinne,* der weniger ausdrückt als der *v. Staudt*sche Satz, insofern man auf ihn allein die Theorie der Kollineation zwischen Ebenen und Räumen nicht begründen kann.

Der deskriptive Beweis, den *v. Staudt* von seinem Satze gegeben hat, zeigt eine Lücke, auf die *C. Weierstraß* in seinen Vorlesungen aufmerksam gemacht hat[166]). Diese wurde auf verschiedene Weise ausgefüllt, indem man die Stetigkeit der Geraden oder etwas, was davon abhängt, zu Hilfe nahm.

Klein[167]), *Lüroth* und *Zeuthen* haben, indem sie den von *v. Staudt* eingeschlagenen Weg, die projektive Beziehung als gegeben vorauszusetzen, verließen, gezeigt, wie diese mit Hilfe von drei Paaren vorgeschriebener homologer Punkte in bestimmter Weise konstruiert werden kann, und zwar, indem man von der Punktreihe ausgeht, die durch drei Punkte einer Geraden vermöge immer neuer Konstruktion des vierten harmonischen Punktes erzeugt wird. *Klein* gründet seinen Beweis auf die Wiederholung der harmonischen Konstruktion für die Grenzpunkte der Reihe; *Lüroth* und *Zeuthen* verschieben die Anwendung der Stetigkeit, indem sie zeigen, wie die Punkte der harmonischen Reihe in jede Strecke eindringen. Die von ihnen angedeutete Konstruktion wird klarer, wenn einer der drei fundamentalen Punkte sich im Unendlichen befindet; alsdann wird die harmonische Reihe von Abszissenwerten, die *Lüroth* und *Zeuthen* benutzen, eine *dyadische Reihe,* d. h. eine Reihe von Brüchen, deren Nenner Potenzen von 2 sind, und es zeigt sich, daß von dieser Reihe sich in jeder Strecke Punkte befinden, sofern man das Archimedische Postulat annimmt. Dieses Postulat betrachtete man damals noch als selbstverständlich; in der Tat ist es als Postulat erst etwas später wieder in Diskussion gezogen worden (von *Stolz*; vgl. Fuß-

165) Diese Definition ist von *L. Cremona,* Elementi di geometria proiettiva, Roma 1873, deutsch von *R. Trautvetter,* Stuttgart 1882, p. 7, und von *J. Thomae,* Ebene geometrische Gebilde, Halle 1873, p. 12, wieder aufgenommen worden. In älteren Darstellungen, auch hervorragender Autoren, wird projektive Beziehung einstufiger Grundgebilde vielfach mit eindeutiger Beziehung verwechselt.

166) *C. Weierstraß* hat auch einen genetischen (aber nicht deskriptiven) Beweis des im engeren (*Poncelet*schen) Sinne verstandenen Satzes gegeben, der, von *E. Kötter* und *H. A. Schwarz* wieder hergestellt, sich in *C. Weierstraß,* Math. Werke 3, p. 161 befindet.

167) Math. Ann. 7 (1874), p. 531; *Lüroth* und *Zeuthen* ebendort 535; vgl. auch Math. Ann. 37 (1890), p. 544, insbesondere p. 565 f.

note 64)[168]. Man erhält so einen gewissermaßen metrischen Beweis des fundamentalen Satzes, der übrigens bei *Pasch* (Fußnote 149) vorkommt.

Darboux[169]) hat sich wieder der *v. Staudt*schen Vorstellung genähert, gibt jedoch der Frage eine analytische Wendung. Indem er die projektive Beziehung zwischen zwei Geraden im *v. Staudt*schen Sinne als gegeben annimmt, zeigt er, daß diese geordnet (und also stetig) ist, und führt dann die Frage auf die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ zurück, deren stetige Lösung $f(x) = ax$ ist. (Siehe auch II A 11, *Pincherle*, Funktionenoperationen Nr. 27).

F. Schur[170]), der den Zahlbegriff vermeidet, überwindet die fundamentale Schwierigkeit des *v. Staudt*schen Beweises, indem er als Postulat annimmt, daß, wenn zwei Punkte sich auf der Geraden in entgegengesetztem Sinn bewegen, es einen Punkt gibt, in dem sie sich begegnen.

F. Enriques[171]) leitet den genannten Satz direkt aus dem in der *Dedekind*schen Form (deskriptiv) angenommenen Postulate der Stetigkeit her.

In allen den oben angedeuteten Beweisen stützt man sich also auf die in deskriptiver oder metrischer Weise ausgesprochene Stetigkeit der Geraden oder wenigstens auf die Möglichkeit, die Gerade als in einer stetigen Mannigfaltigkeit von Elementen enthalten zu betrachten, worin das Archimedische Postulat mit einbegriffen ist.

Die Untersuchung, ob man von dieser Voraussetzung, sofern man Projektivität durch wiederholte Projektion erklärt, absehen kann, hat auf einige Entwicklungen der nicht-Archimedischen projektiven Geometrie geführt, durch die die Frage der Beziehungen zwischen den grundlegenden Sätzen der projektiven Geometrie neu beleuchtet worden ist (vgl. Nr. 42).

d) *Beziehung des Fundamentalsatzes zum Möbiusschen Netz.* Wir

---

168) *F. Klein* (*Fricke-Klein*, Modulfunktionen 1, Leipzig 1890, p. 239 f., und *Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie 1, p. 315 ff.) bemerkt, daß die auf einem Kegelschnitte konstruierte harmonische Reihe auf das engste mit der in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen vorkommenden Dreiecksfigur zusammenhängt; man erkennt alsdann intuitiv die Stetigkeit der Reihe, indem man sieht, daß sich hier Dreiecke von beliebiger Kleinheit darbieten (vgl. II B 4, *Fricke*, Automorphe Funktionen).

169) Math. Ann. 17 (1880), p. 155.

170) Math. Ann. 18 (1881), p. 252; vgl. *Thomae*, Analytische Geometrie der Ebene, und *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, 4. Aufl. 1. Abt., 1898.

171) Ist. Lomb. (Fußn. 137) und Lezioni (Fußn. 153). Vgl. *L. Balser*, Math. Ann. 55 (1901), p. 143.

haben gesagt, daß die (*v. Staudt*sche) Definition der Projektivität zwischen Geraden aus der Betrachtung der Kollineation zwischen Ebenen und Räumen hervorgeht. Aus dem Fundamentalsatze folgt, daß diese Kollineation in der Ebene durch vier, im Raume durch fünf Paare entsprechender Punkte bestimmt ist.

Nun ist dieser Folgesatz seinerseits dem genannten Fundamentalsatze gleichwertig, und es ist bemerkenswert, daß er mit Hilfe der Konstruktion der *Möbius*schen Netze bewiesen werden kann. Betrachtet man z. B. die Ebene, so ergibt sich, daß vier unabhängige Punkte A, B, C, D durch lineale Operationen zu einem System von Punkten führen (dessen Koordinaten zu denen von A, B, C, D, wenn man diese Punkte als die Grundpunkte (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1) annimmt, rational sind); die Koordinaten dieses Systems (das ein *Möbiussches Netz* genannt wird) bedecken auf Grund des Stetigkeitspostulats die ganze Ebene (da infolge des Stetigkeitspostulats jeder Punkt der Ebene, der dem genannten System [dem *Möbius*schen Netz] nicht angehört, als Grenzpunkt des Systems bestimmt ist und also eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Ebene und den rationalen und irrationalen Koordinaten entsteht). Aus dieser Konstruktion leitet *Möbius*, indem er sie als stetig voraussetzt, die Bestimmung der Kollineation ab. Wenn man in einer Kollineation zwischen zwei Ebenen vier Paare unabhängiger Punkte sich entsprechen läßt, so müssen die in homologer Weise konstruierten Punkte der durch die beiden Punktquadrupel definierten Netze ebenso wie ihre Grenzpunkte sich entsprechen, und daher ist die Kollineation bestimmt.

Man bemerke, daß die Annahme der Stetigkeit derjenigen Beziehung (Kollineation), in welcher jeder Geraden einer Ebene eine Gerade entspricht, auf Grund der Stetigkeit der Geraden bewiesen werden kann, wie aus dem von *v. Staudt* angegebenen Verfahren hervorgeht.

e) *Beziehung des Fundamentalsatzes zur Lehre von den Proportionen.* Die Beziehungen des Fundamentalsatzes der Projektivität zur Proportionentheorie gehen aus den folgenden beiden Bemerkungen hervor.

Auf Grund der gewöhnlichen (arithmetischen) Theorie der Proportionen zwischen Strecken kann man ein System von projektiven (insbesondere auch cartesischen) Koordinaten einführen, vgl. Nr. **19**.

Der im engeren (*Poncelet*schen) Sinne verstandene Fundamentalsatz der Projektivität wird mit Hilfe der Invarianz des Doppelverhältnisses bei Projektionen und Schnitten bewiesen, und diese folgt leicht aus der gewöhnlichen Proportionentheorie.

Wie sich die Frage gestaltet, wenn man von der Stetigkeit absieht, darüber vergleiche man den Abschnitt VII.

21. Über die Bedeutung der Begriffe der Anordnung in der Begründung der projektiven Geometrie. Setzen wir nur die fundamentalen Begriffe „Punkt" und „Verbindungslinie zweier Punkte" und die Postulatengruppe a) (Nr. **18**), die sich auf diese Begriffe bezieht, als gegeben voraus, wie weit kann man dann in der Begründung der projektiven Geometrie gehen?

Mit dieser Frage hängt eine Forschungsrichtung zusammen, in der die Punkte nicht als *von vornherein gegeben*, sondern von einigen gegebenen Punkten aus durch lineale Operationen *konstruiert* betrachtet werden, so daß man also eine *projektive Geometrie besonderer Punktsysteme* erhält.

Jene wenigen Annahmen erfordern, daß in unserem Raume oder fundamentalen System wenigstens vier, nicht in einer Ebene liegende Punkte und außerdem ein Punkt außerhalb der durch drei dieser Punkte bestimmten Ebene gegeben sind, so daß auf der Verbindungslinie irgendwelcher zweier Punkte wenigstens ein anderer Punkt konstruiert werden kann. Soweit ist alles wie sonst. Aber es ergibt sich nicht, daß der zu drei Punkten A, B, C einer Geraden gehörige vierte harmonische Punkt (vgl. oben bei *Pasch*, Nr. **20**b) von C verschieden ist, sofern man nicht annimmt, daß dies wenigstens in *einem* Falle eintritt, und noch weniger kann man (auch wenn die genannte Voraussetzung eingeführt sein sollte) erkennen, daß das auf der Geraden von A, B, C aus konstruierte harmonische System unendlich viele Punkte enthält. Es gibt in der Tat Konfigurationen von einer endlichen Zahl von Punkten, die für sich allein genommen den Postulaten a) (Nr. **18**) der projektiven Geometrie genügen[172]).

Führt man dagegen das Postulat ein, daß die Punkte der Geraden in einer cyklischen Anordnung von projektivem Charakter vorhanden sind, so *beweist* man, daß es auf der Geraden und in jeder ihrer Strecken unendlich viele Punkte gibt[173]), und es gelten dann auch alle Eigenschaften der harmonischen Gruppen hinsichtlich der Trennung der Paare, und ebenso diejenigen des harmonischen Systems[174]).

---

172) *G. Fano*, Fußn. 152. Analoge Konfigurationen werden von *E. H. Moore*, Am. Journ. 18 (1896), p. 264 betrachtet. Vgl. auch *G. Hessenberg*, Arch. Math. Phys. (3) 6 (1903), p. 123.

173) Vgl. *Fano-Enriques*, Palermo Rend. 9 (1895), p. 79.

174) Das oben angedeutete deskriptive Konstruktionsverfahren führt zu dem schon erwähnten *Möbiusschen Netze*, wenn man mit linealen Operationen von

Was die Annahme der mit projektivem Charakter versehenen cyklischen Anordnung in der Theorie der harmonischen Gruppen und Systeme bedeutet, ist durch *M. Pieri*[175]) klargestellt worden, der bei dem Unternehmen, die Zahl der primitiven Begriffe zu beschränken (vgl. Nr. **6**), im wesentlichen fand, daß man den Begriff der natürlichen Anordnung aufgeben kann, wenn man folgendes postuliert:

1) der zu drei Punkten A, B, C vierte harmonische Punkt ist von diesen verschieden (das *Fano*sche Postulat; vgl. Nr. **20**);

2) wenn man die dreifache Art betrachtet, in der eine Gerade durch vier Punkte A, B, C, D in zwei Paare von Teilen geteilt wird, so existiert für zwei dieser Zusammenfassungen in zwei Paare ein gemeinsames harmonisches Paar, aber nicht für die dritte;

3) wenn A, B, C, D, E fünf in gerader Linie liegende Punkte sind und zu den Paaren AC, BD und AC, DE harmonische Paare existieren, so existiert auch zu den Paaren AC, BE ein harmonisches Paar;

4) wenn A, B, C, D, E fünf in gerader Linie liegende Punkte sind, die der Reihe angehören, die man, ausgehend von den Punkten $A, B, C,$ durch fortgesetzte Konstruktion des vierten harmonischen Punktes erhalten hat, so kann man einen Punkt X so bestimmen, daß für die Paare AX, DE kein harmonisches Paar existiert.

Die Stetigkeit führt dann auf eine neue Eigenschaft, die *Pieri* in einem engeren Sinne postuliert, indem er nämlich nur die quadratischen Irrationalitäten einführt, von denen die elementare Theorie der Projektivität in Gebilden erster Stufe Gebrauch macht.

IV. Projektive Metrik.

22. Einordnung der gewöhnlichen Metrik in die projektive Geometrie (III AB 4a, Synthetische und analytische Geometrie, *Fano*). Den Euklidischen Raum kann man als einen projektiven Raum betrachten, wofern man seinen (*eigentlichen*) Punkten die *uneigentlichen Punkte* hinzufügt, die die *uneigentliche* oder *unendlich ferne Ebene* bilden (Nr. **9**). Dann kann man, indem man in der unendlich fernen Ebene einen besonderen imaginären Kegelschnitt, den *Kugelkreis*, ge-

---

fünf unabhängigen Punkten des Raumes ausgeht. Innerhalb dieses Netzes gilt der *v. Staudt*sche Satz als Folge des *Desargues*schen Satzes, und der *v. Staudt*sche Satz erstreckt sich auf den Raum, wenn man voraussetzt, daß jeder Raumpunkt ein Grenzpunkt des im Raume zu konstruierenden *Möbius*schen Netzes ist, was eine Folge des Stetigkeitspostulats ist.

175) Torino Mem. (2) 48 (1898), p. 1 und besonders Torino Atti 39 (1904), p. 313.

geben denkt, die *metrischen Eigenschaften* als in die *deskriptiven Eigenschaften eingeordnet* betrachten.

Die Herleitung metrischer Eigenschaften aus den deskriptiven im Hinblick auf die unendlich fernen Punkte kommt schon bei *Poncelet*[176]) vor (der übrigens gewöhnlich in umgekehrter Weise vorgeht).

Poncelet (ibidem 1, Nr. 94 und 593) hat bereits metrische Beziehungen als deskriptive Beziehungen zu den Kreispunkten der Ebene oder zu dem Kugelkreise des Raumes betrachtet, aber nicht den Ausdruck der Entfernung und des Winkels. Dann haben die französischen Geometer und insbesondere *Chasles* die Kreispunkte und den Kugelkreis vielfach als Hilfsmittel beim Beweise gebraucht, indem sie z. B. die Orthogonalität zweier Geraden als die harmonische Trennung ihrer unendlich fernen Punkte durch die Kreispunkte interpretierten. *Laguerre*[177]) (1853) hat bemerkt, daß ein Satz, der einen Winkel enthält, durch Projektion verallgemeinert wird, indem anstelle des Winkels der mit $\frac{i}{2}$ multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses zweier Geraden zu den durch die beiden Kreispunkte gehenden Geraden (den Minimalgeraden oder isotropen Geraden) tritt (dies ist bei ihm keine *Definition* des Winkels, weil ihm [außer der *v. Staudt*schen Einführung des Imaginären] die *v. Staudt*sche Definition des Doppelverhältnisses als einer durch eine projektive Konstruktion festgelegten Zahl fehlt).

A. Cayley[178]) hat (1859) die allgemeinen Ausdrücke der Entfernung und des Winkels als *Invarianten* in bezug auf den Kugelkreis betrachtet und dieselben Invarianten in bezug auf irgend einen Kegelschnitt aufgeschrieben, den er dann als *absoluten* Kegelschnitt, als „*das Absolute*", bezeichnet, ohne jedoch in eine Diskussion in bezug auf die Einzelheiten einzutreten, die sich je nach der Realität (Nicht-Realität) des Kegelschnitts ergeben. *Cayley* verfährt durchaus analytisch; er beginnt mit den homogenen Variablen und den Invarianten von Formen bei linearer Substitution, spricht dann von der Bedeutung derselben für die projektiven Beziehungen innerhalb der Euklidischen Geometrie und interpretiert seine allgemeinen Formeln als solche, die sich auf den absoluten Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene beziehen. Er betrachtet ferner die Ausartung des absoluten

176) Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1821.

177) Sur la théorie des foyers, Nouv. Ann. 12 (1853), p. 57; Oeuvres 2, p. 6; vgl. *H. Faure*, ebenda 18 (1859), p. 381.

178) A. Sixth Memoir on Quantics, Lond. Trans. 149 (1859), oder Coll. math. papers 2, p. 561; vgl. im besondern die Nummern 209—229, und A Memoir on abstract geometry, Lond. Trans. 160 (1870) oder Coll. math. papers 6, p. 456.

Kegelschnitts in ein Punktepaar, auf die er den Fall der Euklidischen Metrik einer beliebig im Endlichen gelegenen Ebene zurückführt.

Wir wollen jedoch zusehen, wie man die systematische Einordnung der gewöhnlichen metrischen Geometrie in die projektive auf *geometrische* Weise erhält.

Diese Einordnung stützt sich auf die folgenden Tatsachen, die sich auf die Gebilde erster, zweiter und dritter Stufe beziehen:[179])

a) Gebilde erster Stufe.

Der Begriff der *Kongruenz* zwischen Strecken *auf derselben Geraden* stellt sich dar als eine Beziehung in einer *Projektivität* mit doppelt zählendem *unendlich fernem Doppelpunkt.*

In dem (eigentlichen) Strahlen- und Ebenen-*Büschel* erscheint die *Kongruenz* der Winkel als die Beziehung in einer *Projektivität, die die vom Träger des Büschels nach den Kreispunkten laufenden Geraden zu Doppelgeraden hat, d. h. die Involution der rechten Winkel in sich selbst transformiert.*

b) Gebilde zweiter Stufe.

In der Ebene wird aus dem Begriffe der *Ähnlichkeit* (Kongruenz der Winkel und Proportionalität der Strecken) die Beziehung in einer *Projektivität, die die Kreispunkte* (d. h. die Doppelpunkte der [absoluten] Involution, in der die unendlich fernen Punkte orthogonaler Geraden sich entsprechen) *fest läßt.*

Die *Kongruenz zweier Strecken* läßt sich daher deskriptiv mit Hilfe der (zu der unendlich fernen Geraden und den Kreispunkten auf ihr bereits in Beziehung gesetzten) Begriffe des Parallelismus und der Orthogonalität definieren; in der Tat sind nur folgende zwei Regeln zu beachten:

α) Zwei kongruente Strecken, die einen Endpunkt gemeinsam haben, sind an einander stoßende Seiten eines Parallelogramms mit zu einander rechtwinkligen Diagonalen.

β) Zwei parallele kongruente Strecken sind gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms.

Und mit Hilfe dieser beiden Fälle kann man irgend welche zwei Strecken mit einander vergleichen.

In dem (eigentlichen) *Bündel* erscheint die *Kongruenz* als eine *Projektivität, die die zwischen zu einander normalen Geraden und Ebenen bestehende (orthogonale) Polarität in sich selbst transformiert.*

c) Gebilde dritter Stufe.

Im Raume kann man die *Ähnlichkeit* (Kongruenz der Winkel

179) Vgl. z. B. *F. Klein,* Nicht-Euklidische Geometrie, und *F. Enriques,* Vorlesungen über projektive Geometrie.

und Proportionalität der Strecken) als *eine Projektivität* definieren, *die den Kugelkreis*, d. h. den Fundamentalkegelschnitt der *absoluten* Polarität der unendlich fernen Ebene (des Schnittes der orthogonalen Polarität irgend eines Bündels), *in sich selbst transformiert.*

Die *Kongruenz* von Strecken kann man deskriptiv z. B. wie in der Ebene definieren, indem man auf den Fall paralleler Strecken oder solcher mit einem gemeinsamen Endpunkte zurückgeht (oder auch indem man sich auf die Tatsache stützt, daß die räumlichen Kongruenzen Kollineationen sind, die im allgemeinen keine eigentlichen Doppelpunkte haben).

Nun erscheinen alle Kongruenzsätze der gewöhnlichen metrischen Geometrie als Zusätze zu den Sätzen der projektiven Geometrie.

Um zur *analytischen* Darstellung zu kommen, gehe man von einem System projektiver Koordinaten aus, indem man als fundamental ein Tetraeder nimmt, von dem drei (in der uneigentlichen Ebene $x_4 = 0$ gelegene) Eckpunkte ein konjugiertes Dreieck in bezug auf den absoluten Kegelschnitt bilden. In der Ebene $x_4 = 0$ gibt es ein bestimmtes Viereck mit den Diagonalpunkten (0010) (0100) (1000), dessen gegenüberliegende Seiten in bezug auf den absoluten Kegelschnitt konjugiert sind. Nimmt man den Punkt (1110) in einem der Eckpunkte des genannten Vierecks an (der auf diese Weise in der unendlich fernen Ebene die Projektion des Einheitspunktes von dem eigentlichen Eckpunkte des Fundamentaltetraeders aus wird), so nimmt die Gleichung des absoluten Kegelschnittes die Form an:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (x_4 = 0).$$

Zur Bestimmung des Winkels zweier Geraden braucht man dann nur ihre Richtungen, d. h. ihre unendlich fernen Punkte $(x_1 x_2 x_3 0)$, $(y_1 y_2 y_3 0)$ zu kennen. Der Ausdruck für den *Winkel* ist dann:

$$W_{xy} = \frac{i}{2} \log \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \sqrt{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}}{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - \sqrt{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}}.$$

Die *Entfernung* zweier Punkte kann man durch die Formel:

$$D_{xy} = k \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_4} - \frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_4} - \frac{y_2}{y_4}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_4} - \frac{y_3}{y_4}\right)^2}$$

ausdrücken, wo k eine Konstante ist, die von der Wahl des Einheitspunktes abhängt, den man auf der Geraden $x_1 = x_2 = x_3$ willkürlich annehmen kann (vgl. Fußnote 183). Beide Ausdrücke sind Invarianten in bezug auf die vorstehende Gleichung des absoluten Kegelschnittes.

23. Allgemeine Maßbestimmung von Cayley und deren nicht-Euklidische Auslegung von Klein. Aus dem Gesagten geht hervor, daß man in jedem projektiven Raume eine *konventionelle Metrik* auf-

stellen kann, die mit der gewöhnlichen Metrik begrifflich übereinstimmt, wenn man festsetzt, daß eine Ebene des Raumes als uneigentlich und ein Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in ihr als absolut betrachtet werden soll. Es entsteht dann der Gedanke, dieses System von Konventionen zu verallgemeinern, indem man eine neue, der projektiven Geometrie eingeordnete Metrik definiert, welche irgend ein Gebilde zweiten Grades als absolutes Gebilde zugrunde legt.

Auf diese Weise entsteht Cayleys allgemeine projektive Maßbestimmung [180]).

Und nun ist das Wichtige, daß diese allgemeine projektive Maßbestimmung *die verschiedenen Arten der nicht-Euklidischen Geometrie ebenso einschließt wie insbesondere die gewöhnliche Euklidische Geometrie.* Dies trat teilweise bereits in den Arbeiten von *Beltrami* [181]) und dann vollständig in denjenigen von *Klein* [182]) hervor. Zu dem Zwecke waren die verschiedenen Fälle der Realität des absoluten Gebildes zu diskutieren und gleichzeitig war in die Formel für die Entfernung zweier Punkte ein Faktor k aufzunehmen, der je nachdem reell oder rein imaginär gewählt wird. Gleichzeitig entwickelte *Klein* die grundlegende Bedeutung der in Rede stehenden Beziehung, indem er auf *v. Staudts* Begründung der projektiven Geometrie und des Rechnens mit Würfen zurückging und diese von der durch *v. Staudt* noch festgehaltenen Abhängigkeit vom Euklidischen Parallelenpostulat befreite. *Das Resultat ist, daß die verschiedenen Arten der nicht-Euklidischen Geometrie ebenso auf projektiver Basis aufgebaut sind,* wie nach Nr. **19** die Euklidische Geometrie.

Klein definiert die *Cayley*sche Maßbestimmung in den verschiedenen Gebilden folgendermaßen:

a) *Gebilde erster Stufe.* Man nehme zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Elemente P, Q an, die das *absolute* Paar bilden, und es sei

$$\Omega_{zz} = a z_1^2 + 2b z_1 z_2 + c z_2^2 = 0$$

die Gleichung dieses Paares.

Das *Intervall* (*Entfernung* oder *Winkel*) zweier Elemente $A \equiv (x)$, $B \equiv (y)$ wird durch die Formel

---

180) Fußn. 178; vgl. auch *G. Battaglini*, Napoli Rend. 3 (1867) oder Nouv. Ann. (2) 7, p. 209, 265; *G. Salmon* und *W. Fiedler,* Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig, fünf Auflagen, von der zweiten Auflage 1867 an; fünfte Aufl. 1888, 2, Kap. 20; *F. Lindemann* bei *A. Clebsch* und *F. Lindemann,* Geometrie 2[1], 1891, Abschn. 3.

181) Giorn. di mat. 6 (1868), p. 285 und Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 232.

182) Gött. Nachr. 1871, p. 419; Math. Ann. 4 (1871/72), p. 573.

$$\overline{AB} = k \log (ABPQ) = k(xy) = k \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

definiert, wo Ω_{xy} die Polarform

$$\Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$$

und k einen konstanten Faktor bedeutet.

Man erhält zwei verschiedene allgemeine Maßbestimmungen: die *elliptische* und die *hyperbolische*, die dem negativen und dem positiven Zeichen der Diskriminante von Ω entsprechen.

Im elliptischen Falle, in dem man den Faktor k rein imaginär nimmt, ist das Intervall zweier Elemente immer reell, und für $k = \frac{1}{2i}$ wird es gegeben durch

$$\cos \alpha = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

so daß man eine Metrik gleich der gewöhnlichen Metrik des Büschels (im Euklidischen Falle, wie in den nicht-Euklidischen Fällen) erhält. Das ganze Gebilde hat eine endliche Länge, die für die natürliche Maßeinheit $\left(k = \frac{1}{2i}\right) \pi$ beträgt[183]).

Im hyperbolischen Falle, in welchem man das k reell nimmt, wird das Intervall zweier Elemente nur dann reell sein, wenn die beiden Elemente das absolute Paar PQ nicht trennen, während das Intervall der beiden Elemente P, Q von jedem anderen Elemente aus als unendlich erscheinen wird. Wenn man daher eine der beiden Strecken PQ als aus eigentlichen Elementen gebildet betrachtet und das andere (das als uneigentlich oder ideal für die metrische Anschauung angesehen wird) ausschließt, so erhält man eine Metrik, die mit der der Punktreihe in der *Bolyai-Lobatschefskij*schen Geometrie zusammenfällt.

Man erhält eine spezielle oder *parabolische* Maßbestimmung, wenn P, Q zusammenfallen.

Dann hat die Formel, die das Intervall $\overline{AB}$ definiert, keinen unmittelbaren Sinn mehr; man kann jedoch $\overline{AB}$ durch einen Grenzprozeß definieren, indem man P, Q als sich unbegrenzt nähernd betrachtet und k umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der

183) *Cayley* hat in der Tat nur diese Cosinusformel. Die bei *Klein* auftretende Formel mit dem Logarithmus bildet zugleich die Brücke zu der oben erwähnten Angabe *Laguerres* über den gewöhnlichen Winkel. Das Wesentliche bei *Klein* aber besteht in der Einfügung der frei zu wählenden Konstanten k (für die *Laguerre* und implicite *Cayley* ausschließlich den Wert $\frac{1}{2i}$ haben).

Diskriminante von Ω setzt. Alsdann läßt sich der Ausdruck für das Intervall auf die Differenz zweier Doppelverhältnisse zurückführen, wobei zwei Hilfselemente C, D auftreten, so daß die Formel folgende wird:

$$\overline{AB} = (CDBP) - (CDAP).$$

Das Intervall $\overline{AB}$ erscheint hier nur bis auf einen konstanten Faktor (die willkürliche Wahl der Maßeinheit) bestimmt.

Dieser Fall entspricht der gewöhnlichen Metrik der Punktreihe in der Euklidischen Geometrie. Die Namen *elliptisch*, *hyperbolisch*, *parabolisch* sind dabei in bekannter Analogie zu dem Verhalten von Ellipse, Hyperbel, Parabel der gewöhnlichen unendlich fernen Geraden gegenüber derart gewählt, daß sie die Fälle *imaginärer*, *reeller* und *zusammenfallender* Grundpunkte bezeichnen.

Als „Bewegungen" der Grundgebilde in sich erscheinen im elliptischen und hyperbolischen Falle kurzweg diejenigen projektiven Umformungen derselben, welche das absolute Paar fest lassen.

Wir wollen schließlich bemerken, daß die *Cayley*sche Maßbestimmung in den Gebilden erster Stufe die allgemeinste Erweiterung der gewöhnlichen Metrik der Punktreihe und des Büschels ergibt, wenn man die folgenden Eigenschaften aufrecht erhalten will:

das Intervall zweier Elemente bleibt bei ∞^1 reellen Projektivitäten (den Bewegungen) ungeändert;

es besitzt außerdem die *additive* Eigenschaft ($\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$).

b) *Gebilde zweiter Stufe.* Wir fassen der Einfachheit wegen den Fall des *ebenen Punktsystems* ins Auge.

Ist $\Omega_{xx} = 0$ die Gleichung des absoluten Kegelschnitts in Punktkoordinaten, $\Phi_{uu} = 0$ seine Gleichung in Linienkoordinaten, so setzt man die Entfernung zweier Punkte wie vorhin

$$D_{xy} = k \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

andererseits den Winkel zweier Geraden

$$A_{uv} = k' \log \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

unter k' eine zweite Konstante verstanden, der man einen beliebigen Wert erteilen kann.

Man führt nun die Beschränkung ein, daß die Maßbestimmung im Büschel immer elliptisch sein soll (worauf man $k' = \frac{i}{2}$ setzt, um die Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Winkelmessung herbeizuführen). Es bleiben die drei Fälle, daß der absolute Kegelschnitt

entweder imaginär ist (*elliptischer* Fall),

oder reell ist, daß man aber nur die Punkte seines Innern betrachtet (*hyperbolischer* Fall),

oder endlich in ein imaginäres Punktepaar ausgeartet ist; man betrachtet ausschließlich diejenigen Punkte (als Büschelpunkte), die nicht auf der reellen Verbindungsgeraden des absoluten Punktepaares liegen (*parabolischer* Fall).

Im ersten Falle ist k rein imaginär zu nehmen, im zweiten reell, im dritten unendlich groß. *Diejenige Größe,* welche man in der Theorie des Bogenelementes als *Krümmungsmaß einer Maßbestimmung bezeichnet* (s. u. Nr. 24), *ist in den vorliegenden Fällen* $-\frac{1}{4k^2}$.

Im elliptischen Falle erscheinen alle Geraden geschlossen und von endlicher Länge wie die Strahlenbüschel, und die Ebene hat nur einen endlichen Inhalt. Es entspricht dies der *Riemann*schen Annahme, bei der es keine Parallelen gibt (Nr. 8). Das *Krümmungsmaß ist positiv.* Die Maßbestimmung fällt für $k = \frac{i}{2}$ mit der gewöhnlichen Maßbestimmung des Bündels zusammen.

Im hyperbolischen Falle sind alle Geraden offen und von unendlicher Länge, und es gibt durch einen Punkt zu einer Geraden zwei Parallele. *Das Krümmungsmaß ist negativ.* Dies entspricht der *Bolyai-Lobatschefskij*schen Annahme.

Im parabolischen Falle (der als Übergangsfall der beiden anderen anzusehen ist) hat man die Verhältnisse der *Euklidischen* Metrik; speziell ist die Verbindungsgerade des absoluten Punktepaares die „unendlich ferne Gerade" der gewöhnlichen Geometrie. *Das Krümmungsmaß ist Null.*

Übrigens kann man zur bequemen Beherrschung der Formeln etwa

$$\Omega_{xx} = x_3^2 - a(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\Phi_{uu} = a u_3^2 - (u_1^2 + u_2^2)$$

nehmen, wobei $a > 0$ auf den hyperbolischen Fall, $a < 0$ auf den elliptischen Fall, $a = 0$ auf den parabolischen Fall führt. Im parabolischen Falle muß man dann, ehe man zur Grenze $a = 0$ übergeht, $k = \frac{c}{\sqrt{a}}$ setzen, unter c eine endliche Größe verstanden.

c) *Gebilde dritter Stufe.* Indem wir den Fall mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten (in denen man übrigens ganz entsprechend operieren würde) beiseite lassen, bezeichnen wir das Gebilde dritter Stufe kurzweg als *Raum* (Punktraum oder Ebenenraum). An Stelle des absoluten Kegelschnitts, den wir gerade betrachteten,

tritt jetzt eine *absolute Fläche zweiten Grades.* Die Formeln und auch die Spezialdiskussion derselben bleibt dabei ganz ähnlich wie vorhin, sobald wir nur die Bedingung einführen, daß die Maßbestimmung im Ebenenbüschel auf alle Fälle elliptisch sein soll.

Man erhält wieder drei Fälle, die als *elliptisch, hyperbolisch* und *parabolisch* bezeichnet werden und den Annahmen von *Riemann, Bolyai-Lobatschefskij* und *Euklid* entsprechen:

Im elliptischen Falle ist die absolute Fläche imaginär.

Im hyperbolischen Falle ist sie reell und nicht geradlinig; für die metrischen Konstruktionen kommen nur die Punkte ihres Inneren in Betracht.

Im parabolischen Falle ist die absolute Fläche in einen imaginären Kegelschnitt ausgeartet, dessen Ebene die Rolle der sogenannten unendlich fernen Ebene übernimmt.

Im elliptischen Falle gibt es im gewöhnlichen Sinne natürlich keine Parallelen. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß *W. K. Clifford* die gewöhnliche Definition der Parallelen so erweitert hat, daß wieder durch einen Raumpunkt zu einer gegebenen Geraden zwei „Parallele" konstruiert werden können, die aber zu der gegebenen Geraden windschief sind. Es führt dies zu besonders beachtenswerten Entwicklungen[184]).

Als „Bewegungen" in der Ebene und im Raum erscheinen in den nicht-Euklidischen Fällen diejenigen Kollineationen, welche das absolute Gebilde fest lassen.

Haben wir so von der projektiven Geometrie beginnend unter Annahme je eines geeigneten absoluten Gebildes vom zweiten Grade die dreierlei in Betracht kommenden Fälle der Maßgeometrie konstruiert, so kann man auch die umgekehrte Aufgabe behandeln, von einer beliebigen der drei Maßgeometrien beginnend die projektive Geometrie aufzubauen. Bei der elliptischen Geometrie geht dies ohne weiteres, bei der parabolischen hat man in bekannter Weise die unendlich fernen Punkte als Punkte einer „uneigentlichen" Ebene zu adjungieren. Bei der hyperbolischen Geometrie hat man nicht nur die unendlich fernen Punkte hinzuzunehmen (die eine „uneigentliche" Fläche zweiten Grades, eben die absolute Fläche bilden werden), sondern auch die „idealen" Punkte, in denen solche gerade Linien einer beliebigen Ebene, welche sich weder im Endlichen schneiden noch parallel sind, zusammenlaufen.

---

184) Vgl. *Clifford,* Lond. Math. Soc. Proc. 1871, 1874, 1876 (Math. pap. Nr. 20, 26, 41, 42, 44), sowie *F. Klein,* Math. Ann. 37 (1890), p. 544.

Man kann diese ganzen Betrachtungen dahin erweitern, daß man den Fall *irgend einer* absoluten Fläche zweiten Grades betrachtet, d. h. indem man von der Bedingung, daß die Metrik im Büschel elliptisch sein soll, absieht. *Cayleys* projektive Maßbestimmung liefert so *Geometrien*[185]), die im Gegensatz zu der gewöhnlichen allgemeinen Metrik auf (reelle) Gerade von der Länge Null, auf Winkel von unendlicher Größe, auf nicht kongruente Gerade usw. führen.

24. Verschiedene Bemerkungen zu den projektiven Maßbestimmungen. An die projektiven Maßbestimmungen schließen sich einige Bemerkungen an:

a) *Über die tangierende parabolische Maßbestimmung.*

Ist ein Punkt A des hyperbolischen oder elliptischen Raumes gegeben, so kann man eine parabolische Metrik betrachten, die sich von der Metrik, die zu der Umgebung von A gehört, um unendlich kleine Größen höherer Ordnung unterscheidet; diese zu der gegebenen *tangierende* Maßbestimmung erhält man, wenn man den Kegelschnitt, der als Schnitt der absoluten Fläche zweiten Grades mit der Polarebene von A entsteht, zum absoluten Kegelschnitt nimmt und übrigens die Längeneinheit zweckmäßig wählt[186]).

Als Maß für den Unterschied zwischen der tangierenden Maßbestimmung und der im Raume gegebenen Metrik kann man eben den Ausdruck $-\frac{1}{4k^2}$ nehmen, den wir in Nr. 23 als das *Krümmungsmaß* bezeichneten. Es ergibt sich hier also eine anschauliche Interpretation dieser Größe.

b) *Über die Zusammenhangsverhältnisse des metrischen Raumes.*

In dem hyperbolischen und dem parabolischen Falle ist die Gerade eine offene Linie. Die Ebene ist eine *einfach zusammenhängende* Fläche (die durch eine geschlossene Linie immer in zwei Teile geteilt wird) und *zweiseitig*, d. h. (Nr. 15) von der Art, daß auf ihr um einen Punkt zwei entgegengesetzte Drehungssinne zu unterscheiden sind, die durch Verschiebung des Punktes über die Fläche hin nicht in einander übergeführt werden können; die beiden genannten Sinne sind die beiden Sinne, in denen die Punkte des Kegelschnittes oder der Grenzgeraden, die das Absolute bilden, gemäß den Grundsätzen der projektiven Geometrie angeordnet werden können.

Im elliptischen Falle ist die Gerade eine geschlossene Linie, und die Ebene (die projektive Ebene in ihrer Gesamtheit) wird erst durch eine Zerschneidung längs zweien unbegrenzten Geraden in Stücke zer-

---

185) Vgl. *Poincaré*, Paris Bull. soc. math. de France 15 (1887), p. 203.

186) *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 573.

legt. Zugleich ist sie *einseitig*, d. h. von der Beschaffenheit, daß sich auf ihr nicht mehr zwei in einander nicht überführbare Drehungssinne um einen Punkt unterscheiden lassen. Diese Bemerkung[187]) kann man verifizieren, indem man bemerkt, daß das gewöhnliche Strahlenbündel ein genaues Abbild der elliptischen Ebene darstellt; hierdurch erklärt sich die Schwierigkeit, die elliptische Ebene sich anschaulich vorzustellen.

Die genannten Unterschiede im Zusammenhange der Ebene treten deutlich hervor, wenn man die durch Projektion von einem Punkte A aus erhaltene Abbildung einer nicht-geradlinigen Fläche zweiten Grades auf eine nicht durch A gehende Ebene betrachtet. Auf dieser Ebene erscheint als Umriß der Abbildung ein Kegelschnitt, der reell, imaginär oder in ein imaginäres Punktepaar (mit reeller Verbindungslinie) ausgeartet ist, je nachdem A außerhalb, innerhalb oder auf der Fläche zweiten Grades angenommen ist. *Auf diesen Kegelschnitt gründe man nun innerhalb der Bildebene in der seither besprochenen Weise eine Cayleysche Maßbestimmung und übertrage diese rückwärts durch die Projektion auf die Fläche zweiten Grades.* Als Ort der unendlich fernen Punkte wird dabei auf der Fläche zweiten Grades deren Schnitt mit der Polarebene α des Punktes A erscheinen. Liegt A außerhalb der Fläche zweiten Grades, so ist dies ein reeller Kegelschnitt, liegt er auf der Fläche, ein bloßer Punkt, liegt er innerhalb, so ist es eine imaginäre Kurve.

Als Bild der hyperbolischen Ebene erscheint so eine (einfach zusammenhängende) Kalotte der Fläche zweiten Grades, als Bild der parabolischen Ebene die mit einer punktförmigen Öffnung versehene Fläche zweiten Grades (was im Sinne der Analysis situs [III A B 3, Abschn. D, Nr. 2] ebenfalls eine einfach zusammenhängende Fläche ist). *Als Bild der elliptischen Ebene aber erscheint die Gesamtfläche zweiten Grades, nur daß die Beziehung zwischen ihr und der Ebene zwei-eindeutig ist:* jedesmal geben zwei mit A auf derselben Projektionsgeraden liegende Punkte der Fläche einen und denselben Punkt der Bildebene. Dies wird besonders deutlich, wenn man als Fläche zweiten Grades die Kugel, als Punkt A den Mittelpunkt derselben wählt; die Maßgeometrie, welche man von der Ebene auf die Kugel überträgt, ist dann nichts anderes als die gewöhnliche Maßbestimmung der sphärischen Geometrie[188]). Jetzt schneiden sich zwei geodätische Linien in zwei diametral liegenden Punkten; umgekehrt gehen durch zwei solche Punkte unendlich viele solche Linien hindurch (vgl. oben Nr. 9).

---

187) Vgl. *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie 1 (1893), p. 98.

188) Vgl. *F. Klein*, Erlanger Programm Note VI, p. 46.

Übrigens ist die auf diese Weise auf der Fläche zweiten Grades erhaltene Maßbestimmung auch an sich bemerkenswert. Man wähle als Fläche zweiten Grades der Einfachheit halber wieder die Kugel, als Ebene α die Äquatorebene, als Punkt A also den unendlich fernen Punkt der Polachse. Dann überträgt sich die hyperbolische Geometrie, welche man in der Äquatorebene auf den Äquator als absoluten Kegelschnitt gründen kann, in der Art auf die Kugel, daß die geraden Linien durch Halbkreise ersetzt sind, die auf der Äquatorebene senkrecht stehen, die nicht-Euklidischen Winkel aber, welche die Geraden mit einander bilden, durch die gewöhnlichen Winkel, welche die Halbkreise auf der Kugel mit einander einschließen. Schließlich mag man die Kugel von einem beliebigen Äquatorpunkte aus mitsamt der auf ihr konstruierten Maßbestimmung stereographisch projizieren. Dann hat man in der neuen Projektionsebene als Bild des Äquators, des Trägers der unendlichen Werte der hyperbolischen Maßbestimmung, eine gerade Linie. Die geraden Linien der hyperbolischen Maßbestimmung sind durch die Halbkreise ersetzt, welche zu diesen geraden Linien normal stehen, die Winkel der hyperbolischen Ebene aber durch die gewöhnlichen Winkel, unter denen sich diese Halbkreise im Sinne der Euklidischen Geometrie schneiden. *Dies ist dasjenige Bild der hyperbolischen Geometrie, mit dem Poincaré bei seinen bekannten funktionentheoretischen Untersuchungen gewöhnlich arbeitet.* Man kann bei drei Dimensionen ein ganz entsprechendes Abbild konstruieren[189]).

c) *Über das Gesetz der Dualität.*

Das in der projektiven Geometrie gültige Gesetz der Dualität gilt auch noch für die metrischen Eigenschaften in der elliptischen Geometrie, in der das Absolute (Nr. 22) in bezug auf die Punkte und Ebenen in symmetrischer Weise angenommen ist. Insofern ist die elliptische Geometrie die schönste von allen (*Clifford*). In der hyperbolischen und parabolischen Geometrie liegt die Sache anders. In der hyperbolischen Geometrie steht dem Ausschluß der uneigentlichen, in bezug auf die absolute Fläche zweiten Grades äußeren Punkte nicht der Ausschluß der schneidenden Ebenen, wie es das Gesetz der Dualität erfordern würde, sondern vielmehr der der äußeren Ebenen gegenüber. In der parabolischen Geometrie ist das Absolute selbst, das als Klassenkurve (-fläche) einmal und als Ordnungskurve (-fläche) zweimal ausgeartet ist, zu sich selbst nicht korrelativ.

---

189) *Poincaré,* Acta math. 1 (1882), p. 1. Siehe auch *Fricke-Klein,* Automorphe Funktionen 1.

d) *Über die Postulate der metrisch-projektiven Geometrie.*

Welche metrischen Begriffe und welche von ihnen handelnden Postulate muß man den Begriffen und Postulaten der projektiven Geometrie hinzufügen, um die allgemeine metrische Geometrie zu begründen?

Auf diese Frage erhält man zwei einfache Antworten im Hinblick auf das in Nr. 22 Gesagte:

Um die allgemeine metrische Geometrie zu begründen, hat man den deskriptiven Begriffen und Postulaten nur den (als primitiven metrischen Begriff betrachteten) Begriff der Orthogonalität von Ebenen hinzuzufügen, deren fundamentale Eigenschaften man postuliert.

In der Tat kann man auf Grund dieser Eigenschaften die orthogonalen Ebenen als in einer räumlichen Polarität konjugiert betrachten, und diese Polarität definiert die absolute Fläche zweiten Grades[190]).

Man braucht dann nur das Parallelenpostulat in einer der drei Formen hinzufügen, um die drei Fälle der allgemeinen Metrik von einander zu unterscheiden.

Man kann sich auch so ausdrücken:

Um die allgemeine metrische Geometrie zu begründen, hat man den deskriptiven Begriffen und Postulaten nur den (metrisch primitiven) Begriff der Bewegungen, als Glieder einer Gruppe projektiver Transformationen betrachtet, deren fundamentale Eigenschaften postuliert werden müssen, hinzuzufügen (Nr. 23).

Die Eigenschaften, welche die Gruppe der Bewegungen als projektive Gruppe einer Fläche zweiten Grades charakterisieren, können auf verschiedene Weise ausgesprochen werden, z. B. indem man der Tatsache Rechnung trägt, daß die genannte Gruppe die kleinste projektive Gruppe ist, die auf die Punkte, die Geraden und die Ebenen transitiv wirkt (*Killing*).

V. Prinzipien der allgemeinen Metrik.

25. Vorbemerkung. Den allgemeinen Untersuchungen über die Metrik der Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen liegt entweder der Begriff der *Entfernung* oder der der *Bewegung* zugrunde. Dementsprechend trennen sich diese Untersuchungen nach zwei Hauptrichtungen. Die erste Art der Betrachtung (welche von dem Begriffe der Entfernung ausgeht) knüpft zumeist an den Ausdruck für die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte (das sogenannte

190) Vgl. die zusammenhängende Darstellung bei *Enriques,* Vorlesungen über projektive Geometrie, p. 179 ff.

Bogenelement) an; es gibt aber auch Arbeiten, die mit dem Ausdrucke für den endlichen Abstand zweier Punkte beginnen. Man setzt dabei selbstverständlich die Mannigfaltigkeit als Zahlenmannigfaltigkeit voraus. Die zweite Betrachtungsart knüpft in entsprechender Weise an die Ideen der Gruppentheorie an. Hiernach ist die im folgenden einzuhaltende Haupteinteilung gegeben.

A. Bogenelement (nebst endlicher Entfernung).

26. Geometrie auf krummen Flächen. Man geht von derjenigen Erweiterung des Begriffes der Entfernung zweier Punkte auf der Geraden aus, die in dem Begriffe der *Entfernung zweier Punkte auf einer Linie* oder der *Länge eines Liniensegmentes* oder *Bogens* enthalten ist; diese Länge hängt (wenn die notwendigen Bedingungen der Stetigkeit und Derivierbarkeit, die wir immer stillschweigend als erfüllt annehmen wollen, vorausgesetzt werden) in stetiger und derivierbarer Weise von den Endpunkten des Bogens und der Gestalt der Linie ab und besitzt die *additive Eigenschaft*, infolge deren sie durch den Ausdruck des *Bogenelementes*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

der Linie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ definiert ist.

Die angegebene Formel liefert für das *Linienelement auf einer Fläche* (III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 34, und III D 3, *v. Lilienthal*, Nr. 4, 8)

$$x = x(uv), \quad y = y(uv), \quad z = z(uv),$$

d. h. für die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte der Fläche

$$(u, v), \quad (u + du, \; v + dv)$$

den folgenden Ausdruck:

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2},$$

wo

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Dann führt die Betrachtung der *geodätischen* Linien unter der Voraussetzung, daß zwei Punkte der Fläche auf dem betrachteten Flächenstücke nur *eine* geodätische Linie bestimmen, zu der Definition der *Entfernung* irgend welcher *zweier Punkte* $(u_1 v_1)$, $(u_2 v_2)$ *auf der Fläche.*

Die Maßgeometrie, die man so auf einer Fläche erhält, ist wesentlich auf genügend kleine, einem beschränkten Teile (u, v) der Zahlen-

ebene entsprechende Flächenteile beschränkt, d. h. sie kann in diesem Sinne eine *differentiale Maßgeometrie* genannt werden.

Hier ist der Begriff der *auf einander abwickelbaren* oder besser *isometrischen Flächen* (deren Linienelemente ds, ds' durch dieselben Formeln gegeben sind), für welche *dieselbe differentiale Maßgeometrie gilt* (III D 6 a, *Voß*, Nr. **2**, **34**), fundamental.

So erhält man eine genaue Abbildung der gewöhnlichen differentialen *Maßgeometrie der Ebene* in der Geometrie auf den auf die Ebene *abwickelbaren Flächen* usw.

Es muß jedoch gleich hier ausdrücklich bemerkt werden, daß, wenn zwei analytisch definierte und in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtete Flächen gegeben sind, die Tatsache, daß auf ihnen dieselbe differentiale Maßgeometrie gilt, nicht die Konsequenz nach sich zieht, daß die Maßgeometrie auf einer von ihnen, als *Ganzes* betrachtet, ihre genaue Abbildung in der Maßgeometrie der anderen findet; hier kommen vielmehr noch die Zusammenhangsverhältnisse der beiden Flächen in Betracht (Abschn. VI); so ist z. B. die Maßgeometrie auf dem Kreiszylinder von der auf der Euklidischen Gesamtebene verschieden (Nr. **37**).

Ferner rührt von *Riemann* der Gedanke her, beim Studium eines gegebenen ds^2 von jeder besonderen Form einer zugehörigen Fläche des R_3 abzusehen und die *abstrakte Mannigfaltigkeit* (u, v) zu betrachten, für welche das Gesetz der Entfernung zwischen zwei unendlich benachbarten Punkten durch die Formel

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (E = E(uv),\ F = F(uv),\ G = G(uv))$$

definiert wird. Die Krümmung einer Fläche, oder genauer das von *Gauß* sogenannte *Krümmungsmaß* k (III D 1, 2, Nr. **36**, und III D 3, Nr. **33**) der Fläche in einem beliebigen Punkte, d. h. das reziproke Produkt der zum Flächenpunkte gehörigen Hauptkrümmungsradien, ist bekanntlich bei beliebiger Abwickelung der Fläche (Verbiegung der Fläche ohne Dehnung) eine Invariante. Dementsprechend drückt sich dasselbe durch die im Ausdrucke für ds^2 auftretenden Koeffizienten E, F, G und deren nach u, v genommene Differentialquotienten aus; die konkrete Gestalt, welche die betrachtete Fläche im Raume hat, fällt ganz weg. Bei der abstrakten Mannigfaltigkeit u, v verliert der Ausdruck „Krümmung“ an sich jede anschauliche Bedeutung; man hat nunmehr eine aus E, F, G und ihren nach u, v genommenen Differentialquotienten zusammengesetzte Differentialinvariante (welche ungeändert bleibt, wenn man in ds^2 für u, v irgend zwei andere Veränderliche einsetzt). Trotzdem hat man für diese Invariante die Be-

nennung *Krümmungsmaß* beibehalten; man spricht dann aber, um Mißverständnisse zu vermeiden, besser nicht vom Krümmungsmaß der (abstrakten) Mannigfaltigkeit (u, v), sondern vom Krümmungsmaß der für diese Mannigfaltigkeit gegebenen Maßbestimmung. In diesem übertragenen Sinne haben wir bereits in der vorigen Nummer von dem Krümmungsmaß der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Ebene gesprochen.

Wir wollen uns jetzt umgekehrt die Aufgabe stellen, in der differentialen Maßgeometrie einer Fläche des gewöhnlichen Raumes die genaue Abbildung der „allgemeinen", speziell der nicht-Euklidischen Maßgeometrie der Ebene (vgl. p. 42) zu suchen. Wir müssen dann vor allem diejenigen Flächen suchen, welche man (wie die Ebene) frei auf sich selbst so bewegen (oder abwickeln) kann, daß ein beliebiger Punkt der Fläche in irgend einen anderen beliebigen Punkt gebracht wird. Diese Flächen haben notwendig *konstante Krümmung*; und umgekehrt geht aus einem Satze von *Minding*[191]) hervor, daß jede Fläche von konstanter Krümmung in der erforderlichen Weise (nämlich ∞^3-fach) frei auf sich selbst bewegt werden kann (III D 5, *v. Lilienthal*, Nr. **33**).

Man möge jetzt die Flächen konstanter Krümmung nach dem Werte k ihrer Krümmung unterscheiden; man erhält:

a) Für $k = 0$ die gemeinen abwickelbaren Flächen, deren differentiale Maßgeometrie derjenigen der gewöhnlichen Euklidischen ebenen Geometrie gleich ist.

b) Für $k > 0$ die auf eine Kugel abwickelbaren Flächen, deren differentiale Maßgeometrie derjenigen der elliptischen ebenen Geometrie vom Krümmungsmaße k gleich ist (vgl. Nr. **23**a) und besonders die Fußnote 183).

c) Für $k < 0$ die sogenannten *pseudosphärischen Flächen*, deren differentiale Maßgeometrie derjenigen der hyperbolischen ebenen Geometrie vom Krümmungsmaße k gleich ist.

Diese Gleichheit geht in der Tat aus den trigonometrischen Formeln hervor, die von *Minding* für die auf der Fläche gezogenen geodätischen Dreiecke aufgestellt worden sind.

Jedoch hat *Minding* selbst diese Formeln nicht in Beziehung zur nicht-Euklidischen Geometrie gesetzt; er hatte auch wohl von den kurz vorher veröffentlichten *Lobatschefskij*schen Arbeiten keine Kenntnis.

Die betreffende Bemerkung findet sich jedoch in dem Habilitationsvortrag von *Riemann* angedeutet und wurde kurz nach dem Erscheinen

---

191) J. f. Math. 19 (1839), p. 378, und 20 (1840), p. 324.

derselben (1866) unabhängig davon von *Beltrami*[192]) ausdrücklich entwickelt.

Der *Beltrami*schen Arbeit liegt die von demselben Verfasser[193]) erkannte Tatsache zugrunde, daß bei den Flächen konstanter Krümmung und nur bei ihnen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden können (vgl. Nr. **20**). Diese Bemerkung führt darauf, eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der abstrakten Fläche oder elementaren Mannigfaltigkeit (u, v) von konstanter negativer Krümmung und dem innerhalb eines (Grenz-)Kreises enthaltenen Gebiete einer gewöhnlichen Ebene aufzustellen, wobei man eine Abbildung erhält, in der den geodätischen Linien der Fläche die Sehnen des Grenzkreises entsprechen. Die Maßbestimmung auf der Fläche ist dabei nichts anderes, als die auf den Kreis als absoluten Kegelschnitt zu gründende *Cayley*sche Maßbestimmung, wie *Beltrami* auch ausdrücklich hervorhebt.

Eine andere Art Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf eine gewöhnliche Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, nämlich eine *konforme*, haben wir bereits betrachtet, indem wir die hyperbolische Geometrie zunächst auf die von dem Äquator begrenzte halbe Kugel übertrugen und diese dann stereographisch auf eine Ebene projizierten (Nr. **24**).

Wählt man dabei als Pol der Projektion den Mittelpunkt der Kugel, so kommt man auf die schon bei *Riemann* vorkommende Form des Bogenelements (vgl. p. 101):

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2)},$$

wo k das Krümmungsmaß der Fläche ist.

Wählt man dagegen den Pol (wie wir vorhin taten) auf dem Äquator selbst, so kommt:

$$ds^2 = k^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

oder, wenn $k = -\frac{1}{R^2}$ gesetzt wird (III D 5, *v. Lilienthal*, Nr. **33**, und III D 6 a, *Voß*, Nr. 28), für $x = v$, $y = Re^{\frac{u}{R}}$,

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} \cdot dv^2.$$

Interpretieren wir in diesen Formeln x, y oder u, v als gewöhn-

192) Giorn. di mat. 4 (1866).

193) Ann. di mat. (1) 7 (1866), p. 185; Opere 1, p. 262.

liche cartesische Koordinaten in einer Hilfsebene, so wird in dieser die Maßgeometrie der hyperbolischen Gesamtebene eine abstrakte Interpretation finden.

Letzteres ist bei den Flächen konstanter negativer Krümmung, die man als Beispiele konstruiert hat, zunächst nicht der Fall. Denn diese werden alle von singulären Kurven oder Punkten derart begrenzt, daß auf ihnen nur ein Stück der hyperbolischen Ebene seine Abbildung findet. Man vergleiche z. B. die von *Minding* bestimmten Rotationsflächen.

Es entsteht die Frage, ob man überhaupt eine *pseudosphärische Fläche des gewöhnlichen Euklidischen Raumes* konstruieren kann, *die das vollständige Abbild der abstrakten Mannigfaltigkeit* (u, v), *d. h. der gesamten hyperbolischen Ebene darbietet.*

D. Hilbert[194]) hat bewiesen, daß keine reguläre *analytische* Fläche, die dieser Forderung genügt, existiert. Auf jeder solchen Fläche treten nämlich singuläre Kurven oder Punkte auf. Derselbe Schluß gilt hinsichtlich der *nicht* analytischen Flächen, die von *G. Lütkemeyer*[195]) und *E. Holmgren*[196]) betrachtet worden sind.

Bemerkungen, analog den obigen, muß man auch machen, soweit die Geometrie der in ihrer ganzen Ausdehnung betrachteten Flächen konstanter positiver Krümmung in Betracht kommt. Wir haben bereits bemerkt (Nr. 24), daß die sphärische Geometrie sozusagen ein übervollständiges Abbild der Geometrie der elliptischen Ebene gibt. Nicht die Kugel, sondern das *Strahlenbündel* bietet eine zweidimensionale abstrakte Mannigfaltigkeit dar, die ein genaues Abbild der elliptischen Ebene ist. Andererseits zeigt man, daß *die Kugel im gewöhnlichen Euklidischen Raume die einzige geschlossene Fläche konstanter positiver Krümmung ist.* Dieser Satz ist, was analytische Flächen angeht, neuerdings von *W. Liebmann* bewiesen worden[197]), während *G. Lütkemeyer*[198]) und *E. Holmgren*[199]) dargetan haben, daß Flächen konstanter positiver Krümmung in der Tat immer analy-

194) Am. Math. Soc. Trans. 2 (1901), p. 87; Grundlagen, Anhang V, p. 162.

195) Diss. Göttingen 1902.

196) Paris C. R. 134 (1902), p. 140. Die Idee der nicht analytischen regulären Flächen geht auf *Chr. Wiener* zurück, der in seinen Vorlesungen über darstellende Geometrie nicht-geradlinige abwickelbare Flächen, die als Grenze eines Polyeders erhalten werden, in Betracht gezogen hat; vgl. Lehrbuch der darstellenden Geometrie 2, Leipzig 1887, p. 29.

197) Gött. Nachr. 1899, p. 44; Math. Ann. 53 (1900), p. 81; 54 (1901), p. 505; vgl. *D. Hilbert*, Grundlagen, p. 172.

198) Diss. Göttingen 1902, p. 163.

199) Math. Ann. 57 (1903), p. 409.

tisch sind (wenigstens wenn sie stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung haben).

27. Riemannsche Maßbestimmung in einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Die Ideen, die wir im Hinblick auf die Maßgeometrie auf einer Fläche oder vielmehr auf einer abstrakten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit entwickelt haben, finden ihre natürliche Erweiterung in der Maßgeometrie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, deren Prinzipien *Riemann* in seinem Habilitationsvortrag entwickelt hat.

Geht man von einer elementaren Mannigfaltigkeit v_3 oder v_n von 3 oder mehr Dimensionen aus, in der ein Koordinatensystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (vgl. Nr. **15**) als gegeben vorausgesetzt wird, so kann man eine *Maßbestimmung* in der Mannigfaltigkeit aufstellen und dann auf ihr eine *differentiale Maßgeometrie* definieren, indem man als Ausdruck für die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte nimmt:

$$ds = \sqrt{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k},$$

wo $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ eine wesentlich positive quadratische Form bezeichnet.

Dieses Prinzip (das später von *H. v. Helmholtz* der verallgemeinerte Pythagoräische Satz genannt wurde) bietet sich als das einfachste dar, wenn man die Maßbegriffe in einer $v_n \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ durch Definition der *Länge einer Linie* $x_i = x_i(t)$ festsetzen will, die in einem von Null verschiedenen Intervalle durch stetige und derivierbare Funktionen in der Weise dargestellt wird, daß sie:

a) einen wesentlich positiven Wert hat,

b) stetig und derivierbar von den Endpunkten und von der Gestalt der Linie abhängt,

c) die additive Eigenschaft besitzt (vgl. Nr. 23).

Auf Grund dieser Bedingungen erhält man die Funktion, die die Länge einer Linie darstellt, durch Integration des Linienelementes ds, und der Ausdruck von ds hängt nur von den Koordinaten x_i, $x_i + dx_i$ zweier unendlich benachbarter Punkte ab.

Der Ausdruck für ds darf jedenfalls keine lineare Funktion der x_i, dx_i sein, weil er dann infolge der Stetigkeit negative Werte annehmen müßte, wenn man eine Linie um einen Punkt stetig so weit variieren läßt, bis sie wieder mit sich selbst zusammenfällt, und damit ihren Sinn umkehrt. Dagegen ist ds^2, ds^4 und überhaupt jede von ds^2 eindeutig abhängende Funktion als Grundlage für die Bildung eines Ausdruckes für das Linienelement zulässig. Wenn man nun voraussetzt, daß ds^2 so weit derivierbar sein soll, als für die Entwicklung der Maclaurinschen Reihe bis zum dritten Gliede nötig ist, und unendlich klein von der

zweiten Ordnung in den Differentialen dx_i, so erhält man gerade[200])

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Macht man dagegen irgend welche andere Annahme hinsichtlich der Derivierbarkeit von ds^2 im Anfangspunkte, so kann man auf andere und höhere Art eine Maßbestimmung in unserer Mannigfaltigkeit festsetzen, indem man z. B. als Ausdruck für ds^4 eine wesentlich positive Form vierten Grades in den dx_i annimmt, die sich nicht auf ein vollkommenes Quadrat reduziert. Die Möglichkeit solcher Fälle ist bereits von *B. Riemann* hervorgehoben worden, der dann aber seine Betrachtungen auf den einfachsten und wichtigsten Fall eingeschränkt hat, in dem der verallgemeinerte Pythagoräische Satz gelten soll[201]).

Wie bei den Flächen, so kann man auch bei den Mannigfaltigkeiten v_n, in denen eine Maßbestimmung durch den Ausdruck für ds^2 definiert ist, die *geodätischen Linien* oder Linien kleinster Länge betrachten, von denen jede in geeignet begrenzten Gebieten durch zwei Punkte völlig bestimmt ist. Ist auf diese Weise der Begriff der *Entfernung* zwischen zwei Punkten festgelegt, so kann man an ihn anknüpfend die Begriffe des *Winkels*[202]) und des *Rauminhalts*[203]) definieren.

28. Homogene Mannigfaltigkeiten. *B. Riemann* beschäftigt sich im besondern mit den Mannigfaltigkeiten v_3 oder v_n, die, wie der gewöhnliche Raum, *homogen* erscheinen, d. h. sich in sich bewegen lassen.

Dieser Begriff wird in folgender Weise näher bezeichnet.

Unter den Linienelementen (dx_i), die von einem Punkte $P \equiv (x_i)$ der Mannigfaltigkeit ausgehen, betrachte man diejenigen, die ein von P ausgehendes *Flächenelement* bilden, nämlich diejenigen, die von zwei gegebenen Linienelementen linear abhängen:

$$dx_i = \lambda \cdot d_1 x_i + \mu \cdot d_2 x_i;$$

die zu diesen Elementen gehörenden, von P ausgehenden geodätischen Linien bilden das, was man (nach *F. Schur*) eine *geodätische Fläche* durch P nennt.

B. Riemann betrachtet nun eine Mannigfaltigkeit als homogen, wenn es möglich ist, sie derart in sich selbst zu bewegen, daß man einen Punkt P und ein durch ihn gehendes Flächenelement mit irgend einem beliebigen Punkte P' und einem von P' ausgehenden beliebigen

---

200) Vgl. *F. Enriques,* Conferenze di geometria, autogr. Vorl., p. 58.

201) Habilitationsvortrag II 1.

202) Vgl. *F. Enriques*, Conferenze di geometria, autogr. Vorl., p. 65.

203) *T. Levi-Civita*, Ist. Ven. Atti (7) 4 (1894), p. 1765, insbesondere § 19.

Flächenelemente zur Deckung bringt. Aus dieser Bedingung folgt ohne weiteres, daß alle von irgend welchen zwei Punkten ausgehenden geodätischen Flächen dieselbe (verallgemeinerte *Gauß*sche) Krümmung k haben, und dies drückt man aus, indem man sagt, daß die *Mannigfaltigkeit* eine *konstante Krümmung* hat.

B. Riemann hat für die Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung k allgemein als Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes angegeben:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{1 + \frac{k}{4}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Die differentiale Maßgeometrie einer Mannigfaltigkeit v_3 *von konstanter Krümmung* k *wird für* $k = 0$ *gleich derjenigen der (parabolischen) Geometrie des gewöhnlichen Euklidischen Raumes, für* $k < 0$ *gleich derjenigen der hyperbolischen Geometrie, für* $k > 0$ *gleich derjenigen der elliptischen Geometrie.*

In diesem Zusammenhange hat *Riemann* zuerst auf die elliptische Geometrie aufmerksam gemacht. Seine Angabe über die Form, auf welche sich das Linienelement einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung bringen läßt, ist später durch Rechnungen von *E. Christoffel*[204]) und *R. Lipschitz*[205]) als richtig erwiesen worden[206]).

Endlich hat *S. Lie*[207]) als Folge eines von ihm bewiesenen Gruppensatzes ausgesprochen, daß *eine metrische Mannigfaltigkeit eine konstante Krümmung hat, wenn es möglich ist, sie so in sich selbst zu bewegen, daß die Linienelemente irgend eines festgehaltenen Punktes in allgemeinster Weise* (mit der größten Anzahl von Parametern) *transformiert werden,* und er hat auf diese Weise die *Riemann*sche Bedingung für die Homogenität einer Mannigfaltigkeit vereinfacht.

29. Projektiver Charakter der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung. Weitere Studien von *Beltrami*[208]) und *L. Schläfli*[209]) beziehen sich auf den projektiven Charakter der Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung.

In einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung lassen sich die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen darstellen (*Beltrami*); daher *gilt in den Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung, wenn*

---

204) J. f. Math. 70 (1869), p. 46, 241.

205) J. f. Math. 70 (1869), p. 71, und 72 (1870), p. 1.

206) Vgl. *L. Bianchi,* Rom Linc. Rend. (5) 7^2 (1898), p. 147.

207) Transformationsgruppen 3, p. 353—355.

208) Ann. di mat. (2) 5 (1872), p. 178.

209) Ann. di mat. (2) 5 (1872), p. 194.

die geodätischen Linien als Gerade betrachtet werden, im differentialen Sinne die projektive Geometrie. Umgekehrt (*Schläfli*): *Eine Mannigfaltigkeit, in der eine differentiale Maßgeometrie definiert ist, innerhalb welcher, wenn man die geodätischen Linien als Gerade betrachtet, die projektive Geometrie gilt, ist eine Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung.*

Und *es kann* auch *die Maßbestimmung einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung immer als eine Cayleysche projektive Maßbestimmung in bezug auf eine absolute Fläche zweiten Grades betrachtet werden.* Umgekehrt *führt die in einem projektiven Raume in bezug auf eine absolute Fläche zweiten Grades aufgestellte Maßbestimmung auf einen quadratischen Ausdruck für das Quadrat* ds^2 *des Linienelementes, wonach der Raum wie eine Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung* (in der die Geraden geodätische Linien sind) *erscheint*[210]).

Der Vergleich zwischen den Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung und den metrisch-projektiven Räumen wird vollkommen, wenn man sich die Mannigfaltigkeit, in der die Metrik in differentialem Sinne, d. h. für geeignet begrenzte Gebiete definiert ist, in der Weise vervollständigt denkt, daß zwei Punkte immer *eine* und nur *eine* geodätische Linie bestimmen. Eine solche Vervollständigung ist für die abstrakten Elementarmannigfaltigkeiten durch die Betrachtung der idealen Punkte (Nr. 17) immer möglich, aber es könnten auch andere und weniger einfache Vervollständigungen in Betracht gezogen werden, die dann zu anderen Folgerungen Anlaß geben.

An den projektiven Charakter der Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung knüpft endlich eine Untersuchung von *F. Schur*[211]) an. *Schur* bemerkt, daß dieser projektive Charakter von der fundamentalen Eigenschaft der geodätischen Fläche abhängt, je ∞^2 geodätische Linien des Raumes zu enthalten (fundamentale Eigenschaft der Ebene; vgl. Nr. 2), und beweist dann die folgenden Sätze:

Wenn in einer metrischen Mannigfaltigkeit von drei oder mehr Dimensionen die von einem Punkte P ausgehenden geodätischen Flächen je ∞^2 *geodätische Linien des Raumes enthalten, so hat die Mannigfaltigkeit in bezug auf alle von P ausgehenden Flächenelemente eine konstante Krümmung.*

Wenn die angegebene Eigenschaft allen von zwei Punkten P und P′ ausgehenden geodätischen Flächen zukommt, so kommt sie allen geo-

210) Vgl. *E. Beltrami,* Fußnote 206, und *F. Klein,* Erlanger Programm.

211) Math. Ann. 27 (1886), p. 537. Vgl. auch *L. Bianchi*, Rom Linc. Rend. (5) 11^1 (1902), p. 265. Hinsichtlich eines geometrischen Beweises derselben Resultate vgl. *F. Enriques*, Bologna Atti 1902.

dätischen Flächen überhaupt zu, und die Mannigfaltigkeit ist von konstanter Krümmung.

So erhält das Problem der metrischen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, sozusagen in seine projektiven Elemente zerlegt, die einfachste Lösung.

Die Untersuchungen von *F. Schur* schließen auch die Existenz von Mannigfaltigkeiten von drei oder mehr Dimensionen aus, die um jeden Punkt eine konstante, aber von Punkt zu Punkt eine veränderliche Krümmung haben.

30. Untersuchungen von De Tilly über den Ausdruck für die endliche Entfernung. Dem *Riemann*schen Ansatz, der die Maßgeometrie durch den Ausdruck für die elementare Entfernung zwischen zwei unendlich benachbarten Punkten zu charakterisieren sucht, steht der andere gegenüber, der direkt den Ausdruck für die *endliche Entfernung* zwischen zwei wesentlich verschiedenen Punkten herleiten will. So geschieht es in den allerdings nicht durchgeführten Untersuchungen von *J. M. De Tilly*[212]).

Man betrachte den Raum als eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, in der ein Koordinatensystem x, y, z festgesetzt ist. Sind zwei Punkte $1 \equiv (x_1 y_1 z_1)$, $2 \equiv (x_2 y_2 z_2)$ gegeben, so wird ihre *Entfernung* (12) durch eine symmetrische Funktion

$$(12) \equiv F_{12}(x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2)$$

ausgedrückt, die vor allem den folgenden Forderungen genügt:

a) die Entfernung zweier Punkte variiert mit ihnen in stetiger Weise und wird nur dann Null, wenn die beiden Punkte zusammenfallen;

b) sind mehrere Punkte $1, 2, 3, 4, \cdots$ und ein Punkt $2'$ gegeben, der von 1 ebensoweit entfernt ist wie 2, so gibt es Punkte $2', 3', 4', \cdots$ von solcher Lage, daß die Entfernungen zwischen je zwei Punkten der zweiten Gruppe denen zwischen den homologen Punkten der ersten gleich sind.

Diese zweite Bedingung (die im wesentlichen die Beweglichkeit der Figuren einführt, vgl. *H. v. Helmholtz*, Nr. 32) ist eine funktionale Bedingung, der die Entfernungsfunktion genügen muß.

Betrachtet man zwei Gruppen von fünf Punkten 12345, $12'3'4'5'$, so folgt aus den Gleichungen

212) Bordeaux Mémoires (2) 3 (1879), p. 1; Bruxelles Mémoires couronnés in 8°, 47 (1892/93).

$$(1)\quad \begin{cases} (12) = (12') & (13) = (13') & (14) = (14') \\ (15) = (15') & (23) = (2'3') & (24) = (2'4') \\ (25) = (2'5') & (34) = (3'4') & (35) = (3'5') \end{cases}$$

unter geeigneten Einschränkungen identisch:

$$(45) = (4'5').$$

Daher muß zwischen den zehn zwischen je zwei von fünf Punkten vorhandenen Entfernungen eine charakteristische Relation, genannt die *Relation der fünf Punkte*, bestehen, deren Form von der betrachteten Gruppe von fünf Punkten unabhängig sein muß (*Bedingung der Homogenität* des Raumes).

Diese Relation möge durch

$$(1\,2\,3\,4\,5) = \psi\,\{(12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45)\} = 0$$

dargestellt sein.

Die Bedingung der Homogenität verwandelt sich dann in die folgende Bedingung (die *Bedingung der sechs Punkte*), der die Funktion ψ genügen muß:

Die drei Relationen

$$(1\,2\,3\,4\,5) = 0, \quad (1\,2\,3\,4\,6) = 0, \quad (1\,2\,3\,5\,6) = 0$$

(die, welches auch die Form von ψ sei, durch die Wahl von (46) und (56), nachdem (16) (26) (36) unter passenden Einschränkungen beliebig gegeben worden sind, erfüllt werden können) *müssen die drei folgenden nach sich ziehen*:

$$(1\,2\,4\,5\,6) = 0, \quad (1\,3\,4\,5\,6) = 0, \quad (2\,3\,4\,5\,6) = 0.$$

Nun haben die Untersuchungen, die für die Euklidische Geometrie *J. B. Lagrange, B. N. Carnot* und *A. Cayley* und für die nicht-Euklidische Geometrie *E. Schering* und *P. Mansion*[213]) über die Relation der fünf Punkte angestellt haben, zu zwei besonderen Ausdrücken für die Funktion $\psi = (1\,2\,3\,4\,5)$ in Determinantenform geführt. Aus diesen folgt umgekehrt der Ausdruck für die Entfernung in der Euklidischen und in der nicht-Euklidischen Geometrie, wenn man eine dritte Bedingung c) berücksichtigt, die die additive Eigenschaft der Entfernung auf der Geraden ausdrückt.

Es müßte aber bewiesen werden, daß die durch ψ bestimmten Ausdrücke für die Entfernung wenigstens unter geeigneten Realitätsbedingungen die einzigen möglichen Lösungen der vorliegenden Aufgabe sind. Die wenig strengen Betrachtungen *De Tillys* genügen nicht,

---

213) *Schering,* Gött. Nachr. 1870, p. 317; 1873, p. 13 und 149; *Mansion,* Bruxelles Soc. Ann. 13 A (1889), p. 57; 15 A (1891), p. 8; 16 A (1892), p. 51.

um die Existenz anderer Lösungen auszuschließen, und *H. F. Blichfeldt*[214]) hat überdies Ausdrücke möglicher Beziehungen zwischen den Entfernungen erhalten, die in denen *De Tilly*s nicht enthalten sind.

31. Geometrische Systeme von Minkowski-Hilbert. Gewisse Untersuchungen von *H. Minkowski* und *D. Hilbert* finden hier ihren Platz, insofern sie, von der Betrachtung des Ausdrucks für die endliche Entfernung zwischen zwei Punkten ausgehend, zu allgemeineren geometrischen Systemen führen, die die gewöhnliche, Euklidische und nicht-Euklidische, Metrik umfassen.

Es seien x, y, z gewöhnliche Parallelkoordinaten des Raumes.

H. Minkowski[215]) nimmt als Ausdruck für die *Entfernung* zwischen zwei Punkten $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ eine homogene (im allgemeinen transcendente) Funktion ersten Grades der Differenzen $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$:

$$\Omega\,(x_1 - x_2,\, y_1 - y_2,\, z_1 - z_2)$$

an, die er keiner anderen Beschränkung unterwirft als der, daß sie, einer Konstanten gleichgesetzt, eine *nicht konkave* Fläche darstellt. Er erhält so eine konventionelle Maßgeometrie, die *mit der projektiven Geometrie verträglich* ist in dem Sinne, daß die Geraden die Linien kleinster Länge sind; diese Geometrie schließt als besonderen Fall die gewöhnliche Euklidische Geometrie ein. Bei *Minkowski* gibt es im allgemeinen nur ∞^3 Bewegungen, nämlich die ∞^3 Parallelverschiebungen des Raumes.

D. Hilbert[216]) hat das vorstehende System verallgemeinert, indem er sich die umgekehrte Aufgabe stellte: *alle möglichen metrischen Geometrien des Raumes zu bestimmen, in denen die Geraden kürzeste Linien sind und außerdem eine unendliche Länge haben.*

Die Antwort ist, daß *man solche metrischen Geometrien in dem projektiven Raume immer so herstellen kann, daß man als absolute Fläche eine geschlossene nicht konkave Fläche und als Ausdruck für die Entfernung zweier (eigentlicher) Punkte A, B in ihr den Ausdruck*

$$c \log (ABMN)$$

nimmt, wo M, N die Schnittpunkte der Geraden AB mit der absoluten Fläche sind und c eine Konstante bezeichnet.

Das *Hilbert*sche System wird ersichtlich zur hyperbolischen Maßbestimmung, wenn man als absolute Fläche eine reelle nicht-geradlinige Fläche zweiten Grades nimmt. Andererseits umfaßt es als Grenzfall

214) Am. Math. Soc. Trans. 3 (1902), p. 467.

215) Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, § 1.

216) Math. Ann. 46 (1895), p. 91.

(wenn nämlich die absolute Fläche in die unendlich ferne Ebene ausartet) das *Minkowski*sche System. In der allgemeinen *Hilbert*schen Metrik gibt es keine Bewegungen.

Das *Hilbert*sche geometrische System kann selbst wieder in mehrfacher Weise verallgemeinert werden, wenn man einige der Bedingungen fallen läßt, denen die Funktion der Entfernung zwischen zwei Punkten genügen muß, um diejenigen Eigenschaften zu besitzen, welche wir gemäß der Anschauung ihr zugestehen, wenn man z. B. annimmt, daß sie nicht in bezug auf beide Punkte symmetrisch oder nicht durch sie in eindeutiger Weise bestimmt ist[217]).

B. Bewegungsgruppe.

32. Postulate von H. v. Helmholtz. Die Forschungsrichtung, die die Geometrie des physischen Raumes durch die Eigenschaften der *Bewegungen*, als Punkttransformationen in einem Raumstück betrachtet, zu charakterisieren sucht, ist von *Fr. Ueberweg*[218]) und von *H. v. Helmholtz*[219]) angebahnt worden. Später hat *F. Klein*[220]), indem er den fundamentalen Charakter der Bewegungen, eine Gruppe zu bilden, hervorhob, das Problem in eine schärfere Form gebracht, indem er es als eine Gruppenfrage aussprach; diese Frage wurde von verschiedenen Gesichtspunkten aus von *S. Lie* und auch zum Teil, unabhängig davon, von *H. Poincaré* behandelt und gelöst.

Die Postulate, die *Helmholtz* der Geometrie zugrunde legt, sind die folgenden:

I. *Über die Stetigkeit und die Dimensionen des Raumes.*

Das Postulat, wonach der Raum als eine Zahlenmannigfaltigkeit v_n von n Dimensionen, wo $n = 3$ ist, angesehen werden kann (vgl. Nr. **15**). Die Bedingung $n = 3$ kann wie bei *Lie* (vgl. unten) erst hinterher eingeführt werden, nachdem die Postulate der Bewegung allgemein für den S_n ausgesprochen worden sind.

II. *Über die Existenz beweglicher starrer Körper.*

Zwischen den $2n$ Koordinaten eines einem starren Körper angehörenden Punktepaares findet eine Gleichung

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

---

217) Vgl. hierzu *G. Hamel,* Über die Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind, Diss. Göttingen 1901, und Math. Ann. 57 (1903), p. 231.

218) Arch. f. Philologie und Pädagogik 17 (1851).

219) Verhdl. d. naturhist. med. Vereins zu Heidelberg 4 (1866) (Wissensch. Abhandl. 2, p. 610) und Gött. Nachr. 1868, p. 193 (Wissensch. Abhandl. 2, p. 618).

220) Erlanger Programm und Math. Ann. 6 (1873), p. 116.

statt, die für jedes Paar *kongruenter*, d. h. durch eine Bewegung zur Deckung zu bringender Punkte dieselbe ist.

III. *Über die Freiheit der Bewegung.*

Der erste Punkt eines starren Systems ist durchaus beweglich. Wenn er festgehalten wird, so findet für den zweiten Punkt eine Gleichung statt; wenn noch ein zweiter Punkt festgehalten wird, so muß ein dritter Punkt zwei Gleichungen genügen usw. Im ganzen muß man n Punkte festhalten, d. h. $\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungen geben, um in dem Raume von n Dimensionen die Lage jedes Punktes festzulegen.

IV. *Über den Zusammenhang zwischen Drehung und Identität* (Postulat der *Monodromie*).

Es wird angenommen, daß im Raume von n Dimensionen eine vollständige Drehung um $n - 1$ feste Punkte allgemeiner Lage einen starren Körper identisch mit sich selbst zur Deckung bringt, d. h. daß die unter diesen Bedingungen von einem Punkte beschriebene (Kreis-)Linie geschlossen ist.

Helmholtz glaubt zu beweisen, daß die genannten vier Postulate von einander unabhängig sind und zur vollständigen Charakterisierung der allgemeinen, Euklidischen oder nicht-Euklidischen, Geometrie des Raumes ausreichen, indem er tatsächlich zuletzt zu dem *Riemann*schen Ausdruck für das Quadrat des Linienelements gelangt.

Aber gegen die *Helmholtz*schen Beweise richtet sich die Kritik von *S. Lie* [221]), insbesondere der Einwand, daß *Helmholtz* entsprechend den um einen festen Punkt O stattfindenden Drehungen lineare Gleichungen zwischen den von dem Punkte auslaufenden ersten Differentialen der Koordinaten anschreibt (was zu speziell ist)[222]).

Außerdem ist das zur Begründung der ebenen Geometrie ($n = 2$) allerdings nötige Postulat der Monodromie für den Fall des Raumes ($n = 3$ oder $n > 3$) überflüssig. Dies wurde noch vor *Lie* von *De Tilly* (Fußn. 212) verfochten und später von *F. Klein* [223]) durch Betrachtungen intuitiven Charakters erläutert.

Immerhin können die *Helmholtz*schen Resultate als richtig angesehen werden, soweit es sich um die Möglichkeit handelt, die all-

---

221) Transformationsgruppen 3, p. 437.

222) Es wäre möglich, daß es innerhalb der Gruppe Bewegungen um O gibt, welche die von O ausgehenden ersten Differentiale ungeändert lassen und erst auf die zweiten Differentiale wirken, usw.

223) Math. Ann. 37 (1890), p. 544, genauer in Höhere Geometrie 2, autogr. Vorlesungen, Leipzig 1893.

gemeine Maßgeometrie des Raumes auf den ersten drei Postulaten aufzubauen, wofern diese Postulate als für alle Punkte eines Raumstückes gültig verstanden werden[224]).

33. Untersuchungen von S. Lie[225]). *Lie* bringt das *Helmholtz*sche Problem in eine andere Form und kommt dabei zu zwei neuen Lösungen.

Es wird vor allem ebenso wie bei *Helmholtz* ausdrücklich angenommen, daß der Raum eine Mannigfaltigkeit v_3 ist, in der man Koordinaten einführen kann.

Die Bewegungen des Raumes erscheinen, insoweit sie zusammensetzbar und umkehrbar sind, als Glieder einer *Gruppe* von Punkttransformationen; diese Annahme tritt an Stelle derjenigen, die *Helmholtz* mit dem Begriff der Kongruenz verbindet, nämlich, daß die Kongruenz eine gegenseitige Beziehung ist und daß zwei Figuren, die einer dritten kongruent sind, unter einander kongruent sind.

Nun kommt die Aufgabe, ein Postulatensystem anzugeben, das der allgemeinen Maßgeometrie zur Grundlage dienen könnte, darauf hinaus, die Bewegungsgruppen der Euklidischen oder nicht-Euklidischen Geometrien durch allgemeine Eigenschaften zu charakterisieren und sie dadurch von allen möglichen Transformationsgruppen einer v_3 zu unterscheiden.

Das kann man durch Annahmen, die sich auf die unendlich kleine Umgebung jedes Punktes beziehen, oder durch Postulate in einem endlichen Gebiete erreichen (wobei also die sogleich [unter VI] zu behandelnden Zusammenhangsverhältnisse des unbegrenzten Raumes zunächst außer Betracht bleiben).

Die Resultate von *S. Lie* sind folgende:

a) Wir stellen folgende Definition voran: Eine Transformationsgruppe in einer v_3 führt zur *freien Beweglichkeit im Unendlichkleinen* um jeden Punkt P, wenn bei festgehaltenem P es noch möglich ist, durch Transformationen der Gruppe ein zu P gehörendes Linienelement p in irgend ein anderes auch zu P gehörendes Linienelement p' und ein zu p gehörendes Flächenelement π in irgend ein zu p' gehörendes Flächenelement π' zu bringen.

Dann ergibt sich, daß *die Gruppen der Euklidischen oder nicht-Euklidischen Bewegungen des als eine Zahlenmannigfaltigkeit* $v_3 \equiv (xyz)$

224) *S. Lie*, Transformationsgruppen 3.

225) Leipzig Ber. 1886, p. 337; Transformationsgruppen, Abteil. 5 und besonders p. 471, 498.

betrachteten Raumes vollständig durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß sie reell, transitiv und durch unendlich kleine Transformationen erzeugbar sind, sowie die freie Beweglichkeit im Unendlichkleinen um jeden festgehaltenen Punkt möglich machen.

Dieser Schluß erstreckt sich in analoger Weise auf den Fall der Bewegungsgruppen in Räumen von $n > 3$ Dimensionen; aber für $n = 2$ muß man das *Helmholtz*sche Postulat der Monodromie hinzufügen, um andere Gruppentypen, die mit der Annahme der Beweglichkeit im Unendlichkleinen verträglich sind, auszuscheiden.

b) Betrachtet man dagegen die Eigenschaften der Bewegungen in einem *endlichen* einfach zusammenhängenden Gebiete, so kommt man zu dem Ergebnis:

Die allgemeine Maßgeometrie des Raumes kann, soweit ein begrenztes Raumstück in Betracht kommt, auf folgende Postulate gegründet werden:

1) *Der Raum ist eine Zahlenmannigfaltigkeit von drei Dimensionen* (v_3).

2) *Die Bewegungen bilden eine reelle Transformationsgruppe, die durch unendlich kleine Transformationen erzeugt wird.*

3) *Wenn man einen Punkt* $(y_1^0\, y_2^0\, y_3^0)$ *von allgemeiner Lage festhält, so genügen die Punkte, in die ein anderer Punkt* $(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0)$ *durch eine Bewegung gebracht werden kann, einer Gleichung*

$$\Omega\,(y_1^0\, y_2^0\, y_3^0,\; x_1^0\, x_2^0\, x_3^0,\; x_1\, x_2\, x_3) = 0,$$

die eine durch $(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0)$, *aber nicht durch* $(y_1^0\, y_2^0\, y_3^0)$ *hindurchgehende Fläche darstellt.*

4) *Um den Punkt* $(y_1^0\, y_2^0\, y_3^0)$ *kann man ein dreidimensionales Raumstück von der Beschaffenheit abgrenzen, daß, wenn der Punkt* $(y_1^0\, y_2^0\, y_3^0)$ *festgehalten wird, jeder andere Punkt* $(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0)$ *des genannten Raumstückes durch eine stetige Bewegung in irgend einen anderen Punkt gebracht werden kann, der der Gleichung* $\Omega = 0$ *genügt.*

34. Untersuchungen von H. Poincaré. Unabhängig von *Lie* (dessen erste Arbeit (Fußnote 225) vom 25. Okt. 1886 herstammt) hat sich *H. Poincaré*[226]) die Aufgabe gestellt, auf gruppentheoretischem Wege diejenigen Geometrien der Ebene zu charakterisieren, bei denen ein quadratisches Gebilde im Sinne der projektiven Geometrie zugrunde liegt (vgl. Nr. 23). Er gelangt zu folgendem Postulatensystem:

226) Paris Bull. Soc. math. de France 15 (1887), p. 203; vgl. *S. Lie*, Transformationsgruppen 3, p. 437, 2. Fußnote.

1) *Die Ebene ist eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen.*

2) *Die Bewegungen bilden in der Ebene eine reelle Transformationsgruppe, die durch unendlich kleine Transformationen erzeugt wird, und von drei Parametern abhängt.*

3) *Wenn in der Ebene zwei Punkte einer Figur festgehalten werden, so ist die Figur selbst unbeweglich.*

Dieses dritte Postulat tritt an Stelle des *Helmholtz*schen Postulats der Monodromie. Es ist so gefaßt, daß von den betrachteten Punkten der Ebene aus möglicherweise noch *reelle* Tangenten an das absolute quadratische Gebilde laufen können. Sollen allein die drei Fälle der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Maßbestimmung übrig bleiben, so wird man beispielsweise verlangen, daß *alle* von einem Punkte auslaufenden Geraden kongruent sein sollen.

35. Untersuchungen von D. Hilbert. Bei der Klassifikation der Transformationsgruppen beschränken sich sowohl *Lie* wie *Poincaré* auf *Transformationen*, die durch *analytische* Funktionen, oder wenigstens auf solche, die durch *derivierbare Funktionen* dargestellt werden; diese Annahme gehört zu der Erzeugung der Gruppen durch unendlich kleine Transformationen, sofern man diese, wie *Lie* in seiner Gruppentheorie, analytisch darstellt. Dabei kommt aber nicht zum Vorschein, ob diese Beschränkungen Annahmen enthalten, die den Postulaten der Geometrie, die man charakterisieren will, hinzuzufügen sind[227]). Das Problem, festzustellen, welche Annahmen in diesen Beschränkungen enthalten sind, ist von *D. Hilbert*[228]) aufgenommen worden, der nach Vorausschickung der Annahmen, welche die Ebene als eine Zahlenmannigfaltigkeit von zwei Dimensionen charakterisieren, zeigt, daß *die Gruppen Euklidischer und nicht-Euklidischer Bewegungen der Ebene unter allen Gruppen stetiger umkehrbar eindeutiger Transformationen durch die folgenden drei Postulate charakterisiert werden:*

I. *die Bewegungen bilden eine Gruppe*;

II. *die Bewegungen, die einen Punkt fest lassen, bringen irgend einen anderen Punkt in unendlich viele verschiedene Lagen*;

III. *die Bewegungen bilden ein abgeschlossenes System (im Cantorschen Sinne)*, d. h. wenn es z. B. Bewegungen gibt, durch welche Punkttripel in beliebiger Nähe des Punkttripels ABC in beliebige Nähe

---

227) In der ersten, Fußnote 225, zitierten Arbeit p. 342 wirft *S. Lie* die Frage auf, wie die Transformationsgruppen, die die Euklidische und die nicht-Euklidische Geometrie definieren, zu charakterisieren sind, wenn man den analytischen Charakter der in Betracht kommenden Funktionen fallen läßt.

228) Grundlagen, Anhang 4, p. 121.

des Punkttripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punkttripel ABC genau in das Punkttripel $A'B'C'$ übergeht.

Wenn es auch auf den ersten Blick sonderbar erscheint, daß allein diese Bedingungen genügen sollen, um die Gruppe der Bewegungen unter allen möglichen Gruppen ebener Transformationen zu charakterisieren (besonders weil nicht gefordert wird, daß es nur ∞^1 Bewegungen geben soll, die einen Punkt fest lassen), so ist doch zu beachten, daß die Bedingung III bewirkt, daß alle Gruppen (z. B. die projektive oder die konforme) ausgeschlossen werden, die *ausgeartete* (und also nicht eindeutig umkehrbare) *Transformationen* als Grenzfälle besitzen.

VI. Zusammenhangsverhältnisse des unbegrenzten Raumes.

36. Räume, die als Ganzes bewegt werden können. Die bisher erwähnten Untersuchungen über die Grundlagen der Maßgeometrie gehen mehr oder minder bewußt von dem philosophischen Prinzipe aus, als Postulate Sätze aufzustellen, die in einem den Sinnen zugänglichen Gebiete des physischen Raumes durch die Erfahrung gegeben werden. Hiermit sind aber noch nicht die Eigenschaften des *Gesamtraumes* festgelegt. Vielmehr bedarf es hierzu noch besonderer Untersuchungen, welche sich als Ergänzungen an alle vorher gehenden Untersuchungen anschließen[229]).

Nehmen wir als gegeben an, daß die Schlüsse, auf welche die Erfahrung hinsichtlich der Geometrie in einem das Feld unserer Beobachtungen bildenden Raumstücke führt, über die Grenzen der genannten Beobachtungen hinaus auf eine geeignete Umgebung *irgend eines* Punktes ausgedehnt werden können. Der Gesamtraum wird dann als eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit V_3 von konstanter Krümmung ohne singuläre Punkte erscheinen, so daß die Geometrie in der Umgebung *jedes* seiner Punkte die gewöhnliche allgemeine (Euklidische oder nicht-Euklidische) Metrik sein wird. Ein geeignetes Gebiet der V_3 um irgend einen Punkt wird sich auf ein entsprechendes Gebiet eines metrisch-projektiven Raumes S_3 kongruent abbilden lassen. Aber man wird darum doch nicht behaupten können, daß die so hergestellte Abbildung sich auf die V_3 und den S_3 in ihrer *Vollständigkeit* erstreckt, so daß die Geometrie der V_3 als Ganzes betrachtet von

229) *F. Klein,* Math. Ann. 37 (1890), p. 544.

der Geometrie des gesamten Raumes S_3 verschieden sein kann, genau wie die Geometrien zweier Flächen im ganzen betrachtet verschieden sein können, auch wenn die genannten Flächen im differentialen Sinne auf einander abwickelbar sind (Nr. **9**).

So kann es infolge der Zusammenhangsverhältnisse der Gesamt-V_3 sich ereignen, daß es zwar für jedes einfach zusammenhängende Stück der V_3 in jeder Umgebung der V_3 ∞^6 Bewegungen gibt, daß aber die gesamte V_3 sich nicht mit gleicher Freiheit bewegen kann. Eine analoge Tatsache tritt bereits bei der Fläche eines Kreiszylinders auf, die in differentialem Sinne auf die Ebene abwickelbar ist: ein einfach zusammenhängendes Stück der Zylinderfläche läßt sich auf dieser um einen beliebig festgehaltenen Punkt herum auf ∞^1 Weisen bewegen, aber die Gesamtfläche nicht mehr; man kann sie nicht mehr in sich verbiegen, sobald einer ihrer Punkte festgehalten wird.

Nehmen wir an, daß die Mannigfaltigkeit V_3 von konstanter Krümmung als Ganzes sich auf ∞^6 Weisen (wie es für jedes Stück von ihr der Fall ist) bewegen kann. Wird man dann die V_3 in ihrer ganzen Ausdehnung als einen metrisch-projektiven Raum S_3 betrachten können?

Die Antwort ist in einem allbekannten Falle negativ.

In der Tat, betrachten wir die Mannigfaltigkeit, welche *sphärischer Raum* genannt wird, d. h. die dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Elemente (Punkte) durch diejenigen Werte der vier Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gegeben sind, die der Relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$$

genügen.

Es gibt ∞^6 Bewegungen, die diesen sphärischen Raum in seiner Gesamtheit in sich überführen. Trotzdem ist derselbe mit dem elliptischen Raume nicht identisch. In der Tat bestimmen zwei Punkte dieses Raumes nicht mehr immer eine einzige geodätische Linie (Gerade), weil jede geodätische Linie gleichzeitig mit einem Punkte $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ auch dessen *Gegenpunkt* $(-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$ enthält. Der sphärische Raum ist vielmehr aus dem elliptischen Raume durch eine Beziehung $(2, 1)$ abgeleitet (genau wie die gewöhnliche Kugel aus der elliptischen Ebene oder dem Strahlenbündel).

Riemann selbst scheint in dieser Sache keine Meinung geäußert zu haben. Jedenfalls war man längere Zeit hindurch allgemein der Ansicht, daß die sphärische Geometrie die einzige ist, die mit der Annahme einer konstanten positiven Krümmung verträglich ist, und

daß daher in einer Mannigfaltigkeit von solcher Krümmung ohne singuläre Punkte als Ganzes betrachtet zwei geodätische Linien sich immer in zwei (entgegengesetzten) Punkten treffen müssen. Daß dies eine irrtümliche Meinung ist, wurde, wie bereits oben (Nr. 9) hervorgehoben, zuerst von *F. Klein*[230]) (1871—73) gezeigt. Später wurde der elliptische Raum im Gegensatze zum sphärischen Raume oder neben ihm ausdrücklich von *S. Newcomb*[231]) (1877) und *W. Killing*[232]) (1879—80) betrachtet.

Kehren wir nun zu der vorher gestellten Frage zurück, so kann man antworten[233]):

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung k, die als Ganzes betrachtet, wie in jedem ihrer Teile, ∞^6 Bewegungen in sich selbst zuläßt, kann betrachtet werden als

1) *ein hyperbolischer Raum* ($k < 0$),
2) *ein parabolischer Raum* ($k = 0$),
3) *ein elliptischer Raum* ($k > 0$),
4) *ein sphärischer Raum* ($k > 0$).

G. Veronese[234]) hat in seinen Fondamenti den sphärischen Raum neben dem elliptischen Raume durch ein besonderes Postulatensystem eingeführt. Er nimmt zu diesem Zwecke an, daß der Satz: „zwei Punkte bestimmen eine Gerade" für *besondere Punktepaare einer Geraden* eine Ausnahme erleidet, daß diese Besonderheit sich auf alle kongruenten Paare auf der Geraden erstreckt, und daß endlich ein Punkt einer Geraden und ein Punkt außerhalb derselben immer nur eine Verbindungsgerade besitzen.

37. Zweidimensionale Gebilde von Clifford-Klein. Lassen wir jetzt die Bedingung fallen, daß unsere Mannigfaltigkeit V von konstanter Krümmung als Ganzes betrachtet sich auf ∞^6 Weisen bewegen kann.

Es werden sich dann andere räumliche Gebilde finden, die in der Umgebung jedes Punktes wie ein Stück des metrisch-projektiven Raumes betrachtet werden können, aber von einem solchen Raume sich infolge ihrer Zusammenhangseigenschaften wesentlich unter-

230) Math. Ann. 4, p. 604 Fußnote; 6, p. 125.
231) J. f. Math. 83, p. 293.
232) J. f. Math. 86, p. 72; 89, p. 265.
233) *W. Killing*, Grundlagen 1, p. 313.
234) Fondamenti, p. 435.
235) Math. Ann. 39 (1891), p. 257.

scheiden; es sind die Gebilde, die nach einem Vorschlage von *Killing*[235]) *Clifford-Klein*sche Gebilde genannt werden.

Betrachten wir eine V_2 von der konstanten Krümmung Null. Jedes einfach zusammenhängende Stück derselben wird sich isometrisch ein-eindeutig auf ein entsprechendes Stück der Euklidischen Ebene abbilden lassen. Soll aber die Gesamt-V_2 in dieser Weise auf die Euklidische Ebene abgebildet werden, so wird man sie vorher möglicherweise zweckmäßig zerschneiden müssen. Als Bild erscheint dann ein Teil der Euklidischen Ebene, *dessen Ränder paarweise kongruent und entsprechend dieser Kongruenz zusammengeheftet sind* (die jeweils zusammengehörigen Ränder liefern auf der V_2 die beiden Ufer eines der bei der Zerschneidung benutzten Schnitte).

Ein erstes Beispiel wird durch einen geschlossenen Zylinder (den man sich der Einfachheit halber als Rotationszylinder denken mag) dargeboten. Zerschneidet man den Zylinder längs einer Erzeugenden, so kann man ihn ein-eindeutig auf den zwischen zwei Parallellinien enthaltenen Teil der Euklidischen Ebene abbilden. Umgekehrt kann man einen solchen Streifen der Euklidischen Ebene, indem man gegenüberstehende Randpunkte als zusammengehörig ansieht, als ein vollständiges Bild des Kreiszylinders ansehen[236]).

Ein zweites Beispiel erhält man, wenn man sich in der Euklidischen Ebene ein Parallelogramm abgegrenzt und die korrespondierenden Punkte gegenüberstehender Seiten als zusammengehörig denkt. Auf dieses Beispiel wurde *W. K. Clifford* seinerzeit bei den Untersuchungen über den elliptischen Raum geführt[237]). Er fand nämlich, daß man in diesem geradlinige Flächen zweiten Grades konstruieren kann, welche (im Sinne der elliptischen Maßbestimmung) von der Krümmung Null und trotzdem von endlichem Gesamtinhalte sind; diese Flächen zweiten Grades ließen sich in der geschilderten Weise auf ein Parallelogramm der Euklidischen Ebene ein-eindeutig isometrisch abbilden. (Es sind dies diejenigen F_2, welche die imaginäre absolute F_2 in einem Vierseit gerader Linien schneiden.) Von hier aus entwickelte dann *Klein* die allgemeine hier exponierte Theorie.

Sowohl der Zylinder wie die *Clifford*sche Fläche können sich, als Ganzes betrachtet, nur in ∞^2 Weisen auf sich selbst bewegen.

---

236) Vgl. *F. Klein,* Math. Ann. 37 (1890), p. 544, und Nicht-Euklidische Geometrie 2.

237) Math. pap. Nr. 20 (Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 381, Nr. 26 ebenda (1876), p. 67, sowie Nr. 41 (1874), 42 (1876), 44 (1876). Vgl. *F. Klein,* Fußn. 236, und *L. Bianchi*, Torino Atti 30 (1895), p. 743; Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 93.

Nun kann man auf Grund der voraufgeschickten Voraussetzungen beweisen:

Eine Euklidische zweidimensionale, unbegrenzte, zweiseitige Mannigfaltigkeit V_2 ohne singuläre Punkte und Doppellinien läßt sich vollständig auf die Euklidische Ebene oder auf einen Kreiszylinder oder auf die Cliffordsche Fläche abwickeln [238]).

Es gibt einen *anderen hierher gehörigen Typus* einer Mannigfaltigkeit V_2 unter den einseitigen Flächen; diese V_2 ist in ein-zweideutiger Weise auf eine *Clifford*sche Fläche abzubilden [239]).

Hinsichtlich der Typen einer Mannigfaltigkeit V_2 von konstanter positiver oder negativer Krümmung gelangt man entsprechend zu folgenden Ergebnissen [240]):

Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von konstanter positiver Krümmung läßt sich immer in umkehrbar eindeutiger Weise entweder auf die elliptische Ebene oder auf die Kugel abwickeln.

Dagegen: *Es gibt unendlich viele unbegrenzte zweidimensionale Mannigfaltigkeiten von konstanter negativer Krümmung und ohne singuläre Punkte und Doppellinien, die nicht als Ganzes in ∞^3 Weisen in sich selbst bewegt werden können. Ihre Bestimmung führt auf Zerlegungen der hyperbolischen Ebene in kongruente Polygone, die der Zerlegung der Euklidischen Ebene in Parallelstreifen und Parallelogramme analog sind.*

Der ganze Gegenstand hängt auf das Innigste mit denjenigen geometrischen Fragen zusammen, welche man in der Funktionentheorie komplexer Variablen bei der Untersuchung der periodischen und der allgemeinen linear-automorphen Funktionen studiert (II B 3, *Harkness,* und II B 4, *Fricke*) [241]).

38. Dreidimensionale Gebilde von Clifford-Klein. Wir gehen zu den dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten V_3 über. Hier bieten sich in analoger Weise *Raumformen von Clifford-Klein* dar, d. h. unbegrenzte V_3 ohne singuläre Punkte, die sich nicht als Ganzes in ∞^6 Weisen in sich selbst bewegen lassen, wie ein beliebig einfach zusammenhängender Teil von ihnen.

Mit den verschiedenen Fällen, die es bei den Euklidischen V_3

---

238) *F. Klein*, Fußn. 236; *W. Killing,* Math. Ann. 39 (1891), p. 257, und Grundlagen 1, p. 325.

239) *F. Klein*, Fußn. 236.

240) *F. Klein*, Fußn. 236; vgl. *W. Killing*, 1, p. 325 ff.

241) Vgl. etwa *Poincaré,* Acta math. 1, p. 1, oder die zusammenfassende Darstellung bei *R. Fricke* und *F. Klein,* Automorphe Funktionen 1.

(von der Krümmung Null) gibt, beschäftigt sich *W. Killing* (Grundlagen).

Die Bestimmung der *hyperbolischen Raumformen* (von konstanter negativer Krümmung) führt zu den *Zerlegungen des hyperbolischen Raumes in kongruente Polyeder* (die ebenfalls in der Theorie der automorphen Funktionen in Betracht gezogen werden).

Endlich *läßt sich eine dreidimensionale elliptische Raumform als Ganzes entweder auf den elliptischen oder auf den sphärischen Raum in der Weise abwickeln, daß jedem ihrer Punkte in diesem Raume eine gewisse ganze Anzahl p von (homologen) Punkten entspricht, wo zwei homologe Punkte durch eine sogenannte Schiebung von der Länge* $\frac{l\pi}{p}$ *oder* $\frac{2l\pi}{p}$ *zur Deckung gebracht werden können.*

Dieses letzte Resultat erstreckt sich auf alle elliptischen Raumformen von ungerader Dimensionenzahl n.

VII. Nicht-Archimedische Geometrie.

39. Einleitung. In den vorhergehenden Abschnitten ist, abgesehen von den Nummern **7**, **10**, **11** und dem Kapitel II, immer die *gewöhnliche* Stetigkeit vorausgesetzt worden. Nun sind, wie wir schon wiederholt bemerkt haben, in neuerer Zeit Untersuchungen angestellt worden, wie weit diese Voraussetzung für die Entwicklung der Geometrie nötig ist und wie weit sie aus andern Postulaten folgt. Diese Untersuchungen beziehen sich hauptsächlich auf denjenigen Teil der Stetigkeit, der durch das sogenannte *Archimedische* Postulat (Nr. 7) dargestellt wird, und haben zur Begründung einer *nicht-Archimedischen Geometrie* geführt, in der ein *Kontinuum von höherer Art* betrachtet wird.

40. Eindimensionales Kontinuum höherer Art. Die Frage des Archimedischen Postulats erscheint mit einer anderen verknüpft, die in der schöpferischen Periode der Infinitesimalanalysis auftritt: das Archimedische Postulat verneinen heißt so viel wie die Möglichkeit einer im Verhältnis zur Maßeinheit *aktual unendlich kleinen* (oder *unendlich großen*) *Strecke* (Nr. 7), und daher auch einer solchen *Zahl*, zugeben.

Größen dieser Art sind bei speziellen geometrischen Problemen schon frühzeitig in der Mathematik aufgetreten; ein besonders lehrreiches Beispiel liefert der *Kontingenzwinkel*, d. h. der Winkel, den eine Kurve und ihre Tangente oder zwei sich berührende Kurven

bilden. Die Größe dieses Kontingenzwinkels hat im 16. und 17. Jahrhundert die Mathematiker lebhaft beschäftigt[242]).

Euklid spricht implizite die Meinung aus, daß der Winkel, den ein Kreis mit seiner Tangente bildet, kleiner ist als jeder geradlinige Winkel, und *Proklus* interpretiert dies in dem Sinne, daß dieser Winkel Null ist.

Der Kontingenzwinkel wird als solcher später (1220) von *Jordanus* in Betracht gezogen, von dem die Bezeichnung „angulus contingentiae" herrührt, und von *Campanus* (Ende des 13. Jahrhunderts), der unter anderm bemerkt, daß der Kontingenzwinkel und der von zwei Geraden gebildete Winkel nicht Größen derselben Art sind. Derselbe Gedanke kehrt bei *Candalla* (1502—1594) wieder. Demgegenüber spricht *Peletarius* (1557) die Meinung aus, daß der Kontingenzwinkel Null ist, und gegen diesen wendet sich *Clavius* (1574 und später), indem er die Ansicht verteidigt, daß es töricht ist, den Kontingenzwinkel als Null zu betrachten und diese Meinung dem *Euklid* unterzuschieben, sondern daß dieser Winkel im Verhältnis zum geradlinigen Winkel als unendlich klein anzusehen ist („gerade wie die Ameise im Verhältnis zum Menschen"), dabei jedoch als eine Größe, die geteilt und vervielfältigt werden kann. Damit trat diese Frage in den Gedankenkreis ein, aus dem die Infinitesimalrechnung hervorging, und die hervorragendsten Mathematiker der Zeit hatten sich mit ihr auseinanderzusetzen. An *Peletarius* schlossen sich u. a. an: *Commandinus, Vieta, Galilei, Wallis, Jakob Bernoulli*; an *Clavius: Hobbes, Leibniz, Newton.*

Aus dem Aufbau der *gewöhnlichen* Analysis hat nun den Begriff des aktual Unendlichkleinen (und Unendlichgroßen) die moderne Kritik entfernt, indem sie zeigte, daß hierzu nur die Betrachtung von Größen erforderlich ist, die dem Archimedischen Postulat genügen. Aber das aktual Unendlichkleine (und Unendlichgroße) tritt in der modernen Mathematik bei gewissen anderen Gattungen von Aufgaben auf, z. B.:

1) bei dem Vergleich der mehr oder weniger raschen Art, in der die Funktionen variierend einer Grenze zustreben (*Ordnungen des Unendlichen* von *Du Bois-Reymond*, vgl. I A 3 Nr. **19** und I A 5 Nr. **17**);

2) in der *Mengenlehre* (vgl. I A 3 Nr. **14** und I A 5 Nr. **3**), wo

---

242) Vgl. *G. Vivanti,* Il concetto d'infinitesimo, Giorn. d. mat. (2) 7 und 8, für sich herausgegeben Napoli 1901; *M. Simon,* „Euklid", p. 9, 87—90; *M. Cantor,* Gesch. d. Math., an vielen Stellen.

das aktual Unendliche in der Konstruktion der *transfiniten Zahlen Cantors* einen ersten arithmetischen Ausdruck fand.

Bei dieser Erweiterung des gewöhnlichen Zahlengebietes hat *Cantor* von vornherein die Eigenschaft postuliert, daß die Zahlen eine *wohlgeordnete* Menge bilden, d. h. eine solche, in deren Untergruppen von Elementen sich stets ein *erstes* Element befindet (das kleiner als alle anderen ist). Und darum hat er die *formalen Eigenschaften* der gewöhnlichen arithmetischen Operationen opfern müssen, die also für seine transfiniten Zahlen nicht mehr sämtlich gelten. Daraus folgt, daß die *Cantor*schen Zahlen ein nicht-Archimedisches System nicht bilden, indem ein solches, in abstraktem Sinne genommen, als eine „Gerade" betrachtet werden kann, in der die gewöhnlichen Kongruenzpostulate erfüllt sind. Dagegen ist *G. Veronese*[243]) bei einer geometrischen Untersuchung der für die Gerade geltenden Postulate zu der Erkenntnis der Möglichkeit einer nicht-Archimedischen Geometrie gelangt, die allen Postulaten der Anordnung und der Kongruenz genügt, bei der aber die Stetigkeit nur in dem engeren (*Cantor*schen) Sinne gilt (vgl. Nr. 7). Und von hier aus ist er zur Konstruktion eines Systems *nicht-Archimedischer Zahlen* gekommen, für das die formalen Eigenschaften des arithmetischen Algorithmus bestehen. *T. Levi-Civita*[244]) hat dann diese Konstruktion ihres geometrischen Gewandes entkleidet und ein System nicht-Archimedischer Zahlen aufgestellt, die er *monosemii* genannt hat und die noch allgemeinere Zahlen als die Veroneseschen darstellen.

D. Hilbert[245]) ist auf einem anderen Wege zu einem speziellen nicht-Archimedischen Zahlensystem gelangt. Er betrachtet einen *Körper von Funktionen* $\Omega(t)$, die man erhält, wenn man t den vier rationalen Operationen und der Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ unterwirft; dabei soll ω eine Funktion bedeuten, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. In diesem Körper werden die Summe, das Produkt usw. wie gewöhnlich definiert, also in der Weise, daß die formalen Eigenschaften der arithmetischen Zahlenoperationen erfüllt sind. Die *Ungleichheit* zweier Funktionen a, b von $\Omega(t)$ kann man dann definieren, indem man

$$a > b$$

nennt, wenn $a - b$ für ein genügend großes t positiv ist. Dann

243) Fondamenti, im besondern pg. 257 und 262.

244) Veneto Istit. Atti (7) 4 (1893), p. 1765.

245) Grundlagen, p. 22.

können die genannten Funktionen als die *Zahlen* eines speziellen *nicht-Archimedischen Systems* betrachtet werden.

Die Beziehungen zwischen diesen und den *Veronese*schen Zahlen sind von *A. Bindoni*[246]) studiert worden, und die verschiedene Richtung der beiden Forscher, die sich hierbei ergibt, ist bemerkenswert: *Veronese* richtet seinen Blick im allgemeinen auf besonders ausgedehnte Systeme von Elementen, die gewissen Eigenschaften genügen, *Hilbert* auf gewisse spezielle Systeme[247]).

---

246) Rom Lincei Rend. (5) 11^2 (1902), p. 205.

247) Die arithmetische Eigenart und die Tragweite der von *Veronese* eingeführten transfiniten Zahlen ist kürzlich von *Schoenflies**) eingehend untersucht worden, und zwar wesentlich auf Grund eines von *Hölder*[70]) ausgesprochenen Resultats.

Die einfachsten Veroneseschen Zahlen sind solche, die mit der endlichen Einheit 1 und einer transfiniten (unendlich kleinen) Einheit η gebildet sind; für jede endliche Zahl N besteht also — entgegen dem Archimedischen Postulat — die Ungleichheit $N\eta < 1$. Sind dann A und B gewöhnliche (Archimedische) Zahlenkoeffizienten, so stellt

$$A + B\eta$$

die allgemeinste derartige transfinite Zahl dar. Von ihnen hat *Hölder* gezeigt, daß die Veronesesche Stetigkeitsforderung (vgl. Nr. 7) nur dem Koeffizienten B, aber *nicht* dem A eine Bedingung auferlegt; es ist die, daß die für B zulässigen Zahlen selber die Dedekindsche Stetigkeit besitzen.

Dies gilt analog für jedes System transfiniter Zahlen, das mit einer endlichen Zahl geordneter unendlich großer resp. unendlich kleiner Einheiten gebildet ist, insbesondere für diejenigen, deren Individuen sich in der Form

$$A_\mu \omega^\mu + A_{\mu-1}\omega^{\mu-1} + \cdots + A_1\omega + A_0 + a_1\eta + \cdots + a_\nu \eta^\nu$$

darstellen lassen, wo μ und ν ganze positive Zahlen sind und immer für jedes endliche N

$$\omega^\lambda > N\omega^{\lambda-1} \quad \text{und} \quad \eta^\lambda < N\eta^{\lambda-1}$$

ist. Die Veronesesche Stetigkeit legt hier nur dem letzten Koeffizienten a_ν eine Bedingung auf, und zwar die oben erwähnte, während die Wertmenge jedes anderen Koeffizienten a_i und jedes Koeffizienten A_i beliebig, ja auch endlich sein kann.

Diejenigen transfiniten Zahlen, die dem Veroneseschen Begriff des Kontinuums entsprechen, sind mit unendlich vielen Einheiten dieser Art gebildet (vgl. I A 5 Nr. 17); genauer entsprochen enthalten sie unendlich viele Potenzen von η, aber nicht von ω**). Ihren Koeffizienten legt die Veronesesche Stetigkeit *über-*

---

*) Jahresb. d. D. M.-V. 15 (1906), p. 26.

**) Diese Einschränkung ist für *Veroneses* Zahlen wesentlich. In seinen Fondamenti hatte *Veronese* bei der Behandlung eines Beispiels mit solchen Zahlen gerechnet, in denen auch unendlich viele Potenzen von ω auftreten (Grundzüge, p. 217). Für sie versagen die gewöhnlichen Rechnungsgesetze. Dies

41. Allgemeine Ansätze Veroneses. *Veronese* hat sich nicht darauf beschränkt, die Möglichkeit eines eindimensionalen nicht-Archimedischen Kontinuums darzutun, sondern sich die allgemeine Konstruktion einer mehrdimensionalen nicht-Archimedischen Geometrie zum Ziele gesetzt. Die leitende Idee seiner Forschungen scheint folgende zu sein. Der *gewöhnliche* Raum genügt einer gewissen Gesamtheit von Eigenschaften, auf Grund deren er durch aufeinanderfolgende Projektionen einer Geraden von einem *außerhalb* dieser gegebenen Punkte aus *konstruiert* werden kann; in gleicher Weise lassen sich auf der Geraden (auf der die Beziehungen der Anordnung und der Kongruenz gegeben sind), wenn man von gewissen Reihen gegebener Punkte ausgeht, mit Hilfe des *Cantor*schen Postulats Grenzpunkte *konstruieren. Veronese* untersucht nun, wie weit die Annahmen dieser Konstruktion mit der Existenz anderer Punkte *außerhalb* jener nach und nach konstruierten verträglich sind, und gelangt so zu einem *allgemeinen Raume* von unendlich vielen Dimensionen und unendlich vielen geradlinigen Einheiten, der das ausgedehnteste Gebilde ist, innerhalb dessen die genannten Konstruktionen immer möglich sind.

Veronese hat zwei geometrische Systeme konstruiert:

---

haupt keine Bedingung auf. Dabei wird zunächst davon abgesehen, dass die Zahlen irgend welchen Rechnungsregeln genügen, oder irgend welchen Körper bilden sollen.

Dasselbe gilt für die oben erwähnten analog gebauten allgemeineren Zahlen von *Levi-Civita* (monosemii), bei denen die Exponenten von ω und η irgend eine Reihe abnehmender resp. zunehmender Zahlen bilden.

Für die eben betrachteten Veroneseschen Zahlen, die das Kontinuum darstellen sollen, lassen sich die vier rationalen Operationen den für sie charakteristischen elementaren Gesetzen (die Definitionen stimmen mit derjenigen für Potenzreihen überein) gemäss definieren, und zwar erfordert die Ausführbarkeit der Division die Existenz auch solcher Zahlen, die unendlich viele Potenzen von η enthalten. Geht man von den Zahlen zu einem Körper über, so ergeben sich auch noch Bedingungen für die Koeffizienten A_i und a_i. Einen rationalen Körper, in dem durchgehends die Veronesesche Stetigkeit herrscht, erhält man insbesondere auch dann schon, wenn man sämtliche Koeffizienten A_i und a_i *rational* annimmt. Dies gilt in analoger Weise auch für die noch allgemeineren Zahlen *Veroneses*, bei denen die Exponenten der Potenzen von ω resp. η eine wohlgeordnete Menge zweiter Mächtigkeit bilden, und ebenso für die analogen Zahlen von *Levi-Civita* (Beitrag von *Schoenflies*).

---

ist der Inhalt eines von *Schoenflies* erhobenen Einwandes [Rom Linc. Rend. (5) 6_2 (1897), p. 362]. *Veronese* und *Levi-Civita* haben später darauf hingewiesen, daß *Veroneses* Ideen diese von ihm selbst benutzten Zahlen ausschließen [Rom Linc. Rend. (5) 7_1 (1898), p. 79, 91, 113], womit der Einwand von *Schoenflies* hinfällig wird.

1) ein System, in dem die Gerade eine offene Linie ist und durch einen Punkt unendlich viele Parallele zu einer gegebenen Geraden gehen;

2) ein System, in dem, ähnlich wie bei *Riemann*, die Gerade eine geschlossene Linie ist.

Und er hat besonders die Eigenschaften des zweiten Systems entwickelt, in dem Sinne, daß er die geometrischen Tatsachen *hinsichtlich der verschiedenen Einheiten* in einer, wie man sagen könnte, *unendlich annähernden* Weise betrachtet. So bemerkt er, daß in diesem System die *Geometrie in der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes (mit unendlich großer Annäherung) Euklidisch* ist.

42. Nicht-Archimedische projektive Geometrie. *Veronese* hat sich dahin ausgesprochen, daß in seinem Raum, oder in demjenigen, welcher durch die Zahlen *Levi-Civita*s analytisch definiert werden kann, die projektive Geometrie Geltung hat.[248])

Aber auch von einer anderen Seite ist man zu einer nicht-Archimedischen projektiven Geometrie geführt worden, nämlich durch die Untersuchungen, die zum Ziele hatten, beim *geometrischen* Beweise des im engeren (*Poncelet*schen) Sinne verstandenen Fundamentalsatzes der Projektivität die Voraussetzungen einzuschränken (vgl. Nr. 22).

Vor allem hat *H. Wiener*[249]), indem er die Affinität und die Ähnlichkeit zu Hilfe nahm, bewiesen, daß der in diesem Sinne verstandene Satz der Projektivität sich aus den Sätzen von *Desargues* und

248) Da *Veroneses* Zahlen die rationalen Operationen gestatten, so trifft dies unmittelbar zu, solange man im rationalen Gebiet bleibt. Sobald man jedoch das rationale Gebiet verläßt, reichen die Veroneseschen Zahlen, trotz der ihnen innewohnenden Stetigkeit, *nicht* mehr zur Darstellung der Punkte aus; dies ist sogar selbst dann nicht mehr der Fall, wenn man für die Koeffizienten A_i und a_i *sämtliche* Zahlenwerte zuläßt. Der innere Grund ist der, daß bei der Veroneseschen Stetigkeit, im Gegensatz zu der Dedekindschen, Lücken auftreten, denen eine Zahlengröße des stetigen Systems nicht entspricht (Nr. 7); sie ist in dieser Hinsicht sozusagen *enger* als die Dedekindsche. So kann z. B. schon die Bestimmung der Doppelpunkte inzidenter projektiver Punktreihen, also auch der Schnittpunkte einer C_2 mit einer Geraden, illusorisch werden. Soll also *Veroneses* Behauptung, daß seine Zahlen die projektive Geometrie gestatten, so realisiert werden, daß auch andere als rationale Aufgaben lösbar sind, so muß man das Zahlengebiet durch Einführung neuer Einheiten, nämlich gebrochener Potenzen von ω und η, so *erweitern*, daß die entsprechenden nicht-rationalen Operationen ausführbar werden. Dies gibt in jedem Falle noch Bedingungen für die Exponenten derjenigen Potenzen von ω und η, aus denen die Zahlen des Körpers sich aufbauen. Das Nähere bei *Schoenflies,* Fußnote 248. (Beitrag von *Schoenflies.*)

249) Leipzig Ber. 1891, p. 669; D. Math.-V. 1 (1892), p. 45; 3 (1894), p. 70.

Pappus herleiten läßt, ohne daß man die gewöhnlichen Stetigkeitsbegriffe einzuführen braucht (Nr. 7), und dies ist später in einfacher projektiver Weise von *F. Schur*[250]) unter alleiniger Benutzung der Postulate des Einanderangehörens bewiesen worden.

Zeuthen[251]) hat den Gesichtspunkt aufgestellt, den genannten Satz (ohne Einführung der gewöhnlichen Stetigkeitspostulate) auf die fundamentale Eigenschaft der doppelten Reihe Erzeugender des Hyperboloids zurückzuführen. Darauf hat *F. Schur*[252]), anknüpfend an eine *Dandelin*sche Idee[253]), aus dieser Eigenschaft des Hyperboloids den *Pappus*schen Satz und aus diesem, wie gesagt, den Satz der Projektivität hergeleitet. *Schur* bemerkt, daß nur ein besonderes Hyperboloid zu existieren braucht, und hebt hervor, daß die Kongruenzpostulate ohne weiteres auf das Rotationshyperboloid führen.

Hilbert hat die Beweismittel für den *Pappus*schen Satz unter Festhaltung der Kongruenzpostulate noch weiter eingeschränkt, indem er *in der Ebene* bleibt, d. h. von den Postulaten des Einanderangehörens nur diejenigen benutzt, welche sich auf die Ebene beziehen.

Als Resultat dieser Untersuchungen haben wir also:

Der im engeren (Ponceletschen) Sinne verstandene Satz der Projektivität läßt sich beweisen, wenn man den projektiven Postulaten der ebenen Geometrie die Postulate der Kongruenz und das Parallelenaxiom hinzufügt, ohne von der Stetigkeit und dem Archimedischen Postulat Gebrauch zu machen.

Eine von dem Archimedischen Postulate unabhängige *analytische* Behandlung der projektiven Geometrie knüpft an:

1) an die neuen Entwicklungen über die Theorie der Proportionen (Nr. **11**), deren Zusammenhang mit dem im engeren Sinne verstandenen Satze der Projektivität in dem *Poncelet*schen, auf die projektive Invarianz des Doppelverhältnisses gegründeten Beweise erscheint;

2) an die Einführung der Koordinaten ohne Benutzung eines Maßes, also an die *v. Staudt*sche Rechnung mit Würfen und an die *Hankel*schen und *Schur*schen Entwicklungen über die Rechnung mit Strecken in der projektiven Geometrie.

Hilbert hat, indem er von einer auf den *Desargues*schen Satz

---

250) Math. Ann. 51 (1894), p. 401; vgl. auch ebenda 55 (1901), p. 265, und *L. Balser,* Math. Ann. 55 (1901), p. 243.

251) Paris C. R. 1897, p. 638, 859; 1898, p. 213.

252) Vgl. Fußnote 230.

253) Gergonne Ann. 15 (1825), p. 387, besonders p. 390 f. (vgl. III C 1, *Dingeldey,* Nr. 5).

gegründeten Streckenrechnung ausging, die Rolle des *Pappusschen Satzes* dahin aufgeklärt, daß dieser der *Kommutativität der Multiplikation* gleichwertig ist.

Aber arithmetisch läßt sich ein System nicht-Archimedischer Zahlen definieren, für welche diese Eigenschaft nicht besteht, daher zieht *Hilbert* folgenden Schluß:

Der Pappussche Satz läßt sich nicht beweisen, wenn man nur die projektiven Postulate des Raumes zu Hilfe nimmt, aber die Stetigkeit und die Kongruenz nicht benutzt.

Es gibt demnach ein abstraktes *nicht-Pappus*sches, oder, wie *Hilbert* sagt, *nicht-Pascal*sches geometrisches System, in dem die fundamentalen Eigenschaften der Anordnung und des Einanderangehörens erfüllt sind.

Was die Beziehungen zwischen den Kongruenzpostulaten und dem Satze der Projektivität betrifft, so scheint die Bedeutung dessen, was durch die Kongruenzpostulate hier hinzugefügt wird, folgende zu sein:

Wenn man nach einer endlichen Anzahl von Projektionen und Schnitten von den Punkten einer Geraden oder einer Ebene zu den Punkten derselben Geraden oder derselben Ebene zurückkehrt, so entsteht in diesem Gebilde eine Projektivität. Nun sagt der Fundamentalsatz aus, daß sich die Reihe dieser Projektivitäten in eine Gruppe mit einer endlichen Zahl (drei) von Parametern zusammenschließt. Dieses Sichzusammenschließen der genannten Reihe in eine solche Gruppe scheint nun eine Folge davon zu sein, daß man mit den Kongruenzpostulaten bereits annimmt, daß die Reihe eine gewisse geschlossene Untergruppe mit nur einem Parameter enthält.

Andererseits geht *B. Levi* [254]) davon aus, daß die Kongruenzpostulate in der nicht-Euklidischen Geometrie uns eine Polarität in der Ebene erkennen lassen, während wir in der Euklidischen Geometrie auf jeden Fall eine (orthogonale) Polarität im Bündel haben. Also: Der Satz der Projektivität in der Ebene oder im Bündel läßt sich ohne Benutzung der Stetigkeitspostulate beweisen, wenn man den deskriptiven Postulaten des Raumes die Existenz einer Polarität innerhalb des gegebenen Gebildes zweiter Stufe hinzufügt.

43. Euklidische nicht-Archimedische Geometrie. Die *Hilbert*schen Funktionalzahlen (Nr. 40) können als die Koordinaten der „Punkte“ eines nicht-Archimedischen Raumes betrachtet werden, in

254) Torino Memorie 1904, p. 283.

dem alle Postulate des Einanderangehörens, der Anordnung und der Kongruenz und das Parallelenpostulat gelten. Auf diese Weise erhält man ein einfaches Beispiel einer *euklidischen nicht-Archimedischen Geometrie.*

Hilbert hat die grundlegenden Sätze dieser Geometrie näher betrachtet in ihren Beziehungen:

1) zum Flächeninhalt. Wie in Nr. **10** gesagt worden ist, kann man ein Flächenmaß unabhängig von dem Archimedischen Postulat erhalten, sofern man *Polygone als inhaltsgleich* erklärt, nicht bloß, wenn sie *Summen kongruenter Polygone,* sondern auch, wenn sie *beliebige Aggregate kongruenter Polygone* sind.

2) zu den grundlegenden Sätzen der Maßgeometrie in der Ebene[255]).

Das Postulat III 7 der Nr. **5** bezieht sich auf die direkte und die inverse Kongruenz der Dreiecke, in denen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander kongruent sind, wobei die Sinnesgleichheit oder -ungleichheit der beiden kongruenten Winkel nicht unterschieden wird (direkte und inverse Kongruenz); die Rechtfertigung dieses Postulats liegt also in einer ideellen Erfahrung, für die im Falle der inversen Kongruenz eine Umklappung der Figur, also das Herausgehen aus der Ebene nötig ist. Bleibt man in der Ebene, so kann man die Kongruenz der beiden Dreiecke nur dann erkennen, wenn sie gleichen Sinn haben, und dann ersetzt man das Postulat III 7 durch ein Postulat über die *im engeren Sinne* verstandene Kongruenz von Dreiecken.

Also:

Man nehme, indem man sich auf Beziehungen von Figuren in der Ebene beschränkt, die gewöhnlichen Postulate des Einanderangehörens und der Parallelen, der Anordnung und der Kongruenz (vgl. I, II, III der Nrn. **3**, **4**, **5**) *an und schränke im besondern die der Kongruenz in der Weise ein, daß man nur das Postulat über die im engeren Sinne verstandene Kongruenz von Dreiecken gelten läßt; dann kann man das Kongruenzpostulat im weiteren Sinne beweisen, wenn man hinzunimmt:*

a) *das Archimedische Postulat,*

b) *das folgende Postulat der Nachbarschaft:*

Ist irgend eine Strecke AB vorgelegt, so gibt es stets ein Dreieck, in dessen Innerem keine zu AB kongruente Strecke sich finden läßt.

---

255) London Math. Soc. Proc. 35 (1903), p. 50; Grundlagen, Anhang II.

Aber wenn man das Archimedische Postulat wegläßt, so läßt sich der Satz über die im weiteren Sinne verstandene Kongruenz von Dreiecken nicht beweisen.

In der Tat gibt es ein geometrisches System, in dem die genannten Postulate gelten, aber nicht die *Kongruenz der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.* In diesem System, das *Hilbert nicht-Pythagoräisch* nennt, findet folgendes statt:

a) man kann die geometrische Theorie der Proportionen begründen;

b) man kann beweisen, daß die Summe der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks durch Subtraktion flächengleich ist dem Quadrate über der Hypotenuse (Satz des Pythagoras), aber daraus folgt nicht die bekannte Relation zwischen den Katheten und der Hypotenuse dieses Dreiecks, weil *das De Zolt*sche *Prinzip*, das der gewöhnlichen Messung des Flächeninhalts zugrunde liegt, *nicht gilt* (Nr. **10**);

c) es gilt nicht der Satz, daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer ist als die dritte.

Nimmt man aber das *De Zolt*sche Prinzip hinzu, so kann man den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck beweisen [256]).

Diese Resultate klären über die Beziehungen der grundlegenden Sätze der ebenen (im Sinne der Alten konstruierten) Maßgeometrie zur Anschauung des dreidimensionalen Raumes auf, ebenso wie das Resultat der Nr. **20** über den *Desargues*schen Satz die Bedeutung des dreidimensionalen Raumes für die Begründung der projektiven Geometrie darlegt.

44. Nicht-Archimedische Entwicklungen über die Parallelentheorie. Die Beziehungen des Archimedischen Postulats zur Theorie der Parallelen sind unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten klargestellt worden:

1) mit Hilfe der nicht-Archimedischen Begründung der hyperbolischen Geometrie (*Dehn, Schur, Hilbert*);

2) mit Hilfe der nicht-Archimedischen Entwicklungen hinsichtlich der Sätze von *Saccheri* (oder von *Legendre*), d. h. durch die Konstruktion der Systeme von *M. Dehn.*

---

256) Das ging schon implizite aus der Arbeit von *A. Bonnesen*, Nyd Tidskrift for Mathematik, 11 B (1900), p. 25 hervor.

In der Begründung der Parallelentheorie von *Bolyai-Lobatschefskij* wird mehrfach von dem Stetigkeitspostulat in der gewöhnlichen *Dedekind*schen Form und auch von dem Archimedischen Postulat (das in dem *Dedekind*schen enthalten ist) Gebrauch gemacht.

Die Stetigkeit wird zunächst zu Hilfe genommen, um die *Existenz der Parallelen* (durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden) darzutun, insofern ja die Parallelen als *Grenzgerade*, die die schneidenden von den nicht-schneidenden Geraden trennen, definiert werden.

Man nehme diese Existenz als besonderes Postulat an und füge sie den auf die Ebene beschränkten Postulaten I, II, III der Nrn. **3**, **4**, **5** hinzu; dann kann man, wie es *D. Hilbert* sehr einfach gemacht hat [257]), die *Bolyai-Lobatschefskij*sche Theorie entwickeln, ohne von der Stetigkeit oder dem Archimedischen Postulat Gebrauch zu machen. Es sei dazu bemerkt [258]), daß die Möglichkeit dieser Begründung als in der Begründung der nicht-Archimedischen projektiven Geometrie eingeschlossen betrachtet werden kann, da mit der Annahme der Existenz der Parallelen in der Ebene der Grenzkegelschnitt der eigentlichen Punkte gegeben wird, in bezug auf welchen die Metrik im Sinne von *Cayley-Klein* definiert ist (Nr. **22**).

Nun hat *F. Schur* [259]) folgendes bewiesen:

Die Existenz von Geraden in der Bolyai-Lobatschefskijschen Ebene, die sich auf dem Fundamentalgebilde schneiden, kann innerhalb der Ebene ohne Benutzung der Stetigkeit oder des Archimedischen Postulats bewiesen werden, wenn man den gewöhnlichen Postulaten des Einanderangehörens, der Anordnung und der Kongruenz das Postulat hinzufügt, daß ein Kreis und eine Gerade, die von seinem Mittelpunkte um weniger als der Radius entfernt ist, zwei Punkte gemeinsam haben (das Grundpostulat der Euklidischen Konstruktionen).

Das *Schur*sche Resultat wird durch den Umstand bemerkenswert, daß es in gewissem Sinne umkehrbar ist:

Die Existenz von Geraden in der Bolyai-Lobatschefskijschen Ebene, die sich auf dem Fundamentalgebilde schneiden, bildet, wenn die genannten Postulate des Einanderangehörens, der Anordnung und der Kongruenz (I, II, III der Nrn. **3**, **4**, **5**) *erfüllt sind, eine Annahme, die*

---

257) Math. Ann. 57 (1903), p. 137—150; Grundlagen, p. 107—120. Vgl. *H. Liebmann,* Math. Ann. 59 (1904), p. 110—128.

258) Vgl. *F. Schur,* Math. Ann. 59 (1904), p. 314.

259) Math. Ann. 55 (1900), p. 314—320.

das Postulat über die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises enthält.

Man betrachte in der Tat die projektive Metrik in bezug auf den Grenzkegelschnitt der eigentlichen Punkte. Sind die Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit einer eigentlichen Geraden gegeben, so kann man die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden bestimmen, die von dem Mittelpunkte um weniger als der Radius entfernt ist.

Übrigens ist von *D. Hilbert* [260]) durch eine Untersuchung der Konstruktionen, die man mit dem Streckenübertrager oder noch einfacher mit dem Einheitsübertrager ausführen kann, bewiesen worden, daß das Postulat über die Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden nicht aus den Postulaten I, II, III der Nrn. **3**, **4**, **5** folgt.

Nun zu den Beziehungen zwischen den *Saccheri*schen Sätzen von der Winkelsumme eines Dreiecks und den Annahmen über die Parallelen!

M. Dehn [261]) *hat auf Grund der Postulate des Einanderangehörens, der Anordnung* [262]) *und der Kongruenz und ohne Benutzung des Archimedischen Postulats bewiesen, daß die Summe s der Winkel in jedem Dreieck größer als zwei Rechte, gleich zwei Rechten oder kleiner als zwei Rechte ist, wenn dies für ein besonderes Dreieck zutrifft.*

Wird nun das Archimedische Postulat nicht benutzt, so führt das Eintreten des ersten Falles ($s > 2R$) *nicht notwendig dazu, daß die Gerade eine geschlossene Linie ist und alle Geraden der Ebene schneidende sind; und beim Eintreten des zweiten Falles* ($s = 2R$) *kann man dann das Euklidische Postulat von der einzigen Parallelen nicht beweisen; nur das Eintreten des dritten Falles* ($s < 2R$) *führt (wie in der gewöhnlichen hyperbolischen Geometrie) auf die Existenz unendlich vieler Geraden durch einen Punkt der Ebene, die eine gegebene Gerade nicht schneiden.*

Diese Resultate sind von *Dehn* durch die Konstruktion neuer geeigneter nicht-Archimedischer geometrischer Systeme erhalten worden:

der (*nicht-Legendreschen* nach seiner Benennung, besser wohl) *nicht-Saccherischen Geometrie,* wo $s > 2R$ ist und durch einen Punkt der Ebene unendlich viele Gerade gehen, die eine gegebene Gerade nicht schneiden (oder, wie er sagt, ihr *parallel* sind) [263]);

---

260) Grundlagen, p. 73.

261) Math. Ann. 53 (1900), p. 404.

262) Diese werden, wo es nötig ist, so modifiziert, daß die gerade Linie geschlossen sein kann.

263) Dieses System wäre im Zusammenhang mit dem zweiten Veroneseschen Gebilde (Nr. **41**) zu studieren.

der *semi-Euklidischen Geometrie,* wo $s = 2R$ ist und es auch unendlich viele Gerade gibt, die eine gegebene Gerade nicht schneiden.

Diese Resultate sind in folgendem Schema zusammengefaßt:

Die Winkelsumme im Dreieck ist:	Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden:		
	keine nicht Schneidende	eine nicht Schneidende	unendlich viele nicht Schneidende
$> 2R$	Elliptische Geometrie	Unmöglich	Nicht-Saccherische Geometrie
$= 2R$	Unmöglich	Euklidische Geometrie	Semi-Euklidische Geometrie
$< 2R$	Unmöglich	Unmöglich	Hyperbolische Geometrie

(Abgeschlossen im März 1907.)

III A B 2. DIE BEGRIFFE „LINIE" UND „FLÄCHE".

VON

H. v. MANGOLDT

IN DANZIG.

Inhaltsübersicht.

---

1. Notwendigkeit einer genauen Erklärung. In den Lehrbüchern der Geometrie und der Analysis und in den allgemeinen sowie den mathematischen Wörterbüchern wird der Begriff *Linie* in der Regel entweder gar nicht, oder höchstens als „Länge ohne Breite"[1], oder „Grenze einer Fläche"[2], oder „Bahn eines Punktes"[3]) erklärt. Ja man begegnet sogar der Ansicht, daß er ein Grundbegriff sei, der sich nicht weiter erklären lasse[4].

---

1) *Euklid,* Elemente, 1. Buch, Erkl. 2.

2) Ebd. Erkl. 6.

3) *Procli* Diadochi Comm. ex rec. *G. Friedlein,* Leipzig 1873, p. 97; *Pappi* Alexandrini collectionis quae supersunt ed. *F. Hultsch,* 2, Berlin 1877, p. 662.

4) Z. B. in *Diderot* und *D'Alembert,* Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné... Nouv. éd. 9, Genève 1777, p. 758, und hieraus wiederholt in *G. S. Klügel,* Mathematisches Wörterbuch 3, Leipzig 1808, p. 162. Bis zu einem gewissen Grade wird diese Auffassung auch von *F. Enriques,* Lezioni di geometria descrittiva, Bologna 1902, p. 167, verteidigt.

Im Gegensatz hierzu tritt in neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie (*Pasch, Peano, Hilbert, Schur*, vgl. III AB 1, Nr. 3, *Enriques*) das Bestreben hervor, nur den Punkt, die gerade Strecke und die ebene Fläche als Grundbegriffe anzusehen, die nicht anders als durch den Hinweis auf geeignete Gegenstände der Anschauung erklärt werden können, bei allen anderen geometrischen Begriffen dagegen eine den Formen der Aristotelischen Logik entsprechende Erklärung zu fordern. Dies ist namentlich bei den Begriffen „Linie" und „Fläche" berechtigt, weil man denselben sowohl einen engeren als einen weiteren Umfang beilegen kann, und weil viele Sätze der Geometrie nur dann ausnahmslos gültig sind, wenn man jene Begriffe in hinreichend enger Bedeutung nimmt[5]). Auch würde man, wie *F. Enriques* a. a. O.[4]) hervorhebt, wenn man die Begriffe Linie und Fläche als durch die Anschauung gegeben ansehen wollte, in solchen Fällen auf Schwierigkeiten geraten, wo eine Linie oder Fläche rein mathematisch durch eine geometrische Erzeugung oder mit Hilfe analytischer Formeln erklärt ist, denn man würde dann eine Erörterung der Frage nicht vermeiden können, ob und wie weit die Ergebnisse der Anschauung mit den aus der mathematischen Erklärung fließenden Folgerungen übereinstimmen.

2. Geschichtliche Entwickelung. Bei der Feststellung der Bedeutung des Allgemeinbegriffs Linie (Kurve) ist das Altertum über die zu Anfang der vorangehenden Nr. erwähnten volkstümlichen Erklärungen nicht hinausgegangen. Der erste Versuch einer schärferen Begriffsbestimmung dürfte sich in der Geometrie[6]) von *R. Descartes* vorfinden, wo zu Anfang des zweiten Buches die Frage eingehend erörtert wird, *welche Linien in die Geometrie aufzunehmen seien. Descartes* gelangt dabei zu dem Ergebnis, daß es sich empfehle, in der Geometrie den Begriff Linie auf diejenigen Gebilde zu beschränken, die gegenwärtig als *algebraische* Linien bezeichnet werden. Aber diese Ansicht hat wenig Anklang gefunden. Insbesondere hat *G. Leibniz* die von *Descartes* gegebene Begriffsfeststellung mehrfach als zu eng

5) Ein Hinweis darauf, daß der Begriff Fläche einer genaueren Erklärung bedürfe, sowie auf die einer solchen entgegenstehenden Schwierigkeiten findet sich schon bei *Ch. Dupin,* Développements de géom., Paris 1813, p. 59.

6) Zuerst 1637 erschienen als dritter Abschnitt eines ohne Angabe des Verfassers gedruckten Werkes mit dem Titel: Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode, à Leyde 1637 = Oeuvres de *Descartes* 6, Paris 1902, p. 367. Lateinische Ausgabe: „Geometria a *Renato Des Cartes* anno 1637 gallice edita etc." (ed. *Franciscus a Schooten*), Amsterdam 1659. Deutsch von *L. Schlesinger,* Berlin 1894.

bekämpft[7]) und betont, dass auch transzendente Linien wie die Cykloide und ähnliche als gleichberechtigt mit den algebraischen anzusehen seien. Gleichwohl ist die Geometrie von *Descartes* dadurch, daß sie die Anwendung der Rechnung auf die Geometrie, den Gebrauch von Koordinatensystemen und die Darstellung von Linien durch Gleichungen lehrte, auf die spätere Entwicklung von bestimmendem Einfluß gewesen. Durch sie kam der Begriff „Linie“ in die engste Verbindung mit dem Begriff „Funktion“[8]) und hat sodann an der in II A 1, *Pringsheim*, Nrr. **1**–**5**, **9**–**12** geschilderten Entwicklung dieses letzteren teilgenommen[9]).

3. Die analytische Linie. Im engsten Sinne ist das Wort *Linie* (*Kurve*) gegenwärtig gleichbedeutend mit *analytische Linie.* Dieser letztere Begriff beruht auf dem von *K. Weierstraß* entwickelten Begriff eines monogenen analytischen Gebildes erster Stufe im Gebiet von zwei oder drei Veränderlichen (II B 1, *Osgood*, Nr. **13**, **47**) und deckt sich mit diesem vollständig, sobald man das Imaginäre als durchaus gleichberechtigt mit dem Reellen ansieht.

Wenn man dagegen das Reelle bevorzugt, so zieht man nur solche monogene analytische Gebilde erster Stufe in Betracht, bei denen eine dem Gebilde angehörende Stelle sich stetig so ändern kann, daß ihre Koordinaten dauernd reell bleiben, und versteht dann unter einer *reellen analytischen Linie* die Gesamtheit aller Stellen eines solchen Gebildes, deren Koordinaten sämtlich reell sind.

Durch die Schaffung des Begriffs *analytische Linie* hat *K. Weierstraß* die schon im 18. Jahrhundert aufgetretene Frage zur Entscheidung gebracht, wie weit und unter welchen Voraussetzungen mit dem Begriff Linie die Vorstellung eines einheitlichen in allen seinen Teilen von dem gleichen Gesetz beherrschten Ganzen zu verbinden sei.

Eine analytische Linie heißt *eben* oder *gewunden* (*doppelt gekrümmt*), je nachdem sie in einer (reellen oder imaginären) Ebene enthalten ist, oder nicht.

4. Zweige einer analytischen Linie[10]). Gehört ein reeller oder imaginärer, im Endlichen liegender oder unendlich ferner Punkt mit

---

7) *G. Leibniz,* Acta Erud. Lips. an. 1684, 1686, 1693 = Ges. Werke, hrsg. v. *G. H. Pertz,* 3. Folge, Mathematik, 5. Bd. Halle 1858, p. 124, 229, 295. Vgl. auch p. 290 und 7. Bd. Halle 1863, p. 213.

8) Diese Verbindung wird beispielsweise von *L. Euler,* Introductio in analysin infinitorum 2, Lausannae 1748, p. 5—6, besonders betont.

9) Vgl. hierzu den Bericht von *A. Brill* und *M. Noether,* Deutsche Math.-Vereinig. Jahresber. 3 (1892/93), p. 114 ff.

10) Vgl. *A. Brill* u. *M. Noether,* a. a. O. p. 379 f.

den Koordinaten x_0, y_0 [, z_0] einem analytischen Gebilde erster Stufe im Gebiet von zwei [drei] Veränderlichen an, so bildet er den Mittelpunkt[11]) wenigstens eines Elementes dieses Gebildes (II B 1, Nr. **13**, **47**). Aber es kann auch vorkommen, daß es mehrere, ja sogar unendlich viele[12]) Elemente des Gebildes gibt, deren Mittelpunkte sämtlich die Koordinaten x_0, y_0 [, z_0] haben. Außerdem ist es möglich, daß eine Grenzstelle (II B 1, p. 40 u. 110) des Gebildes ebenfalls die Koordinaten x_0, y_0 [, z_0] hat, oder daß aus noch anderen Gründen nicht alle in der Nähe der Stelle x_0, y_0 [, z_0] liegenden Stellen des Gebildes durch diejenigen Elemente erschöpft werden, die in x_0, y_0 [, z_0] ihren Mittelpunkt haben[13]). Die Gesamtheit aller Punkte einer analytischen

---

11) Wenn ein „Element" des Gebildes durch zwei [drei] Gleichungen

$$x = \varphi(t),\ y = \chi(t)\,[,\ z = \psi(t)]$$

gegeben ist, wo $\varphi(t)$, $\chi(t)$ [, $\psi(t)$] Potenzreihen bedeuten, welche von Null verschiedene Konvergenzradien haben und auch negative Potenzen von t in endlicher Anzahl enthalten können, so wird hier als „Mittelpunkt des Elementes" diejenige Stelle bezeichnet, deren Koordinaten sich aus den erwähnten Gleichungen für $t = 0$ ergeben.

12) Beispiel: Nimmt man α reell und irrational, so stellen die Gleichungen:

$$x = \cos[(\alpha + 1)t] - \cos t,$$
$$y = \sin[(\alpha + 1)t] - \sin t,$$

wo t eine völlig unbeschränkte komplexe Veränderliche bedeutet, eine analytische Linie dar, die unendlich oft durch den Nullpunkt geht, nämlich für $t = 0$ $\pm \frac{2\pi}{\alpha}$; $\pm 2 \cdot \frac{2\pi}{\alpha}$; $\cdots$. Da diesen Werten von t lauter verschiedene Werte des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ entsprechen, so ist die Stelle (0, 0) Mittelpunkt von unendlich vielen verschiedenen Elementen des Gebildes.

13) Beispiele: I. — Man unterwerfe die komplexe Veränderliche x zunächst der Bedingung: $|x| < 1$, und setze:

$$y = \frac{1}{l\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2\,l\,2},$$

mit der Bestimmung, dass die Wurzel für $x = 0$ in $+1$ übergehen und dass $l\,2$ den reellen und $l\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)$ den Hauptwert des Logarithmus bedeuten soll. Dann ist die Funktion y an der Stelle $x = 0$ analytisch und nimmt daselbst den Wert $\frac{1}{2\,l\,2}$ an. Führt man nunmehr die Veränderliche x von 0 aus auf einem den Punkt $+1$ oder den Punkt -1 einmal umschließenden Wege wieder unendlich nahe zu 0 zurück, wobei die Wurzel jetzt dem Grenzwert -1 zustrebt, so nähert sich y wieder dem Grenzwert $\frac{1}{2\,l\,2}$, aber die Stelle $x = 0$, $y = \frac{1}{2\,l\,2}$ bildet jetzt eine Grenzstelle des durch das ursprünglich betrachtete Funktionselement erklärten analytischen Gebildes.

Linie, deren Koordinaten beziehentlich in der Nähe gegebener fester Werte liegen, kann daher unter Umständen von verwickelter Beschaffenheit sein. Um derartige Verhältnisse und namentlich auch die Art, wie eine Linie nach dem Unendlichen verläuft, leichter übersehen zu können, denkt man sich eine analytische Linie häufig in mehrere *Zweige* zerlegt, d. h. zusammenhängende Teile, für deren gegenseitige Abgrenzung folgendes als Regel gilt: Falls ein und derselbe Punkt P_0 gleichzeitig Mittelpunkt mehrerer Elemente einer analytischen Linie ist, so sind von den in der Nähe von P_0 liegenden Punkten der Linie diejenigen, welche ein und demselben jener Elemente angehören, stets dem gleichen Zweige, dagegen solche Punkte, die in verschiedenen Elementen liegen, verschiedenen Zweigen zuzurechnen[14]). Im übrigen werden die Grenzen der einzelnen Zweige meistens unbestimmt gelassen.

5. Einsiedler. Wenn man eine reelle analytische Linie l durch Hinzunahme der imaginären Stellen des entsprechenden analytischen Gebildes erweitert, so kann es vorkommen, daß ein reeller Punkt P_0 von l den Mittelpunkt von Elementen des erweiterten Gebildes bildet, die keinen andern in der Nähe von P_0 liegenden reellen Punkt enthalten[15]). In einem solchen Fall nennt man den Punkt P_0 einen *Ein-*

II. — (Vgl. *F. Klein,* Anw. d. Diff.- u. Integralr. auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 239, u. *A. Schoenflies,* Math. Ann. 58 (1904), p. 216.) Ein beliebiger Punkt einer Epicykloide ist immer Mittelpunkt nur eines einzigen oder höchstens zweier Elemente der Epicykloide. Wenn aber die Epicykloide so bestimmt ist, daß die Radien des festen und des rollenden Kreises ein irrationales Verhältnis haben, und daß daher die reellen Züge der Epicykloide einen Kreisring überall dicht bedecken, so liegen in jeder Nähe eines beliebigen Epicykloidenpunktes P stets noch andere Punkte, die zwar der Epicykloide, aber keinem Element derselben angehören, welches in P seinen Mittelpunkt hat.

14) Bei der Betrachtung einer *reellen* analytischen Linie wird das Wort Zweig zuweilen in etwas anderer Bedeutung gebraucht, nämlich zur Bezeichnung eines Teiles der Linie, der durch stetige Bewegung eines Punktes so erzeugt werden kann, daß kein Stück desselben mehrfach beschrieben wird. Vgl. z. B. Encyclopaedia Britannica, 9. ed., Edinburg 1875 ff., American reprint, Philadelphia 1894, Art. Curve. Bei dieser Erklärung kann es vorkommen, daß ein Zweig sich selbst schneidet, während dies bei der im Text gegebenen Erklärung nicht möglich ist. Ferner dient bei der Betrachtung einer reellen *ebenen* analytischen Linie das Wort Zweig manchmal auch zur Bezeichnung eines solchen Teiles, längs dessen die eine Koordinate eine *eindeutige* Funktion der anderen ist. Vgl. *L. Hoffmann,* Math. Wörterbuch 2, Berlin 1859, p. 164.

15) Beispiel: Versteht man unter a, b beliebige reelle der Bedingung $a < b$ genügende Zahlen, so hat der der Linie $y^2 - (x-a)^2(x-b) = 0$ angehörende Punkt $x = a$, $y = 0$ die erwähnte Eigenschaft.

siedler[16]) (*isolierten* oder der Linie *konjugierten Punkt*[17])). Damit, daß ein Punkt P_0 einer Linie l als Einsiedler bezeichnet wird, ist indessen nicht immer gesagt, daß er völlig vereinzelt liege. Außer den durch ihn hindurchgehenden imaginären Zweigen kann es nämlich noch einen oder mehrere andere reelle Zweige von l geben, die ebenfalls durch P_0 gehen und auf denen daher in jeder Nähe von P_0 andere zu l gehörende reelle Punkte vorhanden sind[18]).

6. Darstellung durch Gleichungen. Es seien x_0, y_0 [, z_0] die Koordinaten eines inneren Punktes P_0 eines Zweiges einer analytischen Linie und t eine auf eine gewisse Umgebung des Nullpunktes zu beschränkende Hilfsveränderliche (Parameter). Dann ist es, wie aus dem Begriff einer analytischen Linie und der in Nr. 4 gegebenen Erklärung eines Zweiges einer solchen folgt, immer auf mannigfaltig verschiedene Weisen möglich, zwei [drei] Gleichungen von der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} x - x_0 = \mathfrak{P}_1(t), \\ y - y_0 = \mathfrak{P}_2(t), \\ [z - z_0 = \mathfrak{P}_3(t),]\ ^{19)} \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1(t)$, $\mathfrak{P}_2(t)$ [, $\mathfrak{P}_3(t)$] für $t = 0$ verschwindende, in der erwähnten Umgebung konvergente Potenzreihen von t bedeuten, so zu bestimmen, daß man aus diesen Gleichungen für jeden Wert von t die Koordinaten x, y [, z] eines dem betrachteten Zweige angehörenden Punktes erhält und zugleich die Koordinaten eines jeden dieser Punkte, der in einer gewissen Nähe von P_0 liegt, ein und nur einmal bekommt, wenn man t die erwähnte Umgebung des Nullpunktes ganz durchlaufen läßt (*Parameterdarstellung eines Elementes einer analytischen Linie.* — Handelt es sich um ein Element eines *reellen* Zweiges, so können der Parameter t und die Koeffizienten der Reihen $\mathfrak{P}_1(t)$, $\mathfrak{P}_2(t)$ [, $\mathfrak{P}_3(t)$] der Bedingung unterworfen werden, *reell* zu sein).

Von je zwei verschiedenen dieser Darstellungen kann die eine in die andere dadurch übergeführt werden, dass man für den bei der

16) Ein solcher Einsiedler tritt schon bei *G. Cramer,* Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750, p. 449, in einem Beispiel auf.

17) *J. Plücker,* Anal.-geom. Entwickelungen 2, Essen 1831, p. 267 u. 292; oder System der anal. Geom., Berlin 1835, p. 196 und an mehreren anderen Stellen. Vgl. auch *G. Salmon,* Anal. Geom. d. höh. eb. Kurven, deutsch von *W. Fiedler,* Leipzig 1873, p. 28; 2. Aufl. 1882, p. 33.

18) *J. Plücker,* Theorie der algebr. Kurven, Bonn 1839, p. 172.

19) Falls x_0, y_0 [, z_0] nicht sämtlich endliche Werte haben, sind hier wie üblich unter $x - \infty$, $y - \infty$ [, $z - \infty$] beziehentlich die Ausdrücke $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ $\left[, \frac{1}{z}\right]$ zu verstehen.

einen Darstellung benutzten Parameter t eine passend gewählte Funktion $f(\tau)$ des bei der anderen benutzten Parameters τ einsetzt, die für $\tau = 0$ analytisch ist und den Bedingungen: $f(0) = 0$; $f'(0) \neq 0$ genügt (II B 1, Nr. **11**).

Setzt man jedoch, nachdem man ein Element einer analytischen Linie in der eben beschriebenen Weise durch zwei [drei] Gleichungen von der Form (1) dargestellt hat, für t eine Funktion $\varphi(\tau)$ ein, die für $\tau = 0$ analytisch ist und daselbst verschwindet, aber der Bedingung $\varphi'(0) \neq 0$ nicht mehr genügt, so erhält man eine Darstellung des betrachteten Elementes, die jeden Punkt desselben, der in einer gewissen Nähe des Mittelpunktes liegt, aber von diesem verschieden ist, *mehrmals* liefert. Darstellungen dieser Art werden von *L. Raffy*[20]) als *uneigentliche Darstellungen* bezeichnet. Umgekehrt liefern je zwei [drei] Gleichungen von der Form (1), vorausgesetzt, daß die rechten Seiten nicht alle identisch gleich Null sind, eine eigentliche oder uneigentliche Darstellung eines Elementes einer analytischen Linie.

Über die Parameterdarstellung einer analytischen Linie *im ganzen* vgl. II B 1, Nr. 28.

Wenn eine ebene analytische Linie als analytisches Gebilde erster Stufe im Gebiet von zwei Veränderlichen x, y erklärt ist, und irgend ein Element dieses Gebildes ins Auge gefaßt wird, so ist es immer auf mannigfaltig verschiedene Weisen möglich, für eine gewisse Umgebung des Mittelpunktes[11]) dieses Elementes eine dort analytische Funktion $F(x, y)$ so zu bestimmen, daß sie für die dem betrachteten Element angehörenden Punkte, aber auch nur für diese verschwindet, und daß daher die Gleichung $F(x, y) = 0$ in der Nähe des Mittelpunktes zur analytischen Darstellung des Elementes dienen kann.

Ist umgekehrt im Gebiet von zwei Veränderlichen x, y für die Umgebung einer festen Stelle (x_0, y_0) eine dort analytische, im allgemeinen von Null verschiedene, aber an der Stelle (x_0, y_0) selbst verschwindende Funktion $F(x, y)$ erklärt, so bildet die Gesamtheit aller Wertepaare x, y, welche in einer gewissen Nähe der Stelle (x_0, y_0) liegen und die Gleichung $F(x, y) = 0$ erfüllen, entweder *ein* Element einer analytischen Linie, oder sie besteht aus einer *endlichen* Anzahl solcher Elemente, die entweder verschiedenen Zweigen ein und derselben Linie oder auch verschiedenen Linien angehören können (II B 1, Nr. **44**—**46**; III D 1, 2, Nr. **19**).

20) *L. Raffy,* Leçons sur les applications géométriques de l'analyse, Paris 1897, p. 3—4 u. 6.

Ferner ist es in vielen Fällen, wo im Gebiet von zwei Veränderlichen eine analytische Linie gegeben ist, möglich, eine *eindeutige* analytische Funktion $F(x, y)$ so zu bestimmen, daß die Linie sich mit der Gesamtheit aller die Gleichung $F(x, y) = 0$ befriedigenden Wertepaare x, y vollständig deckt und daß daher die Linie im ganzen durch diese Gleichung eine geeignete Darstellung findet.

Eine Umkehrung dieser Behauptung ist nicht ohne weiteres zulässig. Denn ist eine eindeutige analytische Funktion $F(x, y)$ gegeben, so sind außer dem Fall, daß die Gleichung $F(x, y) = 0$ eine analytische Linie darstellt, noch andere möglich, z. B. daß diese Gleichung eine überhaupt nicht erfüllbare Forderung ausdrückt[21]), oder daß sie mehrere verschiedene analytische Linien darstellt[22]), oder daß die Gesamtheit der die Gleichung erfüllenden Wertepaare x, y von einer analytischen Linie nur einen Teil umfaßt, ohne sie völlig zu erschöpfen[23]).

Ähnlich kann, wenn im Gebiet von drei Veränderlichen x, y, z ein analytisches Gebilde erster Stufe gegeben ist, ein beliebiges Element desselben in der Nähe seines Mittelpunktes[11]) stets in mannigfaltig verschiedener Weise durch zwei Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0; \quad g(x, y, z) = 0$$

dargestellt werden, wo f und g zwei in der Umgebung jenes Mittelpunktes analytische Funktionen bedeuten.

Wenn umgekehrt zwei Funktionen $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ gegeben sind, die in der Umgebung einer Stelle (x_0, y_0, z_0) analytisch und im allgemeinen von Null verschieden sind, aber an dieser Stelle selbst beide verschwinden, und wenn ferner von den Determinanten zweiten Grades der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{matrix} \right\|$$

wenigstens eine an der Stelle (x_0, y_0, z_0) von Null verschieden ist, so

21) Beispiel: $e^{g(x, y)} = 0$, wo $g(x, y)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet.

22) Beispiele: Eine reduzible algebraische Gleichung kann eine endliche Anzahl verschiedener Linien darstellen, während die Gleichung $\sin[g(x, y)] = 0$, wo $g(x, y)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet, unendlich viele verschiedene Linien darstellt, nämlich $g(x, y) = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

23) Beispiel: Sei $\varphi(x)$ eine für das Innere des Einheitskreises erklärte analytische Funktion, deren Argument diesen Kreis als natürliche Grenze hat. Dann umfaßt die Gesamtheit der die Gleichung $\varphi(y) - \varphi(x) = 0$ erfüllenden Wertepaare von der Geraden $y = x$ nur denjenigen Teil, für welchen $|y| = |x| < 1$ ist.

bildet die Gesamtheit 𝔊 aller Wertsysteme x, y, z, welche einer gewissen Umgebung der Stelle (x_0, y_0, z_0) angehören und die Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0; \quad g(x, y, z) = 0$$

gleichzeitig befriedigen, einen einzigen Zweig einer analytischen Linie. Sind dagegen die erwähnten Determinanten an der Stelle (x_0, y_0, z_0) sämtlich gleich Null, so kommt es darauf an, ob die Funktionen f, g einen an der Stelle (x_0, y_0, z_0) analytischen und daselbst verschwindenden gemeinschaftlichen Teiler haben, oder nicht. Ist ein solcher Teiler nicht vorhanden, so besteht 𝔊 aus einer endlichen Anzahl von Linienzweigen, die ein und derselben oder auch verschiedenen analytischen Linien angehören können. Haben dagegen die Funktionen $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ einen gemeinschaftlichen Teiler der beschriebenen Art, so setzt sich 𝔊 aus einer endlichen Anzahl von Linienzweigen und *Flächenstücken* zusammen. Dabei ist wenigstens ein Flächenstück immer vorhanden, während Linienzweige, die nicht auf diesem liegen, auch fehlen können [24]).

Eine ähnliche Darstellung wie im kleinen ist häufig auch im grossen zulässig. Ist nämlich im Gebiet von drei Veränderlichen x, y, z eine analytische Linie l gegeben, so ist es in vielen Fällen möglich, zwei eindeutige analytische Funktionen $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ so zu bestimmen, daß die Linie l genau mit der Gesamtheit aller die Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0; \quad g(x, y, z) = 0$$

gleichzeitig befriedigenden Wertsysteme x, y, z zusammenfällt und daher durch diese beiden Gleichungen *im ganzen* dargestellt werden kann.

Aber auch hier ist wie bei ebenen Linien eine Umkehrung nicht ohne weiteres zulässig. Besondere Erwähnung verdient namentlich der Umstand, daß auch in dem Fall, wo $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ von einander verschiedene irreduzibele ganze rationale Funktionen bedeuten, die Schnittlinie der Flächen

---

24) Hilfsmittel zum Beweise dieser Behauptungen finden sich in *K. Weierstraß,* Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, autogr. Berlin o. J. (1879 erschienen) = Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, p. 105 = Math. Werke 2, Berlin 1895, p. 135, und in *C. W. M. Black,* Havard Thesis 1901 = Amer. Ac. Arts Sci. Proc. 37 (1902), p. 281. Vgl. auch II B 1, Fußn. 250 u. 254. Die allgemeinere Frage nach der Beschaffenheit der Gesamtheit aller derjenigen Stellen innerhalb eines gegebenen Bereiches T im Gebiet von beliebig vielen Veränderlichen, an welchen eine endliche Anzahl gegebener in T analytischer Funktionen gleichzeitig gleich Null werden, ist von *O. Blumenthal,* Math. Ann. 57 (1903), p. 356, behandelt worden.

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = 0$$

in mehrere *verschiedene* analytische Linien zerfallen kann.

Die allgemeinen Eigenschaften der analytischen Linien und Flächen und die zu deren Darstellung dienenden Hilfsbegriffe wie Tangente, Berührungsebene, Bogenlänge, Schmiegungsebene, Krümmung u. s. w. kommen in III D 1, 2, *v. Mangoldt*, zur Besprechung.

7. Erweiterungen des Begriffs Linie. Linie als „Bild einer Funktion". Naheliegende Erweiterungen des bisher erklärten Begriffes einer analytischen Linie bestehen darin, daß man

a) ein analytisches Gebilde erster Stufe im Gebiet von mehr als drei Veränderlichen als eine analytische Linie in einem Raum von mehr als drei Dimensionen bezeichnet;

b) eine endliche oder auch abzählbar unendliche Menge analytischer Linien oder Linienstücke aus irgend welchen Gründen zu einem Ganzen vereinigt, z. B. weil sie zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks bilden, oder die Anfangslage einer schwingenden Saite kennzeichnen, und dann dieses Ganze *eine* Linie nennt[25]).

Andere Erweiterungen beziehen sich auf den Fall, daß nur *reelle* Punkte in Betracht gezogen werden.

Unter dieser Voraussetzung wird zunächst bei manchen Untersuchungen[26]) das Wort Linie lediglich als Abkürzung für „geometrisches Bild einer reellwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem" gebraucht, ohne daß dabei jedoch hinsichtlich der dem Argument oder der Funktion etwa aufzuerlegenden Einschränkungen eine allgemein angenommene Übereinkunft bestände. Auch darüber, welche Punkte an Unstetigkeitsstellen der Funktion zur Linie zu rechnen sind, finden sich verschiedene Festsetzungen[27]).

8. Linie als „Bahn eines Punktes". Der Jordansche Satz. Ferner hat die volkstümliche Erklärung einer Linie als Bahn eines Punktes dazu geführt, ein Linienstück ganz allgemein als die Gesamtheit aller Punkte zu erklären, deren Koordinaten x, y, z in einem rechtwinkligen System sich ergeben, wenn man drei reelle in ein und demselben Intervall stetige Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ einer reellen Ver-

25) Derartige Linien werden schon von *L. Euler*, Introductio in analysin inf. 2, Lausannae 1748, p. 6, erwähnt und als curvae discontinuae seu mixtae et irregulares bezeichnet.

26) Z. B. von *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 15 (1879), p. 283; *O. Stolz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 268; *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884/85), p. 49.

27) Vgl. *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884/85), p. 51, Anmerkung.

änderlichen t willkürlich annimmt, jedoch so, daß nicht alle drei konstant sind, sodann

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

setzt und die Veränderliche t das erwähnte Intervall ganz durchlaufen lässt. *A. Hurwitz*[28]) hat dieser Erklärung für den Fall, daß die Veränderliche t auf ein endliches Intervall eingeschränkt ist, aber mit beiden Grenzen desselben zusammenfallen darf, die folgende Fassung gegeben: „Eine abgeschlossene Punktmenge wird ein stetiger Kurvenbogen genannt, wenn sie das stetige Bild einer geradlinigen Strecke ist.“

Hierbei fallen indessen, wenn man von den Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ $\psi(t)$ nichts weiter als die Stetigkeit fordert, unter den Begriff ebene Linie auch solche Punktmengen, die alle Punkte eines zweifach ausgedehnten Flächenstücks, z. B. der Fläche eines Quadrates enthalten[29]).

Diese Möglichkeit wird jedoch ausgeschlossen, wenn man mit *C. Jordan*[30]) und *E. Study*[31]) das Vorhandensein mehrfacher Punkte ausschließt, also eine ganz im Endlichen liegende Punktmenge erst dann ein einfaches Kurvenstück nennt, wenn sich ihre Punkte den Punkten einer endlichen Strecke, der ihre Endpunkte zugerechnet werden, nicht nur stetig, sondern auch *eindeutig umkehrbar* zuordnen lassen, und dabei nur die eine Ausnahme gestattet, daß der Endpunkt der Kurve wieder mit dem Anfangspunkt zusammenfallen darf (geschlossene Kurve).

Eine so erklärte und der angegebenen Bedingung genügende geschlossene ebene Linie *teilt*, wie *C. Jordan*[32]) gezeigt hat, *die Ebene stets in zwei getrennte Kontinua*, ein inneres und ein äusseres. (Über eine wesentliche Ergänzung dieses Satzes vgl. Nr. 9.)

Aber in anderer Hinsicht kann eine solche Linie wesentliche Verschiedenheiten von den analytischen Linien aufweisen, indem nämlich

---

28) *A. Hurwitz,* Verhandl. d. ersten intern. Math.-Kongr. in Zürich, Leipzig 1898, p. 102. Vgl. I A 5, *Schoenflies*, Nr. **11**.

29) Dies wurde zuerst von *G. Peano,* Math. Ann. 36 (1890), p. 157, nachgewiesen. Geometrische Erläuterungen gaben *D. Hilbert,* Math. Ann. 38 (1891), p. 459; *A. Schoenflies,* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung 8, 2 (1900), p. 121—125; *E. H. Moore,* Trans. of the american math. soc. 1 (1900), p. 72, und *F. Klein*, Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechnung auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 238 ff.

30) *C. Jordan,* Cours d'analyse, 2. éd. 1, Paris 1893, p. 91.

31) *E. Study,* Math. Ann. 47 (1896), p. 314.

32) *C. Jordan,* Cours d'analyse, 2. éd. 1, Paris 1893, p. 91—99. Vgl. auch *A. Schoenflies,* Gött. Nachr. 1896, p. 79, u. Math. Ann. 62 (1906), p. 286, sowie *W. F. Osgood,* Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig 1906, p. 120—141. — Über die Umkehrung des *Jordan*schen Satzes vgl. Nr. **9**.

eine Tangente in keinem Punkte mehr vorhanden zu sein braucht und der Begriff Bogenlänge gänzlich hinfällig werden kann. (Vgl. II A 1, *Pringsheim*, Nr. **10**, **11**, und II A 2, *Voss*, Nr. **4**.) Ferner ist, wie *W. F. Osgood*[33]) an einem Beispiel nachgewiesen hat, bei einer geschlossenen ebenen Linie der in Rede stehenden Art der Fall möglich, daß das ganz im Endlichen liegende von ihr umschlossene innere Kontinuum keinen bestimmten Flächeninhalt mehr hat.

Zu anderen Beispielen solcher nichtanalytischen „*Jordan*-Kurven“, die sich in vieler Hinsicht durch überaus sonderbare Eigenschaften auszeichnen, hatte schon früher die Lehre von den automorphen Funktionen geführt[34]). Diese Beispiele sind ebenso wie das von *Osgood* angegebene namentlich auch deswegen bemerkenswert, weil es sich bei ihnen um nichtanalytische Linien handelt, die ohne jede Benutzung arithmetischer Operationen *rein geometrisch* erklärt werden können. Besonders eingehend haben *R. Fricke* und *F. Klein* diejenige hierher gehörende Linie untersucht[35]), welche zwei Kontinua voneinander scheidet, die sich in folgender Weise ergeben: Man nehme (Fig. 1) in einer Ebene vier einander, ausschliessende Kreise k_1, k_2, k_3, k_4, von denen jeder zwei andere, aber nur diese, berührt, so an, daß ein sie alle rechtwinklig schneidender Kreis nicht vorhanden ist, fasse sodann die beiden Kreisbogenvierecke P, P' ins Auge, in welche der von den Scheiben der vier Kreise nicht bedeckte Teil der Ebene zerfällt, und rechne zum einen Kontinuum

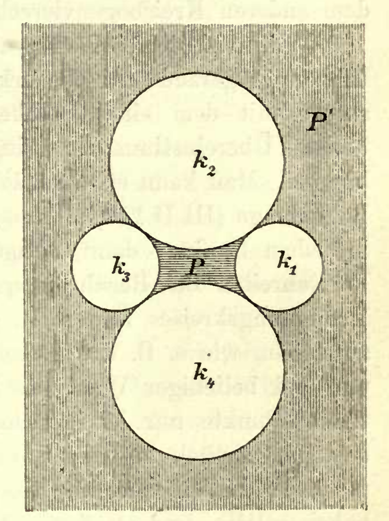


Fig. 1.

33) *W. F. Osgood,* Trans. of the american math. soc. 4 (1903), p. 107.

34) Diese nichtanalytischen Linien wurden zuerst von *F. Klein* bemerkt, der *H. Poincaré* brieflich darauf aufmerksam machte. Der betreffende Brief wird von *Poincaré,* Paris C. R. 92 (1881), p. 1486, erwähnt, doch sind dort nur wenige Zeilen aus demselben abgedruckt. Vgl. ferner *H. Poincaré,* Acta math. 3 (1883), p. 78—80, und *R. Fricke* u. *F. Klein,* Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Funktionen 1, Leipzig 1897, p. 131—134. Vgl. II B 4, *Fricke.*

35) *R. Fricke,* Math. Ann. 44 (1894), p. 580—587; *R. Fricke* u. *F. Klein,* Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Funktionen 1, Leipzig 1897, p. 411—428, und *F. Klein,* Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechnung auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 298 ff., wo manche Beweise anders gefaßt sind.

erstens alle Punkte von P mit Ausnahme der Ecken,

zweitens die Punkte der Bereiche, welche aus P durch symmetrische Wiederholung an den Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 entstehen, wieder mit Ausnahme der Ecken,

drittens die Punkte aller Bereiche, welche aus dem so erweiterten Bereiche durch abermalige symmetrische Wiederholung desselben an seinen Seiten hervorgehen,

und so fort, und leite das andere Kontinuum in gleicher Weise aus dem anderen Kreisbogenviereck P' ab[36]).

Will man den zunächst als stetiges und eindeutig umkehrbares Bild einer geraden Strecke erklärten Begriff eines einfachen Kurvenstücks mit dem eines Stückes einer reellen analytischen Linie in bessere Übereinstimmung bringen, so bedarf es weiterer Einschränkungen. Man kann etwa zunächst das Vorhandensein einer bestimmten Bogenlänge (III D 1, 2, *v. Mangoldt,* Nr. **10**), dann das einer Tangente in jedem Punkte, dann stetige Drehung der Tangente bei stetigem Fortschreiten des Berührungspunktes, dann das Vorhandensein eines Krümmungskreises fordern u. s. w., oder noch andere Bedingungen aufstellen, wie z. B. daß Ecken, Spitzen und andere singuläre Punkte und bei beliebiger Wahl des Koordinatensystems auch höchste und tiefste Punkte nur in endlicher Anzahl vorhanden sein sollen, daß das Kurvenstück mit einer Geraden, einem Kreis, oder anderen elementaren Linien stets nur eine endliche Anzahl von Punkten gemein haben soll[37]), und so fort. Aber wie weit man hierbei gehen und welche Form man den einzuführenden Einschränkungen geben soll, darüber besteht keine allgemein angenommene Übereinkunft[38]). Beispielsweise nennt *W. F. Osgood*[39]) ein ebenes Kurvenstück der hier in

---

36) Der Beweis, dass die so rein geometrisch erklärte „Grenzkurve“ wirklich als stetiges und eindeutig umkehrbares Bild einer geraden Strecke angesehen werden kann, findet sich bei *R. Fricke* u. *F. Klein,* Vorles. üb. d. Theorie d. automorphen Funktionen 1, Leipzig 1897, p. 420, und bei *F. Klein,* Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechnung auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 316 f.

37) Vgl. *O. Stolz,* Vorl. üb. allgemeine Arithmetik 1, Leipzig 1885, p. 193—194, und II A 1, *Pringsheim,* Nr. **11**.

38) Dementsprechend sagt *E. Study,* Math. Ann. 47 (1896), p. 315, „daß wir einen allgemein annehmbaren Kurvenbegriff zur Zeit überhaupt nicht besitzen“, und macht aufmerksam auf die Unterschiede der Betrachtungen in der analytischen Geometrie, wo auch von imaginären Kurven geredet wird, bei Randwertaufgaben und bei Integrationswegen auf *Riemann*schen Flächen.

39) *W. F. Osgood,* Trans. of the american math. soc. 1 (1900), p. 310, und II B 1, *Osgood,* p. 9 Anmerkung.

Rede stehenden Art *regulär*, wenn dasselbe in jedem Punkt eine Tangente hat, die sich bei stetiger Bewegung des Berührungspunktes ebenfalls stetig dreht, während *F. Klein*[40]) fordert, daß das Kurvenstück durch zwei Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ darstellbar sein solle, wo $\varphi(t)$, $\chi(t)$ Funktionen bedeuten, die in einem Intervall von begrenzter Schwankung und eine endliche Anzahl von Malen differenzierbar sind. Abermals anders hat *A. Kneser*[41]) die zu stellenden Bedingungen gefaßt. Er versteht nämlich unter einem „nirgends singulären ebenen Bogen" eine „im Sinne der projektiven Anschauung stetige von Doppelpunkten und Doppeltangenten freie Punktreihe mit überall eindeutig bestimmter und stetig variierender Tangente, für welche die folgenden *v. Staudt*schen Sätze gelten:

I. Durchläuft der Punkt T den Bogen in bestimmter Richtung und ist t seine jedesmalige Tangente, so ändert der Schnittpunkt (gt) der Tangente mit einer festen Geraden g die Richtung seiner Bewegung längs dieser in den und nur den Lagen der Elemente t und T, in welchen die Gerade durch T geht, ohne mit t identisch zu werden.

II. Die Verbindungslinie FT ändert, wenn F ein fester Punkt ist, den Sinn ihrer Drehung in den und nur den Lagen der Elemente t und T, in welchen F auf t liegt, ohne mit T zusammenzufallen."

In ähnlicher Weise legt er[42]) die Grundeigenschaften eines „nirgends singulären Raumkurvenbogens" durch eine Kette von vier Sätzen fest und knüpft dann an diese Erklärungen eine Untersuchung darüber, welche allgemeinen Sätze über die gestaltlichen Verhältnisse nirgends singulärer Bogen auf sie gegründet werden können[43]).

9. Linie als „Länge ohne Breite", oder als „Grenze einer Fläche". Die Begriffsfeststellungen der Mengenlehre machen es möglich, die schon von *Euklid* gegebene Erklärung einer Linie als „Länge ohne Breite" von den ihr anhaftenden Unbestimmtheiten zu befreien. Bei Beschränkung auf die Ebene kann dies dadurch geschehen, daß man eine Linie als eine *perfekte zusammenhängende Punktmenge ohne innere*[44]) *Punkte* erklärt[45]). Vgl. I A 5, *Schoenflies*, Nr. **16**.

---

40) *F. Klein*, Anwendung d. Diff.- u. Integralr. auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 255.

41) *A. Kneser*, Math. Ann. 34 (1889), p. 205.

42) a. a. O. p. 209.

43) Eine Fortsetzung dieser Untersuchungen findet sich Math. Ann. 41 (1893), p. 349.

44) Das heißt: Wenn P ein Punkt der Menge ist, so sollen niemals alle Punkte der *Ebene*, welche in einer gewissen Nähe von P liegen, ebenfalls zur

Aber gegen diese Erklärung ist der Einwand zu erheben, daß sie insofern zu weit ist, als sie auch solche Gebilde umfaßt, die nicht als stetige und eindeutig umkehrbare Bilder einer geraden Strecke oder eines Kreises angesehen werden können. Zwei einfache Beispiele solcher Punktmengen erhält man, wie aus einem weiter unten zu erwähnenden Satze hervorgeht, in folgender Weise:

A. Indem man die Gesamtheit aller Punkte, welche dem Umfang eines Kreises angehören, um die Gesamtheit aller auf einem bestimmten Radius $\mathfrak{R}$ dieses Kreises liegenden Punkte vermehrt.

B. Indem man der „Kurve“ $y = \sin \frac{1}{x}$ zunächst das zwischen den Punkten mit den Ordinaten -1 und $+1$ enthaltene Stück der Ordinatenachse nebst seinen Endpunkten zurechnet, sodann auf der Kurve einen Punkt A mit negativer und einen Punkt B mit positiver Abszisse nach Belieben annimmt und die zu erklärende Punktmenge aus dem zwischen A und B enthaltenen Stück $\mathfrak{S}$ der Kurve und einem beliebigen von B nach A laufenden Streckenzuge bestehen läßt, der aus einer endlichen Anzahl gerader Strecken zusammengesetzt ist und weder $\mathfrak{S}$ noch sich selbst schneidet. — Vgl. I A 5, Nr. **16**, Fußn. 90.

Bei jedem dieser beiden Beispiele wird die Ebene zwar durch die erklärte Punktmenge in zwei Kontinua, ein inneres $\mathfrak{J}$ und ein äußeres $\mathfrak{A}$ geschieden, aber es zeigen sich dabei folgende Eigentümlichkeiten:

I. Bei dem Beispiel (A) sind die Punkte von $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme des auf den Kreisumfang liegenden Endpunktes zwar Grenzpunkte des inneren Kontinuums $\mathfrak{J}$, aber nicht *gemeinsame* Grenzpunkte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$.

II. Bei dem Beispiel (B) ist es nicht möglich von einem Punkte der Menge, welcher im Innern des auf der Ordinatenachse enthaltenen Stückes liegt, nach einem Punkte von $\mathfrak{J}$ eine aus einer endlichen Anzahl gerader Strecken bestehende gebrochene Linie zu ziehen, welche, abgesehen von ihrem Anfangspunkte, ganz im Innern von $\mathfrak{J}$ verliefe.

Der Übelstand, daß man zunächst zu einem zu weiten Begriff gelangt, zeigt sich ebenfalls, wenn man versucht, der volkstümlichen

---

Menge gehören. Durch den Zusatz „ohne innere Punkte“ soll lediglich die Möglichkeit ausgeschlossen werden, daß die Punktmenge alle Punkte eines *zweifach* ausgedehnten Ebenenstückes enthält.

45) In wenig abweichender Fassung findet sich diese Erklärung bei *H. Burkhardt,* Einf. in d. Theorie d. anal. Funktionen, Leipzig 1897, p. 75, X.

Erklärung einer Linie als „Grenze einer Fläche“ eine schärfere Fassung zu geben, und etwa eine ebene Linie als „Grenze eines ebenen Kontinuums“ (II B 1, Nr. **1**), oder als Teil einer solchen erklärt. Denn, wie die neuere Entwicklung der Mengenlehre (I A 5) gezeigt hat, liegt hinsichtlich der Begrenzung eines ebenen Kontinuums eine solche Fülle verschiedener Möglichkeiten vor, daß dann unter den Begriff Linie auch solche Punktmengen fallen würden, die den Vorstellungen, die man in der Sprache des gewöhnlichen Lebens mit dem Wort Linie verbindet, in keiner Weise mehr entsprechen[46]). Insbesondere kann nach *W. F. Osgood*[33]) die Grenze eines ganz im Endlichen liegenden ebenen Kontinuums einen von Null verschiedenen äußeren Inhalt (III D 1, 2, Nr. **25**) haben.

Selbst der Begriff der *gemeinsamen* Grenze eines ganz im Endlichen liegenden inneren und eines dasselbe umschließenden äußeren Kontinuums würde, wie das oben unter (B) angeführte Beispiel zeigt, Gebilde umfassen, deren Zurechnung zu den „geschlossenen Linien“ nicht ohne weiteres allgemeiner Anerkennung begegnen dürfte.

A. Schoenflies[47]) hat die Frage untersucht, in welcher Weise die eben erwähnten zu weiten Begriffe eingeschränkt werden müssen, um mit dem von *C. Jordan* (Nr. 8) aufgestellten Begriff einer geschlossenen Linie zur Deckung zu kommen. Er erklärt zunächst[48]) einen „ein-

46) Beispiele giebt *F. Klein,* Anw. d. Diff.- u. Integralr. auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 235. Besonders bemerkenswert ist unter den dort angeführten das folgende zuerst von *W. F. Osgood,* Trans. of the american math. soc. 1 (1900), p. 311, betrachtete Beispiel: Man nehme auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems eine perfekte aber nirgends dichte Punktmenge nach Belieben an, z. B. nach *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 590, die Gesamtheit aller Punkte, deren Abszissen in der Formel

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

enthalten sind, wo die Koeffizienten c_ν nach Belieben die beiden Werte 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann (andere Beispiele und Litteraturangaben bei *A. Schoenflies,* Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 8, 2 (1900), p. 101 f. u. I A 5, Nr. **13**, Fußn. 58). Nun führe man durch jeden dieser Punkte in die obere Halbebene senkrecht zur Abszissenaxe einen geraden Einschnitt von beliebiger Länge, etwa der Länge Eins, und lasse das Kontinuum, dessen Begrenzung betrachtet werden soll, aus allen inneren Punkten der so geschnittenen oberen Halbebene bestehen.

47) *A. Schoenflies,* Gött. Nachr. 1902, p. 185, und 1904, p. 514, sowie Math. Ann. 58 (1904), p. 195, 59 (1904), p. 129, und 62 (1906), p. 286.

48) Math. Ann. 58 (1904), p. 202; 59 (1904), p. 131, und Gött. Nachr. 1904, p. 516.

fachen Weg“ als einen zusammenhängenden sich selbst nicht kreuzenden Streckenzug, welcher entweder nur aus einer endlichen Zahl von Strecken besteht, oder aber, falls er unendlich viele Strecken enthält, so beschaffen ist, daß seine Ecken nur einen *einzigen* Häufungspunkt haben. Er nennt ferner[49]) einen auf der Grenze eines Kontinuums $\mathfrak{M}$ liegenden Punkt t „erreichbar für $\mathfrak{M}$“, wenn man einen, also auch *jeden* Punkt von $\mathfrak{M}$ mit t durch einen einfachen Weg verbinden kann, der, abgesehen von t selbst, ganz im Innern von $\mathfrak{M}$ liegt.

Dieser Begriff der Erreichbarkeit führt nun zu den gesuchten Einschränkungen. Der *Jordan*sche Satz kann nämlich ergänzt werden durch den Zusatz[50]), daß sämtliche Punkte einer „*Jordan*-Kurve“ immer sowohl für das innere wie für das äußere Kontinuum erreichbar sind — wodurch für solche Kurven die bei den obigen Beispielen (A) und (B) hervorgehobenen Eigentümlichkeiten ausgeschlossen werden — und der so *vervollständigte Jordan*sche Satz erweist sich auch als umkehrbar[51]): Wenn eine ganz im Endlichen liegende perfekte zusammenhängende ebene Punktmenge die gemeinsame Grenze zweier getrennten Kontinua bildet und alle ihre Punkte für beide Kontinua erreichbar sind, so läßt sie sich umkehrbar eindeutig und stetig auf den Kreis abbilden.

Für den Begriff der *gemeinsamen* Grenze eines im Endlichen liegenden inneren und eines davon getrennten äußeren Kontinuums bildet somit die beiderseitige Erreichbarkeit sämtlicher Punkte die notwendige und hinreichende Bedingung der Übereinstimmung mit dem Begriff der „*Jordan*-Kurve“.

Im Anschluß an diese Ergebnisse nennt *A. Schoenflies*[52]) eine im Endlichen liegende perfekte zusammenhängende Punktmenge eine *(eigentliche) geschlossene Kurve,* sobald sie die *gemeinsame* Grenze zweier getrennten Kontinua bildet, und eine *einfache geschlossene Kurve,* falls sie außerdem die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte für beide Kontinua erreichbar ist. Ferner bezeichnet er jede zusammenhängende Teilmenge einer geschlossenen, beziehungsweise einer einfachen geschlossenen Kurve als einen *(eigentlichen) Kurvenbogen,* beziehungsweise einen *einfachen Kurvenbogen.* In den so erklärten Begriffen der *einfachen* geschlossenen Kurve und des *einfachen* Kurven-

49) Gött. Nachr. 1904, p. 517, und Math. Ann. 62 (1906), p. 296.

50) Gött. Nachr. 1904, p. 520, und Math. Ann. 62 (1906), p. 316.

51) Gött. Nachr. 1902, p. 186, Math. Ann. 58 (1904), p. 230, und 59 (1904), p. 310. Vgl. auch *F. Riesz,* Math. Ann. 59 (1904), p. 409.

52) Math. Ann. 58 (1904), p. 216; 59 (1904), p. 147; 62 (1906), p. 305; Gött. Nachr. 1904, p. 516—517.

bogens erkennt er naturgemäße Verallgemeinerungen der Begriffe des Polygons und der Strecke, weil sie sich mit diesen im Sinne der Analysis situs als gleichwertig erweisen.

10. Funktionsstreifen. Ein Punkt kann *physikalisch* nicht anders festgelegt werden, als durch Angabe eines möglichst kleinen Raumteiles (etwa der Kreuzungsstelle zweier feinen in eine Metallplatte eingerissenen Striche), dessen Dimensionen sich jedoch niemals völlig zum Verschwinden bringen lassen. Eine Länge, die als Abstand zweier in dieser Weise festgelegten Punkte erklärt ist, kann daher immer nur bis auf eine Grösse von der Ordnung der Dimensionen der zur Festlegung der Endpunkte dienenden Raumteile bestimmt sein. Ähnlich läßt sich in anderen Fällen zeigen, daß der Zahlenwert einer extensiven Größe auch durch die sorgfältigste Erklärung niemals genau, sondern immer nur näherungsweise festgestellt werden kann. Noch viel größer sind die Unsicherheiten, die den Ergebnissen wirklich ausgeführter Messungen anhaften [53a]). Daher führt die Beobachtung eines in der Natur gegebenen Abhängigkeitsverhältnisses niemals zu der scharfen Erklärung einer mathematischen Funktion. Um diesen Umständen Rechnung zu tragen, hat *F. Klein* [53]) den Begriff des *Funktionsstreifens* eingeführt: Nach willkürlicher Annahme einer in einem endlichen Intervall $a \dots b$ stetigen Funktion $f(x)$ und einer im Verhältnis zur Länge dieses Intervalls kleinen positiven Konstanten ε faßt er in einer Ebene die Gesamtheit aller Punkte ins Auge, deren Koordinaten x, y in einem rechtwinkligen System die Ungleichungen:

$$a < x < b, \qquad f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$$

erfüllen, und versteht nun unter einem *Funktionsstreifen* einen zweifach ausgedehnten ebenen Bereich, der sich näherungsweise mit einer Gesamtheit der eben beschriebenen Art deckt, jedoch mit dem Unterschiede, daß man sich die Ränder des Streifens nicht als scharf bestimmt, sondern gewissermaßen als verwaschen vorzustellen hat.

Mit diesem Begriff des Funktionsstreifens deckt sich vielfach der Sinn, in welchem das Wort Linie im praktischen Leben und in denjenigen Teilen der Mathematik gebraucht wird, die *F. Klein* [54]) als „Approximationsmathematik" der „Präzisionsmathematik" gegenüberstellt, und die Frage, wann eine Linie als *anschaulich* zu bezeichnen

53) *F. Klein,* Erlanger Ber. 1873 = Math. Ann. 22 (1883), p. 249.

53a) Vgl. z. B. *K. Nitz*, Zeitschr. Math. Phys. 53 (1906), p. 1.

54) *F. Klein,* Anw. d. Diff.- u. Integralr. auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 12.

sei, ist nach *F. Klein*[55]) im Gegensatz zu anderen namentlich von *A. Köpcke*[56]) hierüber entwickelten Ansichten dahin zu beantworten, daß einen Gegenstand der Anschauung und Beobachtung überhaupt nur die Funktionsstreifen bilden können, während die mathematischen Linien der Präzisionsmathematik, und zwar die analytischen ebensowohl wie die nicht analytischen, niemals anschaulich, ja nicht einmal vorstellbar sind.

Hiernach können Anschauung und Erfahrung uns immer nur über Eigenschaften von Funktionsstreifen belehren, aber nicht über solche von Linien der Präzisionsmathematik. Die Frage, wie weit sich die Ergebnisse der Anschauung auf die genauen mathematischen Linien übertragen lassen, bedarf daher in jedem einzelnen Falle einer besonderen Prüfung. Es kann vorkommen, daß bei dem weitergehenden Abstraktionsprozeß, der zu den letzteren Linien führt, wesentliche Eigenschaften der Funktionsstreifen, wie z. B. das Vorhandensein einer näherungsweise bestimmten Tangente und Bogenlänge, verloren gehen, und dadurch erklären sich die Widersprüche, die zuweilen zwischen den Ergebnissen der Anschauung und denen der Präzisionsmathematik obzuwalten scheinen.

11. Bevorzugung der analytischen Linien. Wenn für ein endliches Intervall ein beliebig schmaler Funktionsstreifen gegeben ist, so ist es nach *K. Weierstraß*[57]) immer möglich, eine reellwertige analytische, ja sogar eine ganze rationale Funktion $g(x)$ von solcher Beschaffenheit zu finden, dass die Linie $y = g(x)$ in dem betrachteten Intervall ganz im Innern des gegebenen Streifens verläuft. Auch die weitere Forderung, daß die Steigung und Krümmung der Linie $y = g(x)$ und die Steigung und Krümmung des gegebenen Streifens innerhalb der Grenzen, zwischen denen die letzteren überhaupt bestimmt sind, in dem gegebenen Intervall überall mit einander übereinstimmen sollen, würde sich erfüllen lassen[58]). Aus diesen Gründen und in dem Bestreben, möglichst *einfache* Bilder der durch die Natur gegebenen Abhängigkeiten zu gewinnen, also mit Rücksicht auf die

55) a. a. O. p. 19, 39—41, 228. Ebenda, p. 4, 34, 41 weitere Litteraturangaben.

56) *A. Köpcke,* Math. Ann. 29 (1887), p. 136—140. Weitere Begründung und Nachträge Math. Ann. 34 (1889), p. 161; 35 (1890), p. 104, und Hamburg math. Ges. Mitteilungen 3 (1891—1900), p. 376.

57) *K. Weierstraß,* Berl. Sitzungsber. 1885, p. 633 u. 789 = Math. Werke 3, Berlin 1903, p. 1.

58) Angaben über ein hierzu anwendbares Verfahren macht *F. Klein,* Anw. d. Diff.- u. Integralr. auf Geom., autogr. Vorl. Sommer 1901, Leipzig 1902, p. 103—107.

„Ökonomie des Denkens“, hat man sich bisher bei den Anwendungen der Mathematik auf die alleinige Benutzung analytischer Linien beschränkt. Jedoch erscheint die Frage, ob eine Heranziehung nichtanalytischer Linien in den Anwendungsgebieten der Mathematik irgend welchen Vorteil zu bringen vermag, noch nicht völlig geklärt[59]).

12. Der Begriff Fläche. Mit ähnlichen Unbestimmtheiten wie der Begriff Linie ist der Begriff *Fläche* behaftet. Im engsten Sinne bezeichnet er eine analytische Fläche, während er bei weiterer Umgrenzung noch andere Gebilde umfaßt, deren Erklärungen sich aus den verschiedenen Erklärungen des Begriffs Linie durch geeignete Ausdehnung ergeben. Jedoch haben nichtanalytische Flächen bisher in der Mathematik kaum eine Rolle gespielt.

Unter einer *analytischen Fläche* versteht man, solange man das Imaginäre als durchaus gleichberechtigt mit dem Reellen ansieht, ein monogenes analytisches Gebilde zweiter Stufe im Gebiet von drei Veränderlichen (II B 1, Nr. 47). Bevorzugt man dagegen das Reelle, so zieht man überhaupt nur solche monogene Gebilde zweiter Stufe in Betracht, welche Stellen mit reellen Koordinaten von solcher Beweglichkeit enthalten, daß zwei ihrer Koordinaten unabhängig voneinander alle Werte innerhalb zweier geeignet gewählten Intervalle annehmen können, und versteht dann unter einer *reellen analytischen Fläche* die Gesamtheit aller Stellen eines solchen Gebildes, deren Koordinaten sämtlich reell sind.

Ein einzelnes Element einer analytischen Fläche kann gegeben werden[60])

---

59) Vgl. Gutachten d. philos. Fakultät der Georg-Augusts Univers. zu Göttingen, betr. die *Beneke*-Preisaufgabe für 1901, Gött. Nachr. 1901, Geschäftl. Mitteil. p. 40 = Math. Ann. 55 (1902), p. 143. Vgl. ferner die Ausführungen von *W. F. Osgood,* Lehrbuch der Funktionentheorie 1, Leipzig 1906, p. 89—95, und von *E. Borel,* Ann. éc. norm. sup. (3) 12 (1895), p. 47—50, und das von demselben Paris C. R. 121 (1895), p. 933 gegebene und auch von *J. Hadamard,* La série de Taylor et son prolongement analytique, Paris 1901, p. 95, besprochene Beispiel einer linearen partiellen Differentialgleichung mit reellwertigen analytischen Koeffizienten, welche eine zwar beliebig oft differenzierbare aber nirgends analytische Lösung hat. Einige der Schwierigkeiten, welche in der Mechanik eintreten würden, wenn man annehmen wollte, daß die Koordinaten eines bewegten Punktes auch nichtanalytische Funktionen der Zeit sein können, sind von *P. Appell* u. *Janaud,* Paris C. R. 93 (1881), p. 1005, und etwas ausführlicher von *Janaud,* Archiv Math. Phys. 67 (1882), p. 160, besprochen worden.

60) Vgl. II B 1, Nr. 47. — Durch Anwendung des in Fußn. 19) erwähnten Kunstgriffes würden sich die im Text nächstfolgenden Sätze und Erklärungen, die unmittelbar nur für im Endlichen liegende Flächenelemente gelten, auf unendlich ferne Elemente ausdehnen lassen.

a) durch eine Gleichung, welche eine Koordinate, etwa z, in einer gewissen Umgebung einer festen Stelle (x_0, y_0) als eine dort analytische Funktion der beiden anderen Koordinaten x, y darstellt;

b) als die Gesamtheit aller Stellen, deren Koordinaten x, y, z in einer gewissen Umgebung einer festen Stelle (x_0, y_0, z_0) liegen und eine Gleichung von der Form $F(x, y, z) = 0$ erfüllen, wo $F(x, y, z)$ eine an der Stelle (x_0, y_0, z_0) analytische und dort verschwindende Funktion bedeutet, die in dem II B 1, Nr. 45 erklärten Sinne irreduzibel ist. Sind bei dieser Art der Darstellung eines Flächenelementes die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion $F(x_0, y_0, z_0)$ an der Stelle (x_0, y_0, z_0) nicht sämtlich gleich Null, so heißt das Flächenelement *gewöhnlich* oder *regulär*, sonst *singulär* (vgl. III D 1, 2, Nr. 3).

Ferner ist es in mannigfaltig verschiedener Weise möglich, ein gewöhnliches Element einer analytischen Fläche durch drei Gleichungen von der Form

$$\text{(A)} \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

darzustellen, wo u, v in der Nähe der Stelle (0, 0) unbeschränkt veränderliche Hilfsveränderliche (Parameter) und φ, χ, ψ Funktionen bedeuten, die an der Stelle (0, 0) analytisch sind und die Eigenschaft haben, daß die Determinanten der Matrix

$$\text{(B)} \qquad \begin{Vmatrix} \varphi_u & \chi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \chi_v & \psi_v \end{Vmatrix}$$

an der Stelle (0, 0) nicht alle gleich Null sind. Hierbei ist bei Ein schränkung der Veränderlichen u, v auf eine hinreichend enge Um gebung der Stelle (0, 0) die Beziehung zwischen den Punkten dieser Umgebung und den entsprechenden Punkten der Fläche gegenseitig eindeutig (*eigentliche Parameterdarstellung eines Flächenelementes*[61])).

---

61) Für die Oberfläche einer um einen beliebigen Mittelpunkt (a, b, c) mit einem beliebigen Radius r beschriebenen Kugel ergibt sich eine derartige Darstellung, nämlich die Darstellung durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a + r \sin u \cos v, \\ y &= b + r \sin u \sin v, \\ z &= c + r \cos u, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} u = 0 \cdots \pi \\ v = 0 \cdots 2\pi \end{pmatrix}$$

ganz von selbst durch die Einführung räumlicher Polarkoordinaten, die schon von *J. L. Lagrange*, Berlin Nouv. Mém. 1773, p. 127 = Oeuvres 3, Paris 1869, p. 626, als „une des transformations les plus utiles et les plus ordinaires“ bezeichnet wird. Die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen a, b, c haben *J. Ivory*, Lond. Trans. 1809, p. 350, und *C. F. Gauß*, Comm. Gott. 2 (1813), p. 17 = Werke 5, Göttingen 1877, p. 16, durch die Gleichungen

In ähnlicher Weise läßt sich, wie *C. W. M. Black*[62]) gezeigt hat, ein singuläres Element einer analytischen Fläche stets durch eine *endliche* Anzahl von Gleichungssystemen der Form (A) darstellen, von denen jedoch ein jedes so beschaffen ist, daß die Determinanten der Matrix (B) zwar nicht alle identisch gleich Null sind, wohl aber an der Stelle (0, 0) sämtlich verschwinden.

Setzt man umgekehrt drei Gleichungen von der Form (A) willkürlich an, und ist an der Stelle (0, 0) wenigstens eine der Determinanten der Matrix (B) von Null verschieden, so stellen diese Gleichungen ein gewöhnliches Element einer analytischen Fläche vollständig dar. Sind dagegen die erwähnten Determinanten an der Stelle (0, 0) sämtlich gleich Null, ohne jedoch identisch zu verschwinden, so sind verschiedene Fälle möglich, und zwar jedenfalls die folgenden:

1) Die Gleichungen stellen ein Element einer Fläche vollständig dar, jedoch so, daß im allgemeinen ein und demselben Punkt des Flächenelementes mehrere Wertepaare u, v entsprechen (*uneigentliche Parameterdarstellung*). Vgl. Nr. 6.

2) Die Gleichungen stellen nur einen Teil eines (singulären) Flächenelementes dar.

In vielen Fällen läßt sich eine analytische Fläche als die Gesamtheit aller Stellen auffassen, an denen eine *eindeutige* analytische Funktion $F(x, y, z)$ gleich Null wird, und dann *im ganzen* durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ darstellen. Aber eine Umkehrung dieses Satzes ist ebenso wie die des entsprechenden Satzes für Linien (Nr. 6) und aus ähnlichen Gründen nicht ohne weiteres zulässig.

Zur besseren Übersicht über die gestaltlichen Verhältnisse denkt man sich eine analytische Fläche häufig in mehrere *Blätter*, *Schalen* oder *Mäntel* zerlegt, d. h. zusammenhängende Teile, für deren gegenseitige Abgrenzung folgendes als Regel gilt: Falls ein und derselbe Punkt P_0 gleichzeitig Mittelpunkt mehrerer Elemente einer Fläche ist, so sind von den in der Nähe von P_0 liegenden Punkten der Fläche diejenigen, welche ein und demselben jener Elemente an-

---

$$x = a \cos u,$$
$$y = b \sin u \cos v,$$
$$z = c \sin u \sin v$$

dargestellt. Allgemeiner ist die Parameterdarstellung eines Flächenelementes indessen erst durch *Gauß* in Gebrauch gekommen. Vgl. III D 1, 2, Nr. 34.

62) *C. W M. Black*, Harvard Thesis 1901 = Amer. Ac. Arts Sci. Proc. 37 (1902), p. 281. Vgl. auch II B 1, Nr. 46, sowie *E. Geck*, Über die singulären Punkte algebraischer Flächen, Diss. Tübingen 1900, und Math.-naturw. Mitteilungen des math.-naturw. Vereins in Württemberg (2) 6 (1904), p. 65.

gehören, stets dem gleichen Blatt, dagegen solche Punkte, die in verschiedenen Elementen liegen, verschiedenen Blättern zuzurechnen. Im übrigen werden die Grenzen der einzelnen Blätter meistens unbestimmt gelassen. Vgl. Nr. 4, Ende.

Bei der Betrachtung reeller Flächen, die in mehrere getrennte oder doch nur in einzelnen Punkten oder Linien miteinander zusammenhängende Teile zerfallen, wird indessen das Wort Blatt, Schale oder Mantel auch häufig zur Bezeichnung eines einzelnen dieser Teile gebraucht, so daß hier ein und dasselbe Blatt sich selbst schneiden kann.

In naher Verwandtschaft mit dem Begriff Fläche steht der Begriff einer unendlich dünnen „Haut", welche gewisse Arten von Gestaltsveränderungen zuläßt, ohne indessen die Überführung in jede beliebige Form zu gestatten. Hinsichtlich der Beweglichkeit einer solchen Haut lassen sich mannigfach verschiedene Annahmen machen: Man kann z. B. mit *C. F. Gauß*[63]) voraussetzen, daß die Haut zwar biegsam, aber weder dehnbar noch faltbar sei, und das Augenmerk auf die dann möglichen Formänderungen und die bei diesen erhalten bleibenden Eigenschaften der Haut richten (III D 6 a, C, *Voß*), oder aber annehmen, daß die Haut außer Biegungen auch noch gewisse Arten von Dehnungen zulasse, z. B. alle diejenigen, aber auch nur diejenigen, welche winkeltreue Abbilder der ursprünglichen Gestalt liefern, oder solche Dehnungen, bei denen gegebene Scharen von geodätischen Linien der ursprünglichen Gestalt dauernd geodätische Linien bleiben. Man kann endlich auch Faltungen zulassen. Die Herstellung von „Geflechten" und „Netzen", welche Häute der erwähnten und anderer Arten näherungsweise darstellen, hat *S. Finsterwalder*[64]) behandelt. Vgl. III D 6a, Nr. 35.

---

63) *C. F. Gauß*, Disquisitiones gen. circa superf. curvas, Comm. Gott. 6 (1828), Art. 13 = Werke 4, Göttingen 1880, p. 237.

64) *S. Finsterwalder,* Deutsche Math.-Vereinig. Jahresber. 6^2 (1899), p. 45.

(Abgeschlossen im September 1906.)

III AB 3. ANALYSIS SITUS.

Von

M. DEHN und **P. HEEGAARD*)**

in Münster i/W. in Vedbaek b/Kopenhagen.

Inhaltsübersicht.

---

*) Von den beiden Verfassern hat *Heegaard* die literarischen Vorarbeiten zum Artikel geliefert und übrigens an der Ausarbeitung wesentlichen Anteil genommen; verantwortlich für die endgültige Fassung des Artikels ist *Dehn*.

Einleitung. In zusammenhängender Form hat sich wohl zuerst *Listing*[1]) mit der heutzutage mit dem Namen *Analysis situs* bezeichneten Disziplin beschäftigt. Er schlägt für sie den Namen *Topologie* vor und versteht darunter[2]) eine „kalkulatorische Bearbeitung der modalen Seite der Geometrie“, die Lehre von den Gesetzen des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihren Teilen oder ihren Aggregaten im Raume, abgesehen von den Maß- und Größenverhältnissen.

---

1) *J. B. Listing,* Vorstudien zur Topologie (Göttinger Studien 1847); als Buch Göttingen 1848.

2) l. c. p. 2—6. *Listing* zieht die Bezeichnung *Topologie* (l. c. p. 6) dem von *Leibniz,* De Analysi situs, L. math. Schriften, her. v. Gerhardt 2. Abt., 1 (1858), p. 178, vorgeschlagenen Namen *Analysis situs* oder *Geometria situs* vor. Vielfach ist eine Äußerung von *Leibniz* in einem Briefe an *Huygens,* Chr. Huygens, Oeuvres compl. 8 (Correspond. 1676—1684), Nr. 2192 ff., so gedeutet worden, als ob sie die erste Idee der Analysis situs enthielte. Die Äußerung lautet: „. . . je, croy qu'il nous faut encore une autre Analyse proprement géometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem.“ Jedoch denkt *Leibniz* hier vielmehr an einen geometrischen Algorithmus, der für einzelne geometrische Probleme eher eine genuine Lösungsmethode liefert, als die Methode der gewöhnlichen analytischen Geometrie.

Wesentlich in derselben Weise wird die Analysis situs definiert von *Riemann*[3]). Indem *Klein*[4]) die Idee der Gruppe und die Auffassung des Raumes als Zahlenmannigfaltigkeit zu Grunde legt, gelangt er zu einer prägnanten Zusammenfassung der *Listing*schen Definitionen, die man etwa so formulieren kann: die Aufgabe der Analysis situs besteht in der Aufstellung aller derjenigen Eigenschaften räumlicher Gebilde, die sich invariant verhalten gegenüber der Gruppe aller stetigen Transformationen des Raumes.

Als die erste Untersuchung auf diesem so definierten Gebiet der Analysis situs oder Topologie kann man wohl die von *L. Euler*[5]) 1736 angestellte bezeichnen, die sich mit dem Königsberger Brückenproblem beschäftigt. Es handelt sich dabei um die Frage, ob es möglich sei, die 7 Brücken bei Königsberg über den Pregel hinter einander, jede immer nur einmal zu passieren. Schon viel früher war von *Descartes*[6]) ohne Beweis ein Satz über die Winkelsummen der Seitenflächen eines Polyeders aufgestellt worden, der äquivalent ist mit der von *Euler*[7]) 1752 aufgestellten Beziehung zwischen den Anzahlen der Begrenzungsgebilde eines Polyeders (*„Eulersche Polyederformel“*), *welche ein für die Analysis situs fundamentales Resultat enthält.* Von späteren Untersuchungen sind vielleicht die Abhandlungen von *Euler* und weitere daran sich anschließende über den Rösselsprung zu nennen (I G 1, *Ahrens,* Nr. 3).

Ein neues Element kam in die Analysis situs durch die *Gauß*sche[8]) Entdeckung von dem Zusammenhang zwischen einem gewissen Doppelintegral und den Umschlingungen zweier geschlossener Linien. Es war damit der erste Anfang gemacht zu der später vor allem durch die von *W. Dyck*[9]) benutzte *Kronecker*sche Charakteristikentheorie erfolgreichen Anwendung der höheren Analysis in unserem Gebiet.

Das Erscheinen von *Listings* „Vorstudien zur Topologie“ (1847) bezeichnet den Zeitpunkt, nach welchem die Analysis situs als eine selbständige mathematische Disziplin hervortritt. Doch erst die *Riemann*schen Untersuchungen und seine Verwertung derselben für die Funktionentheorie lenkten die allgemeine Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Analysis situs.

---

3) J. f. Math. 54 (1857), p. 105 = Werke p. 84.

4) Erlanger Programm 1872.

5) Petrop. Comment. 8 (1741), p. 128. Vgl. I G 1, *Ahrens,* Nr. 7.

6) Oeuvres inédites de *Descartes* par *Foucher de Careil* Paris (1860), 2 p. 214, vgl. Paris C. R. 50 (1860), p. 774 u. Berlin Monatsb. (1861), p. 1043.

7) Petrop. Novi Comm. 4 (1752—53), p. 109.

8) *Gauß,* Werke 5, p. 605.

9) Math. Ann. 32 (1888), p. 457 ff., 37 (1890), p. 273 ff., München Ber. 25 (1895), p. 261, 447. Vgl. I B 3a, *Runge,* Nr. 7.

Weitere Arbeitsgebiete sind den Forschungen in unserer Disziplin gewonnen 1) durch die Arbeiten von *Betti* und die in neuere Zeit fallenden Arbeiten von *Poincaré* (vor allem Ausdehnung auf vieldimensionale Räume), 2) durch die Arbeiten insbesondere der englischen Schule, z. B. repräsentiert durch *Tait*, die die Verknotung der Raumkurven und die Komplexe verschiedener Grundgebilde („Bäume", „Graphen") behandeln.

Grundlagen.*)

1. Definition von Punkt-, Linien- und Flächenkomplexen. Seien P_0', P_0'', ..., $P_0^{\alpha_0}$ eine erste endliche Reihe von Elementen, die wir *Punkte* nennen und deren Gesamtheit $\{P_0', P_0'', \ldots, P_0^{\alpha_0}\}$ wir als *Punktkomplex* C_0 bezeichnen. Wir bestimmen nun, daß je zwei dieser Punkte, etwa P_0^i und P_0^k, eine beliebige Anzahl von neuen Dingen $(P_0^i, P_0^k)^1$, $(P_0^i, P_0^k)^2$, ... erzeugen können, die wir als *Strecken* oder *Linienstücke* und mit dem Buchstaben S_1 bezeichnen. Wir nennen ferner P_0^i und P_0^k *Eckpunkte* der von ihnen erzeugten Strecken. Es sei nun S_1', S_1'', ..., $S_1^{\alpha_1}$ ein solches von den Punkten P_0', P_0'', ..., $P_0^{\alpha_0}$ erzeugtes System von Strecken, daß zu ihrer Erzeugung alle Punkte nötig sind (anders ausgedrückt, daß jeder Punkt in diesen Strecken mindestens einmal vorkommt), dann nennen wir die Gesamtheit

$$\{P_0', P_0'', \ldots, P_0^{\alpha_0};\quad S_1', S_1'', \ldots, S_1^{\alpha_1}\}$$

einen *Streckenkomplex*, ein *Liniensystem* oder einen *eindimensionalen Komplex* C_1.[10]) Wir wollen folgende charakteristische, unterscheidende Merkmale für Streckenkomplexe aufstellen: Ein C_1 heißt *zusammenhängend*, wenn für je zwei Punkte P_0^i, P_0^k eine Gruppe von Strecken von der Art:

$$(P_0^i, P_0^{i_1})^1,\ (P_0^{i_1}, P_0^{i_2})^2,\ \ldots,\ (P_0^{i_l}, P_0^k)^l$$

im C_1 enthalten ist. Man sagt: diese Gruppe von Strecken oder dieser *Streckenzug verbindet* P_0^i mit P_0^k. Jeder C_1 besteht aus einer Anzahl

---

*) Für die anschaulichen Grundlagen der abstrakten Entwicklungen der ersten 7 Paragraphen vgl. § 8.

10) Der Name Komplex ist von *Listing* eingeführt, Census räuml. Kompl., Gött. 1862, p. 3 ff. *Listing* braucht für diesen Komplex den Ausdruck Linearkomplexion (Vorstudien, p. 59), von *F. Lippich* ist der Name Liniensystem eingeführt (Wien Ber. 69² (1874), p. 92). *C. Jordan* sagt assemblage (J. f. Math. 70 (1869), p. 185), *W. Ahrens* schlägt Linearcontinuum vor (Math. Spiele, Leipzig 1901, p. 103); *W. K. Clifford* und *J. J. Sylvester,* die die Liniensysteme in der Invariantentheorie verwerten (s. I B 2, Nr. 12, 239—242), (und nach ihnen *Bentheimer, A. B. Kempe, J. Petersen* (gebrauchen den Namen *Graph.*

von zusammenhängenden C_1. Im Folgenden wollen wir, wenn nichts anderes bestimmt wird, einen Linienkomplex stets als zusammenhängend voraussetzen. — Als *Kreis* Π_1 wird ein Komplex bezeichnet von der Art:

$$\{P_0^1, P_0^2, \ldots P_0^i \ldots P_0^k \ldots, P_0^l; \ (P_0^1, P_0^2), (P_0^2, P_0^3), \ldots, (P_0^l, P_0^1)\},$$
$$(P_0^i \not\equiv P_0^k).$$

Einen C_1, der keine solchen Komplexe enthält, bezeichnet man als *Baum* [11]). Ist ein C_1 entweder ein Π_1 oder entsteht aus einem solchen durch Weglassung einer Strecke, so wollen wir ihn als *eindimensionale Mannigfaltigkeit* und mit dem Zeichen M_1 bezeichnen.

Wir bestimmen ferner, daß jeder Kreis Π_1 eine beliebige Anzahl von neuen Dingen $(\Pi_1)^1$, $(\Pi_1)^2$, ... erzeugen kann, die wir als *Flächenstücke* und mit dem Buchstaben S_2 bezeichnen. Es sei nun $\{S_2', S_2'', \ldots, S_2^{\alpha_2}\}$ ein solches von den Punkten und Strecken des Komplexes C_1 erzeugtes System von Flächenstücken, daß zu ihrer Erzeugung alle Strecken nötig sind (das ist nur möglich, wenn der C_1 keine *Brücken* oder Eckpunkte enthält), dann nennen wir die Gesamtheit

$$\{P_0', P_0^2, \ldots, P_0^{\alpha_0}; \ S_1', S_1^2, \ldots, S_1^{\alpha_1}; \ S_2^1, S_2^2, \ldots, S_2^{\alpha_2}\}$$

einen Flächenkomplex oder einen zweidimensionalen Komplex C_2. In einem C_2, bei dem jede Strecke gerade zu zwei Flächenstücken gehört, zerfallen alle Flächen, die durch einen Punkt P_0 des Komplexes gehen, in zyklisch geordnete Gruppen. In jeder derselben hat jede Fläche mit der in der Gruppe vorangehenden und mit der nachfolgenden Fläche je eine an P_0 „angeheftete" Strecke gemeinsam. Bilden die Flächen für jeden Punkt des Komplexes nur *eine* Gruppe, so wollen wir den Komplex als *geschlossene Fläche* bezeichnen. Entfernt man aus einem solchen Komplexe einige Flächen, etwa $S_2', \ldots, S_2^r$, die keine Punkte mit einander gemeinsam haben, so bezeichnen wir den übrig bleibenden C_2 als *berandete Fläche* mit den *Randkurven* Π_1', $\ldots, \Pi_1^r$, wo $S_2^i = (\Pi_1^i)$ ist. Eine geschlossene oder berandete Fläche bezeichnen wir als *zweidimensionale Mannigfaltigkeit* und mit dem Zeichen M_2. Einen Kreis Π_1 eines Komplexes M_2, der die einzige Randkurve einer Mannigfaltigkeit ist, deren Teilflächen sämtlich Teilflächen von M_2 sind, nennen wir *homolog null*, in Zeichen $P_1 \backsim 0$.[12])

---

11) S. Näheres Complexus, p. 174 ff.

12) Begriff und Bezeichnung ist von *H. Poincaré* eingeführt (J. éc. polyt. (2) 1 (1895), p. 18). Für die weitere Ausführung und Erweiterung des Begriffs siehe Complexus, p. 179 ff.

2. Indikatrix [13]). Bezeichnen wir den einen Eckpunkt einer Strecke als *Anfangs-*, den anderen als *Endpunkt*, so geben wir der Strecke einen bestimmten *(Durchlaufungs-)Sinn*, eine *Indikatrix*, was wir in der Schreibweise (P_0', P_0'') durch das Voranstellen des Anfangspunktes ausdrücken können. Wir können jeder Strecke einer M_1 eine solche Indikatrix geben, daß jeder Punkt derselben, an den zwei Strecken stoßen, Anfangspunkt für die eine und Endpunkt für die andere ist. Dies kann auf zwei Weisen geschehen. Die eine erhalten wir aus der anderen, indem wir für alle Strecken die *entgegengesetzte* Indikatrix wählen, d. i. Anfangs- und Endpunkt mit einander vertauschen. Ein Flächenstück, bei dem alle Strecken des erzeugenden Kreises in der obigen Weise mit einer Indikatrix versehen sind, wollen wir selbst als mit einer Indikatrix begabt bezeichnen. Wir nennen die beiden so möglichen Bezeichnungsweisen die beiden verschiedenen, einander entgegengesetzten Indikatricen des Flächenstückes. Können wir bei einer M_2 allen Teilflächenstücken solche Indikatricen geben, daß jede Strecke, die nicht auf einer Randkurve liegt, also an zwei Teilflächen stößt, von der einen derselben infolge der Indikatrixbestimmung eine Indikatrix erhält, die der von der anderen erhaltenen entgegengesetzt ist, so soll die Fläche *zweiseitig* heißen, andernfalls *einseitig* [13]), [14]). Die betreffende Indikatrixbestimmung für eine zweiseitige M_2 kann wieder auf zwei verschiedene Weisen geschehen. Wir haben den Satz: Ist ein Teil einer M_2 einseitig, so ist sie selbst einseitig. Die einfachste von einer Kurve berandete einseitige Fläche hat das Komplexschema:

$$\{P_0^1, P_0^2, P_0^3, P_0^4;\ S_1^{1,2}, S_1^{2,3}, S_1^{3,4}, S_1^{4,1}, S_1^{1,3}, S_1^{4,1};$$
$$S_2^{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)}, S_2^{(1,2),(2,4),(4,3),(3,1)}\}$$

13 u. 14) Gewöhnlich wird Ein- und Zweiseitigkeit definiert mit Hilfe der Auffassung der M_2 als einer im dreidim. Raume ausgebreiteten Mannigfaltigkeit: Nimmt man ein „Lot" auf die Fläche mit bestimmter Richtung und läßt es sich auf einer zweiseitigen Fläche beliebig bewegen, so wird es bei Rückkehr zum Anfangspunkt auch immer wieder die Anfangsrichtung besitzen, was bei einseitigen Flächen nicht der Fall ist. Über die daran sich anschließende analytische Unterscheidung von Ein- und Zweiseitigkeit vgl. z. B. *Poincaré* (J. éc. polyt. (2) 1 (1895), p. 25). *Klein* (Math. Ann. 7 (1871) p. 478) hat darauf hingewiesen, daß die Ein- resp. Zweiseitigkeit nicht vom umgebenden Raume abhängt, vielmehr eine innere Eigenschaft der Fläche ist. *Klein* führt zur Untersuchung dieser Eigenschaft statt des sich bewegenden Lotes eine sich bewegende unendlich kleine Kurve mit Umlaufssinn (Indicatrix) ein. Die obige Definition stellt eine Übertragung der *Klein*schen Definition ins Diskontinuierliche dar und ist im Anschluß an *A. F. Möbius* gegeben, der zuerst (1858) Werke 2, p. 519, vgl. p. 484 die Existenz einseitiger Flächen erkannt hat. Vgl. ferner *Listing,* Census (1862), p. 13; *L. Schläfli,* J. f. Math. 76 (1873), p. 152 und *G. Weichhold,* Diss. Leipzig 1883 = Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 321.

wo

$$S_1^{i,k} \text{ für } (P_0^i, P_0^k) \quad \text{und} \quad S_2^{(k_1),(k_2)\cdots} \text{ für } (S_1^{k_1}, S_1^{k_2}\ldots)$$

steht. Diese Fläche heißt *Möbiussches Blatt.*

3. Interne Transformation und Homöomorphismus (Elementarverwandtschaft)[15]. Zwei *Streckenkomplexe* C_1' und C_1'' heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph,* 1) wenn sie nach einer eventuellen Abänderung der Bezeichnungsweise der erzeugenden Punkte sich als identisch herausstellen, 2) wenn dasselbe der Fall ist nach vorhergehender, beliebig oft wiederholter *(interner) Transformation* einzelner Strecken nach dem Schema: α) Einführung eines neuen Punktes Q_0, β) Ersatz der Strecke $(P_0^i, P_0^k)_l$ durch zwei Strecken (P_0^i, Q_0) und (Q_0, P_0^k).

Zwei *Flächenkomplexe* C_2' und C_2'' heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph,* 1) wenn sie sich nach einer eventuellen Abänderung der Bezeichnungsweise der Elemente als identisch herausstellen, 2) wenn dasselbe der Fall ist a) nach vorhergehender interner Transformation der C_2' und C_2'' erzeugenden Streckenkomplexe, b) nach vorhergehender, beliebig oft wiederholter *(interner) Transformation* einzelner Teilflächenstücke nach folgendem Schema: α) Einführung einer *neuen* Strecke $(P_0^i, P_0^k) = T_1$, wo P_0^i und P_0^k erzeugende Punkte eines ein Flächenstück S_2 erzeugenden Kreises Π_1 sind; β) Ersatz von S_2 durch zwei Flächenstücke (T_1, M_1') und (T_1, M_1''), wo M_1' und M_1'' die beiden von P_0^i und P_0^k begrenzten Mannigfaltigkeiten sind, die zusammen Π_1 bilden.

Es gelten die grundlegenden Sätze: Sind zwei Komplexe mit einem dritten homöomorph, dann sind sie auch mit einander homöomorph. — Ist von zwei homöomorphen Komplexen der eine eine Mannigfaltigkeit, dann ist es auch der andere. — Zwei homöomorphe M_2 sind entweder beide einseitig oder beide zweiseitig. — Zwei homöomorphe M_2 haben die gleiche Anzahl Randkurven. — Jede geschlossene M_2 (resp. jeder Kreis) kann mit sich in der Weise als homöomorph nachgewiesen werden, daß bei der betreffenden Beziehung der M_2 (des Kreises) auf sich selbst sich zwei ganz beliebige Punkte derselben entsprechen;

---

15) Der Begriffsbildung im Text kommt am nächsten die *Möbius*sche Definition der „Elementarverwandtschaft" [Werke, 2, p. 433 (1863)]. Indem er die Zerlegung in unendlich kleine Teile benutzt, vermeidet er die apodiktische Einführung der „Flächenstücke". Es ist jedoch zu beachten, daß zwei unendlich wenig ausgedehnte, gleichdimensionale Gebilde von mehr als 2 Dimensionen im Sinne der Anal. situs nicht äquivalent zu sein brauchen (vgl. Grundlagen Nr. 5). Auch ist natürlich die Definition modernen Ansprüchen an Strenge nicht ganz gewachsen (vgl. hierzu die Artikel III A B 1 und 2 von *Enriques* und *v. Mangoldt*).

und umgekehrt: hat ein C_2 (ein C_1) diese Eigenschaft und verliert sie auch nicht durch irgend eine interne Transformation, so ist er eine geschlossene M_2 (ein Kreis), d. i. *die geschlossene* M_2 *resp. die Kreise sind die homogenen* C_2 *resp.* C_1.

Aus dem Begriff der homöomorphen Beziehung einer Mannigfaltigkeit auf sich selbst entspringt auch der Begriff der *Äquivalenz.* Zwei Komplexe auf einer Mannigfaltigkeit heißen äquivalent, wenn sie eventuell nach interner Transformation durch eine homöomorphe Beziehung der Mannigfaltigkeit auf sich selbst in einander übergehen. Wir haben die Sätze: Irgend zwei ungeschlossene M_1 auf einer Mannigfaltigkeit, die keinen Punkt mit der eventuellen Berandung der Mannigfaltigkeit gemeinsam haben, sind äquivalent. Irgend zwei Randkurven auf einer M_2 sind äquivalent (s. *Nexus* Nr. 7). Der Begriff der Äquivalenz ist von besonderer Bedeutung bei der Konstruktion von mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten (s. *Grundlagen* Nr. 5).

Gelegentlich wollen wir dem Namen „Mannigfaltigkeit“, die wir, im bisherigen Sinne verstanden *„Mannigfaltigkeit im engeren Sinne“* nennen wollen, eine erweiterte Bedeutung geben: Mit *Mannigfaltigkeit im weiteren Sinne* bezeichnen wir: die gegebene Mannigfaltigkeit oder irgend eine aus ihr durch interne Transformationen entstehende Mannigfaltigkeit. Also z. B.: Ein Kreis auf einer Mannigfaltigkeit M_2 im weiteren Sinn bedeutet einen geschlossenen Streckenzug auf dieser selbst resp. auf einer aus ihr durch interne Transformation entstehenden M_2 usw. In dem Abschnitte: *Complexus* hat mit Ausnahme des letzten Paragraphen das Wort Mannigfaltigkeit stets die ursprüngliche Bedeutung, in dem Abschnitte *Connexus* und *„Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten“* die zweite Bedeutung. Im übrigen ist allemal, wo es nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, die Bedeutung, die man an der betreffenden Stelle dem Worte beilegen muß, unmittelbar einleuchtend.

4. Elementarmannigfaltigkeiten, Kreis und Kugel. Die Mannigfaltigkeit $\{P_0^1, P_0^2; (P_0^1, P_0^2)\}$ und jede mit ihr homöomorphe M_1 bezeichnen wir als *eindimensionale Elementarmannigfaltigkeit, Streckenzug* oder kurz als Strecke mit dem Zeichen E_1. Die Mannigfaltigkeit

$$\{P_0^1, P_0^2;\ (P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^1, P_0^2)^2;\ ((P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^2, P_0^1))^2\}$$

und jede mit ihr homöomorphe M_2 bezeichnen wir als *zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeit, Elementarflächenstück,* oder kurz als Flächenstück und mit dem Zeichen E_2. Die (geschlossene) M_2:

$$\{P_0^1, P_0^2;\ S_1^1, S_1^2;\ (S_1^1, S_1^2)^1, (S_1^1, S_1^2)^2\}$$

(wo $S_1^i = (P_0^1, P_0^2)^i$ gesetzt ist) und jede mit ihr homöomorphe M_2

bezeichnen wir als *Kugelfläche* oder *zweidimensionale Sphäre* und mit dem Zeichen Π_2.

Wir haben dann die Sätze: Jede M_1 ist entweder ein Kreis oder eine E_1. — Jeder Kreis einer E_2 ist die Randkurve eines Elementarflächenstückes, das ein Teil der E_2 ist. Ein Teil dieses Satzes ist äquivalent mit dem Satze: Auf einer E_2 ist jeder Kreis homolog null. — E_2 und Π_2 sind zweiseitige M_2. — Auf einer Π_2 ist jeder Kreis homolog null. — Jede Π_2 wird durch eine Π_1 in zwei E_2 zerlegt.

5. Ausdehnung auf n Dimensionen[16]). Die Erzeugung von höheren Komplexen C_3 und weiter C_n aus den Flächenkomplexen kann auf verschiedene Weise vor sich gehen, je nachdem man zu dem Aufbau der C_3 beliebige geschlossene M_2, oder nur zweiseitige oder endlich nur Kugelflächen benutzen will. Im folgenden soll die dritte Methode benutzt werden, weil sie die einfachste und anschaulichste ist, und weil die anderen doch nur scheinbar allgemeiner sind.

Wir bestimmen, daß jede Kugelfläche Π_2 eine beliebige Anzahl von neuen Dingen $(\Pi_2)_1$, $(\Pi_2)_2, \ldots$ erzeugen kann, die wir als *dreidimensionale Raumstücke* und mit den Buchstaben S_3 bezeichnen. Es sei nun $\{S_3^1, S_3^2, \ldots, S_3^{\alpha_3}\}$ ein solches von den Punkten, Strecken und Flächenstückes des Komplexes C_2 erzeugtes System von S_3, daß zu ihrer Erzeugung alle Flächenstücke nötig sind (das erfordert besondere Eigenschaften für den C_2), dann nennen wir die Gesamtheit:

$$\{P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^{\alpha_1}; S_1^1, S_1^2, \ldots, S_1^{\alpha_1}; S_2^1, S_2^2, \ldots, S_2^{\alpha_2}; S_3^1, S_3^2, \ldots, S_3^{\alpha_3}\}$$

einen *Raumkomplex* oder *dreidimensionalen Komplex* C_3.

Um aus dem C_3 durch Spezialisierung die M_3 zu bekommen, sind wieder verschiedene Wege möglich. Wir wollen die Spezialisierung so vornehmen, daß die entstehenden M_3 homogen sind (s. Nr. 3). Ein C_3 ist eine *geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn drei Bedingungen erfüllt sind: 1) Jede S_2 gehört zu zwei S_3. Dann ordnen sich an jeder S_1 alle S_3 zu „Gruppen" (s. Nr. 1); 2) alle S_3 an einer S_1 bilden nur eine Gruppe. Bezeichnen wir dann die S_1, S_2, S_3, die durch einen bestimmten

16) Über n-dimensionale Gebilde s. vor allem Complexus Nr. 3 u. 4. Diese Theorie ist besonders gefördert von *B. Riemann,* Werke 2. Aufl., p. 474; *E. Betti,* Ann. di mat. (2) 4 (1871), p. 140; *V. Eberhardt,* Math. Ann. 36 (1890), p. 121; *W. Dyck,* Math. Ann. 37 (1890), p. 273; *Poincaré*, s. Fußn. 4. — Die Ausdehnung auf über 2 Dimensionen hat ihre Bedeutung: 1) weil mehrdimensionale Gebilde ganz eigenartige und zum Teil sehr verborgene Eigenchaften aufweisen, 2) weil eine Reihe von topologischen Problemen, die nicht über den dreidimensionalen Raum herauszugehen scheinen, zu ihrer Lösung polydimensionale Betrachtungen erfordern (z. B. Knotenprobleme), 3) weil der Verlauf algebraischer Flächen vollständig nur durch vierdimensionale Mannigfaltigkeiten dargestellt werden kann.

Punkt des Komplexes gehen, als Pseudopunkte, Pseudostrecken und Pseudoflächenstücke, so bilden diese Elemente vermöge der Bedingungen 1) und 2) einen oder mehrere Komplexe, von denen wir jeden entsprechend als eine geschlossene Pseudofläche bezeichnen dürfen. Wir wählen dann als dritte Bedingung: 3) An jedem Punkt soll es nur eine solche Pseudofläche geben, und zwar soll diese eine Kugelfläche sein [17]). Jetzt wird die folgende Fassung dieser drei Bedingungen verständlich sein: An jeder Fläche soll der C_3 sich wie ein Punktepaar, an jeder Strecke wie ein Kreis, an jedem Punkt wie eine Kugelfläche verhalten. Die zweite Bedingung enthält die erste, die dritte die erste und zweite.

Eine *berandete* M_3 kann dann wie folgt erklärt werden: Bei einer berandeten M_3 unterscheiden wir innere Punkte, Linien und Flächenstücke von Randpunkten, -linien resp. -flächenstücken. An den inneren Flächen verhält sich die berandete M_3 wie ein Punktepaar, an den Randflächen wie ein Punkt (d. i. es hängt an den Randflächen je nur ein Raumstück), an den inneren Strecken wie ein Kreis, an den Randstrecken wie ein Streckenzug, an den inneren Punkten wie eine Kugel, an den Randpunkten wie ein Elementarflächenstück. Es gelten dann die Sätze: An jeder Randstrecke hängen zwei Randflächen, von jedem Randpunkte aus gehen Randstrecken, die sich zu einer Gruppe zusammenordnen. Alle Strecken auf einer Randfläche, alle Punkte auf einer Randstrecke sind Randstrecken resp. Randpunkte. Daraus folgt dann: Alle Randelemente sind auf eine Reihe von geschlossenen Flächen verteilt. Ferner: Durch Hinzufügen von Raumstücken kann jede berandete M_3 zu einer geschlossenen M_3 gemacht werden. Die einfachste berandete M_3 liefert das Raumstück zusammen mit seiner Begrenzung.

Da die Kugelfläche (s. Nr. 4) zweiseitig ist, so können wir jetzt auch einem S_3 zwei verschiedene *Indikatricen* geben, indem wir auf zwei Weisen den Flächenstücken der erzeugenden Kugelfläche zusammengehörige Indikatricen verleihen können. Wir nennen dann, weiter verallgemeinernd, eine M_3 *zweiseitig*, wenn wir jeder seiner S_3 eine solche Indikatrix geben können, daß ein S_2, das an zwei S_3 stößt, von dem einen derselben infolge dieser Indikatrixbestimmung die umgekehrte Indikatrix erhält wie von der anderen; ist das nicht möglich, so nennen wir die M_3 einseitig.

Zwei C_3 heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph*, 1) wenn sie

17) Ein Beispiel, bei dem die dritte Bedingung nicht erfüllt ist, s. p. 183, ferner *Heegaard,* Diss. Kopenhagen, 1898, p. 87.

sich nach einer eventuellen Abänderung der Bezeichnungsweise der Elemente als identisch herausstellen; 2) wenn dasselbe der Fall ist a) nach einer internen Transformation des erzeugenden C_2, b) nach beliebig oft wiederholter *interner Transformation* einzelner S_3 nach folgendem Schema: α) Einführung eines *neuen* Flächenstücks $T_2 = (\Pi_1^i)$, wo Π_1^i ein Kreis einer ein Raumstück S_3 erzeugenden Kugelfläche Π_2 ist, β) Ersatz von S_3 durch zwei Raumstücke (T_2, E_2') und $T_2, E_2'')$, wo E_2' und E_2'' die beiden von Π_1^i begrenzten E_2 sind, die zusammen Π_2 bilden (s. Nr. 4). Wir können jetzt die Begriffe der Homologie, Äquivalenz sowie den Begriff der „Mannigfaltigkeit im weiteren Sinne" unmittelbar auch für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten aufstellen.

Die Mannigfaltigkeit

$$\{P_0^1, P_0^2;\ S_1^1, S_1^2;\ (S_1^1, S_1^2)^1,\ (S_1^1, S_1^2)^2;\ ((S_1^1, S_1^2)^1,\ (S_1^1, S_1^2)^2)\}$$

(wo $S_1^i = (P_0^1, P_0^2)^i$ gesetzt ist) und jede ihre homöomorphe M_3 heißt *dreidimensionale Elementarmannigfaltigkeit* oder *Elementarraumstück* E_3.

Die (geschlossene) M_3:

$$\{P_0^1, P_0^2;\ S_1^1, S_1^2;\ S_2^1, S_2^2;\ (S_2^1, S_2^2)^1,\ (S_2^1, S_2^2)^2\}$$

(wo $S_1^i = (P_0^1, P_0^2)^i$ und $S_2^i = (S_1^1, S_1^2)^i$ gesetzt ist) und jede mit ihr homöomorphe M_3 bezeichnen wir als dreidimensionale Sphäre und mit dem Zeichen Π_3.

Von wichtigen Sätzen, die sich aus dem Vorhergehenden ergeben, erwähnen wir unter Beiseitelassung einer Reihe genauer Analoga zu den in Nr. 3 und 4 aufgeführten die folgenden: Jede geschlossene Fläche eines E_3 ist die Randfläche eines Teiles des E_3, oder, mit analoger Bezeichnung wie in Nr. 1: Jede geschlossene Fläche eines E_3 ist homolog null. — Jede geschlossene Fläche eines E_3 ist zweiseitig.

Nun haben wir alle Mittel in der Hand, um ganz analog weiter zu den C_4 *und den* M_4 *und weiter zu den* C_n *und* M_n *aufzusteigen*, worauf deshalb nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

6. Komplexe mit Singularitäten. Es sei vorgelegt ein Komplex C_n, der auf einen anderen Komplex C_n' abgebildet werden soll. Diese Abbildung möge nun aber nicht ein-eindeutig sein, sondern es soll einer ganzen Reihe von Punkten $P_0^1, \ldots, P_0^{\nu_0}$, wenn keine der Strecken, Flächenstücke usw. des C_n zwei dieser Punkte enthält, ein einziger Punkt des C_n' entsprechen dürfen; es soll ferner einer Reihe von Strecken, deren erzeugende Punkte dieselben beiden Bildpunkte haben, wenn nur kein Flächenstück, Raumstück usw. des C_n zwei Strecken dieser Reihe enthält, eine einzige Strecke des C_n' entsprechen. So fortfahrend erhalten wir eine Abbildung von C_n in C_n', bei der jedem P_0 oder S_k des C_n *ein* C_0 resp. S_k des C_n' entspricht, aber mehreren P_0 oder S_k

derselbe Punkt resp. dasselbe Raumstück. Jedes Element von C_n' aber ist das Bild von mindestens einem Element von C_n. Wir nennen nun C_n', *aufgefaßt als das Abbild eines bestimmten* C_n, einen *n-dimensionalen Komplex mit Singularitäten* (mehrfachen Punkten, Strecken usw.) und geben ihm die Bezeichnung $C_n'(C_n)$. Es kann ein solcher Komplex als das Bild von beliebig vielen verschiedenen Komplexen aufgefaßt werden. Ist das Original von C_n' eine Mannigfaltigkeit M_n, so nennen wir $C_n'(M_n)$ *eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Singularitäten.*

Sprechen wir von zwei (resp. k) Punkten, Strecken usw. des $C_n'(C_n)$, oder von Elementarmannigfaltigkeiten und Sphären der verschiedenen Dimensionen usw. des $C_n'(C_n)$, so sind damit die Bilder von zwei (k) Punkten, Strecken usw. des C_n, resp. die Bilder von Elementarmannigfaltigkeiten und Sphären usw. des C_n gemeint. Unter interner Transformation des $C_n'(C_n)$ soll das Abbild einer internen Transformation des C_n verstanden werden. $C_n^1(C_n)$ und $C_n^3(C_n^2)$ sind dann und nur dann homöomorph, wenn C_n und C_n^2 homöomorph sind. Endlich erklären wir $C_n'(C_n)$ und jeden mit ihm homöomorphen Bildkomplex homöomorph mit C_n und jeden mit C_n homöomorphen Komplex. — Die Wichtigkeit dieser Einführung geht schon aus den Sätzen hervor: Jeder C_n kann abgebildet werden auf einen Teil einer E_n; jeder C_n kann so auf einen Teil C_n' einer E_{n+1} abgebildet werden, daß $C_n'(C_n)$ keine mehrfachen n-dimensionalen Raumstücke enthält. Eine solche Abbildung wird auch wohl eine *Projektion* des C_n auf die E_{n+1} genannt. Unumgänglich nötig aber ist diese Einführung für die Entwicklungen der folgenden Nummer.

7. Externe Transformation. Homotopie und Isotopie. Sei $C_1'(C_1)$ ein Streckenkomplex mit (oder ohne) Singularitäten auf einer Mannigfaltigkeit M_n ($n > 1$) (d i. jedes der Elemente von $C_1'(C_1)$ ist konstituierendes Element der M_n). Angenommen nun, man könnte jedem Punkte P_0^i desselben einen ebenfalls der M_n angehörigen Punkt Q_0^i zuordnen, ferner jeder Strecke $(P_0^i, P_0^k)^l = S_1^l$ eine Strecke $(Q_0^i, Q_0^k)^l = T_1^l$ von M_n, so ist der neue Komplex jedenfalls auch ein Abbild von C_1 und wir bezeichnen ihn deshalb mit $C_0''(C_1)$. Wir nehmen nun ferner an, man könnte je zwei Punkte P_0^i und Q_0^i so durch eine Strecke U_1^i der M_n verbinden, daß zu jedem geschlossenen Kreis $\{S_1^l, U_1^k, T_1^l, U_1^i\}$ sich eine von ihm begrenzte Elementarmannigfaltigkeit der M_n finden läßt, so sagen wir: $C_1'(C_1)$ *und* $C_1''(C_1)$ *gehen ineinander durch externe Transformation auf der* M_n *über.* Sei ferner $C_2'(C_2)$ ein Flächenkomplex mit (oder ohne) Singularitäten auf einer Elementarmannigfaltigkeit M_n ($n > 2$). Angenommen nun, wir könnten jedem

Punkte P_0^i dieses Komplexes einen Punkt Q_0^i, einer Verbindungsstrecke S_1^l zweier Punkte eine Verbindungsstrecke T_1^l der entsprechenden Punkte, jedem Flächenstück S_2^h ein von den entsprechenden Elementen erzeugtes Flächenstück T_2^h zuordnen, so ist der neue Komplex jedenfalls auch ein Abbild von C_2 und darf also mit $C_2''(C_2)$ bezeichnet werden. Angenommen nun ferner, daß zwei entsprechende Punkte P_i und Q_i durch eine Strecke U_1^i verbunden werden könnten, daß es ferner für jeden geschlossenen Kreis $\{S_1^l, U_1^k, T_1^l, U_1^i\}$ ein der M_n angehöriges, von ihm begrenztes Elementarflächenstück E_2^l und endlich zu jeder der von zwei entsprechenden Flächen T_2^h und S_2^h und den zu ihren Begrenzungsstrecken gehörenden E_2^l gebildeten Sphäre ein Elementarraumstück E_3^h der M_n gäbe, so sagen wir: $C_2'(C_2)$ *und* $C_2''(C_2)$ *entstehen aus einander durch externe Transformation.* So fortfahrend können wir die externe Transformation eines auf einer M_n liegenden $C'_{n-m}(C_{n-m})$ definieren. Wir stellen ferner die Definition auf:

Gehen zwei Komplexe eventuell nach vorhergehenden internen Transformationen aus einander durch eine Reihe von externen Transformationen hervor, so nennen wir sie homotop [18]).

Wir haben die Sätze: Zwei homotope Komplexe sind homöomorph. — Zu jedem Komplex kann man einen homotopen mit vorgegebener Lage der Punkte finden. Begrenzen in einer M_n alle geschlossenen Kreise Elementarflächenstücke, so kann man zu jedem der M_n angehörigen Komplex (von weniger als n Dimensionen) einen ihm homotopen mit vorgeschriebener Lage der Strecken finden usw. Es ergibt sich so der grundlegende Satz:

Zwei homöomorphe, einem E_n angehörige $n-m$-dimensionale Komplexe mit (oder ohne) Singularitäten sind homotop.

Die *externen Transformationen* der *geschlossenen Mannigfaltigkeiten* lassen sich noch aus spezielleren, einfacheren Transformationen zusammensetzen, die wir *Elementartransformationen* nennen wollen: Es möge E_{n-m} auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $C_{n-m}(M_{n-m})$ auf einer M_n liegen und mit E'_{n-m} zusammen die Begrenzung einer E_{n-m+1} auf M_n bilden, dann ersetzen wir in $C_{n-m}(M_{n-m})$ die E_{m-n} durch

18) Der Begriff der Homotopie im E_3 ist der am häufigsten der Analysis situs zugrunde gelegte Begriff und wird häufig mit: „*Äquivalenz im Sinne der Analysis situs*" bezeichnet. Zwei auf einer Fläche homotope Kurven nennt *Jordan*, J. d. math. 2 (11), (1866), p. 100 ineinander reduzibel. Zwei im E_n homotope Komplexe nennt *Poincaré* (J. éc. pol. (2) 1 (1895), p. 1) „homéomorphe". Wegen des Bestehens des „Fundamentalsatzes" (s. im Text) ist diese Bezeichnung im Einklang mit der im Text vorgeschlagenen.

E'_{n-m} und nennen das eine Elementartransformation der $C_{n-m}(M_{n-m})$ auf der M_n.

Wir haben den Satz: Jede Elementartransformation ist eine externe Transformation, und: jede externe Transformation von geschlossenen Mannigfaltigkeiten läßt sich aus Elementartransformationen zusammensetzen.

Ist in der obigen Bezeichnung kein innerer Punkt weder von E'_{n-m} noch von der von E_{m-n} und E'_{n-m} begrenzten E_{n-m+1} ein Punkt der (singularitätenfreien geschlossenen) M_{n-m}, so wollen wir die Transformation eine *spezielle externe Transformation* nennen, und zwei einer M_n angehörende M_{n-m}, die aus einander nach eventuell vorhergegangener interner Transformationen durch spezielle externe Transformationen hervorgehen, *isotop* nennen.

Wir haben den Satz: Zwei homöomorphe M_{2n-m} auf einer E_{2n} sind isotop (dagegen gibt es z. B. im E_3 homöomorphe geschlossene Flächen resp. Kurven, die nicht isotop sind: verschieden geschlungene Kreisschläuche resp. Kurven). Hier ist auch die Betrachtung von mehreren nicht zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Bedeutung: Haben wir zwei Mannigfaltigkeiten M_{n-m} und $\overline{M}_{n-m}$ ohne gemeinsame Punkte, die durch spezielle externe Transformation übergehen in M'_{n-m} und $\overline{M}'_{n-m}$, so nennen wir die *Gesamtheit* $\{M_{n-m}, \overline{M}_{n-m}\}$ *speziell extern transformiert in die Gesamtheit* $\{M'_{n-m}, \overline{M}'_{n-m}\}$, wenn (in der obigen Bezeichnungsweise) kein Punkt weder von E'_{n-m} resp. $\overline{E}'_{n-m}$ noch von der von E_{m-n} resp. $\overline{E}_{m-n}$ und E'_{m-n} resp. $\overline{E}'_{m-n}$ begrenzten E_{n-m+1} resp. $\overline{E}_{n-m+1}$ ein Punkt von $\overline{M}_{n-m}$ oder $\overline{M}'_{n-m}$ resp. M'_{n-m} oder M_{n-m} ist. Die analoge Definition gilt für spezielle externe Transformation einer Gesamtheit von beliebig vielen Mannigfaltigkeiten ohne gemeinsame Punkte. Zwei Gesamtheiten von geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind isotop, wenn sie mittels interner und spezieller externer Transformationen aus einander hervorgehen.

Jetzt sind wir im Stande, die externen Transformationen von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M_n, d. i. von *Domänen* zu erklären. Die einzelnen eine Domäne (mit oder ohne Singularitäten) konstituierenden Raumstücke werden begrenzt durch singularitätenfreie Sphären Π_{n-1}. Transformieren wir den die Domäne konstituierenden Komplex extern, so zwar, daß dabei die externen Transformationen der einzelnen Π_{n-1} sich aus speziellen externen Transformationen zusammensetzen lassen, so nennen wir diese Operation eine (allgemeine) *externe Transformation* der entsprechenden Domänen. Können zwei Domänen nach eventuell internen Transformationen durch externe Transformationen in einander

übergeführt werden, so nennen wir sie *homotop*. Im Gegensatz von Mannigfaltigkeiten von relativ niedrigeren Dimensionen sind *zwei*, einer Elementarmannigfaltigkeit zugehörende, *homöomorphe Domänen* mit Singularitäten *nicht allemal homotop*. (Einfachstes Beispiel: Die zwei Domänen auf dem Streckenzug $P_0^1 P_0^2 P_0^3$ mit den Strecken $P_0^1 P_0^2$ resp. $P_0^1 P_0^2$, $P_0^2 P_0^3$, $P_0^3 P_0^2$ sind homöomorph aber nicht homotop. Dasselbe gilt von den beiden Domänen einer E_2, die durch die Fig. 1 angedeutet sind. Zwei *singularitätenfreie* Domänen sind dann und nur dann homotop, wenn die Systeme ihrer Berandungen

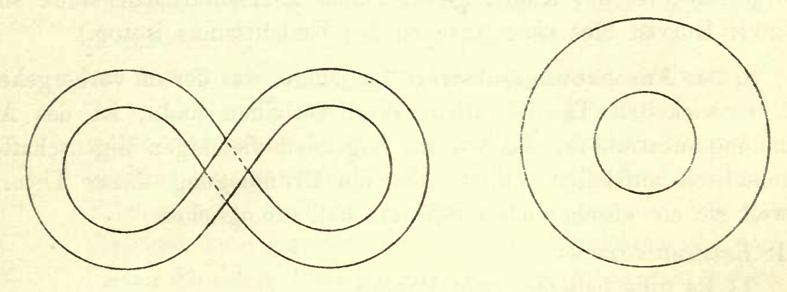


Fig. 1.

homotop sind. — Es sei eine Domäne und eine externe Transformation derselben gegeben. Dann kann man für jede interne Transformation jene externe Transformation so zu einer der neuen Domäne „erweitern", daß dabei die alten Elemente in der ursprünglichen Weise transformiert werden. — *Die speziellen externen Transformationen von* (*singularitätenfreien*) *Domänen* erhält man so: Eine externe Transformation heißt dann *speziell*, wenn man zu jedem Paare von konstituierenden Raumstücken S_{n-m}^1 und S_{n-m}^2 nach event. interner Transformation ein sie beide enthaltendes Elementarraumstück E_n finden kann, dessen Begrenzung bei der betreffenden (event. gemäß der internen Transformation erweiterten) Transformation speziell transformiert wird. *Zwei aus einander durch spezielle externe Transformationen entstehende Domänen heißen isotop.* Endlich: *Zwei beliebige* (*singularitätenfreie*) *Komplexe sind isotop, wenn sie entsprechende Komplexe in isotopen Domänen sind*[18a]).

Wir bemerken die Sätze: Sind zwei C_m auf einer M_l, die ein Teil einer M_n ist, isotop, so sind sie es auch auf der M_n. Zwei homöomorphe C_1 auf einem E_4 sind isotop (d. i. im speziellen: die Knoten sind in

18a) Zwei im E_n isotope Komplexe sind ineinander überführbar durch stetige Transformationen des zugehörigen n-dimensionalen Raumes; vgl. Nr. 8 und 10.

vier Dimensionen auflösbar[18b]). Zwei isotope Kreise auf einer M_n ($n > 2$) sind entsprechende Gebilde in isotopen Ringräumen.

Gelegentlich ist es von Bedeutung, auch den Indikatrixbegriff mit bei der Homotopie und Isotopie zu benutzen. Wir definieren: zwei (zweiseitige) Mannigfaltigkeiten M_l^1 und M_l^2 mit gegebenen Indikatricen sind miteinander homotop resp. isotop, wenn bei den betreffenden externen Transformationen gleichzeitig die Indikatrixbestimmungen in einander übergeführt werden. Es gilt der Satz: Die einzige Fläche, deren sämtliche geschlossenen Kurven auch mit Umlaufssinn einander isotop sind, ist die Kugel. (Auf einem Elementarflächenstück sind je zwei Kurven blos *ohne* Ansehen des Umlaufssinns isotop.)

8. Das Anschauungssubstrat. Dasjenige, was der im vorhergehenden entwickelten Theorie allein Wert verleihen kann, ist das Anschauungssubstrat, für das wir im folgenden diejenigen Eigenschaften axiomatisch aufstellen wollen, die die Grundlegung dieser Theorie, soweit sie ein anschauliches Substrat hat, ermöglichen.

I. *Existentialaxiome.*

1) Es gibt beliebig viele Punkte.

2) Linienstücke (Strecken), Flächen- und Raumstücke sind Punktmengen.

3) Zu je zwei Punkten gibt es beliebig viele von diesen Punkten begrenzte Linienstücke (Strecken), die sonst keine gemeinsamen Punkte haben.

4) Zu je zwei Linienstücken mit gemeinsamen Grenzpunkten, sonst aber ohne gemeinsame Punkte, gibt es beliebig viele von diesen zwei Linien begrenzte Flächenstücke ohne sonstige gemeinsame Punkte.

5) Zu je zwei Flächenstücken, die durch dieselben beiden Linien begrenzt werden und ohne sonstige gemeinsame Punkte, gibt es ein und nur ein von ihnen begrenztes Raumstück.

II. *Zerlegungsaxiome.*

a) 1) Jedes Linienstück mit den Grenzpunkten P_0' und P_0'' ist gleich der Gesamtheit von zwei Linienstücken mit einem gemeinsamen Punkt Q_0, die durch die Punkte P_0' und Q_0 resp. durch Q_0 und P_0'' begrenzt werden.

18b) *Klein,* Math. Ann. 9 (1876), p. 478. Beispiele bei *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. 64 (1879), p. 224; *H. Durège,* Wien Ber. 82² (1880), p. 135; *Hoppe,* Arch. Math. Phys. 65 (1880), p. 423; vgl. auch *V. Schlegel,* Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 105; *F. Zöllner,* Wiss. Abh. 1 (1878), p. 272; *O. Simony,* Gemeinf. Lösung . . ., Wien (3. Aufl.) 1881, p. 38 ff.

2) Jedes Flächenstück mit den Grenzstrecken S_1' und S_1'' ist gleich der Gesamtheit von zwei Flächenstücken, die blos eine Strecke T_1 gemeinsam haben, und von S_1' und T_1 resp. von T_1 und S_1'' begrenzt werden.

3) Jedes Raumstück mit den Grenzflächen S_2' und S_2'' ist gleich der Gesamtheit von zwei Raumstücken, die blos eine Fläche T_2 gemeinsam haben, und von S_2' und T_2 resp. T_2 und S_2'' begrenzt werden.

b) Gegeben sei irgendwie eine endliche Anzahl von Punkten, Strecken, Flächen und Raumstücken. Dann kann man ein Raumstück S_3 so finden, daß jedes einzelne dieser Elemente ein *inneres* Element einer aus S_3 durch Zerlegung nach [II a) 1), 2), 3)] entstehenden E_3 ist. Man kann für *alle* Elemente *eine* solche E_3 finden, wenn zwei Linien des gegebenen Systems nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten, zwei Flächen eine endliche Anzahl von isolierten Punkten und Strecken, zwei Raumstücke nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten, Strecken und Flächen gemeinsam haben.

Hiernach sind zwei *homöomorphe*, im Raum ausgebreitete *Komplexe* anschaulich als *analog zusammensetzbar* oder *überdeckbar* zu betrachten. Eine interne Transformation eines Komplexes entspricht hier einer Zerlegung desselben.

III. *Deformationsaxiom.*

Zwei auf einer Linie, Fläche oder räumlichen Domäne gelegene Komplexe sind dann und nur dann in einander mit resp. ohne Selbstdurchdringung *stetig deformierbar*, wenn sie homotop resp. isotop sind.

Dieses Axiom ist die Zusammenfassung einer großen Reihe von einzelnen Aussagen, z. B.: Begrenzen zwei Linien ein Flächenstück, so sind sie auf diesem in einander stetig deformierbar. Ferner: Zwei in einander ohne Selbstdurchdringung im Raume deformierbare Komplexe können so mit räumlichen Domänen umgeben werden, daß diese Domänen in einander stetig deformierbar sind, wobei die beiden Komplexe in einander übergehen. Der Fundamentalsatz (Nr. 7) über den Zusammenhang zwischen Homotopie und Homöomorphie kann jetzt so ausgesprochen werden:

Zwei gleichzusammensetzbare Flächen sind (mit Durchdringung) in einander stetig deformierbar.

9. Einteilung der Analysis situs. Alle diejenigen Eigenschaften topologisch definierter Gebilde, bei denen weder interne noch externe Transformation in Betracht kommt, fassen wir unter dem Namen

Complexus[18c]) zusammen. In ihrer Anwendung auf geometrische Gebilde sind blos die Existentialaxiome und die ersten drei Zerlegungsaxiome, soweit mit ihrer Hilfe auf die Existenz gewisser Komplexe geschlossen werden kann, nötig. Alle die Eigenschaften, für welche die interne, aber nicht die externe Transformation eingeführt werden müssen, d. i. die bei internen Transformationen invariant bleibenden Eigenschaften topologischer Gebilde, gehören der Theorie des *Nexus* (Zusammenhang) an. Hier sind zur geometrischen Deutung alle Zerlegungsaxiome von Nöten. Die Invarianten für interne und externe Transformationen gehören der Theorie des *Connexus* („relativer" Zusammenhang, Zusammenhang von Mannigfaltigkeiten auf anderen Mannigfaltigkeiten) an. Hier müssen zur räumlichen Deutung auch die Deformationsaxiome gebraucht werden. Endlich, für sich wollen wir im folgenden die *Theorie der Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten* behandeln, die je nach verschiedenen Gesichtspunkten der Complexus- oder der Connexustheorie zugerechnet werden kann.

10. Die Methode. Durch die Entwicklungen der ersten sieben Nummern dieses Abschnittes ist die *Analysis situs* dargestellt als ein *durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichneter Teil der Kombinatorik.* Das ist schon für die Widerspruchslosigkeit der in Nr. 8 aufgestellten Axiome von großer Bedeutung. In der nun folgenden Darstellung des bisher in der Analysis situs Erreichten wird dieser Standpunkt nicht immer streng eingehalten; es werden vielmehr häufig mit Hilfe der Anschauung wichtige Schlüsse gezogen: Die Anschauung ist nicht nur der Maßstab für die Bedeutung der einzelnen Resultate, sondern sie ist auch der beste Führer in der Entdeckung neuer Sätze und ihrer Beweise. Aber in jedem einzelnen dieser Fälle kann man ohne Schwierigkeit sehen, daß die in Betracht kommenden Schlüsse auch allein mit Hilfe der vorangehenden abstrakten Entwicklungen gemacht werden können, wie denn überhaupt alle speziellen Überlegungen, die zu irgend einer Zeit auf unserem Gebiet angestellt worden sind, als natürliches Fundament unsere obigen Definitionen haben, während die oft an die Spitze gestellte Theorie der stetigen Raumdeformationen (s. Einleitung) wesent-

---

18c) Bei der Definition von C_3 und höheren Komplexen haben wir (Nr. 5) den Begriff der Π_2, Π_3 usw. benutzt, den wir mit Hilfe der Einführung der internen Transformationen begründet haben. Eine *rein komplektische Definition der* Π_2 wird uns durch den Umstand geliefert, daß eine geschlossene M_2 dann und nur dann eine Π_2 ist, wenn auf ihr jeder Kreis begrenzt; und Entsprechendes gilt für Π_3 usw. — Dies sind auch die einzigen Eigenschaften von Π_2 usw., die im Abschnitt Complexus vorkommen.

lich nur einen rein dogmatischen Zweck zu erfüllen hat. Die *Analysis situs* ist eben der *primitivste Abschnitt der Geometrie*, wo der Grenzbegriff noch nirgendwo von Bedeutung ist.

A. Complexus.

1. Übersicht. Die Untersuchungen, die für diesen Teil charakteristisch sind, treten klar hervor bei der Theorie der Liniensysteme (Nr. 2), die in voller Allgemeinheit studiert sind. Bei dem Studium höherer Komplexe dagegen werden zumeist Eigenschaften, die eigentlich der reinen Theorie des Complexus angehören, mit Untersuchungen nektischen Charakters vermischt entwickelt, und zwar aus dem Grunde, weil beinahe nur die spezielle Komplexgattung der Mannigfaltigkeiten untersucht wird. Hierher gehört vor allem die Ableitung der gewöhnlichen und erweiterten (komplektischen) *Eulerschen Formel* für zwei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

2. Liniensysteme (Streckenkomplexe). (α_0 Anzahl der Punkte, α_1 Anzahl der Linien der als zusammenhängend vorausgesetzten Systeme.) Ein Punkt des Systems, auch *Knotenpunkt* genannt, heißt von der Multiplizität k, wenn k Linien in dem Punkt zusammenstoßen. Für einen *Endpunkt* ist $k = 1$. Wenn $k \geqq 3$, nennt man den betreffenden Punkt auch einen Kreuzungspunkt $(k - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung[19]). Etwas anders wie in diesem Artikel (Grundlagen Nr. 1) wird bei *Jordan*[20]) und bei *G. Brunel*[21]) ein gegebener C_1 durch Symbole dargestellt, und zwar bei dem ersteren durch die Form $\sum a_{ik} x_i x_k$, wo $x_1 \cdots x_i \cdots x_k \cdots x_{\alpha_0}$ die Punkte sind und a_{ik} die Zahl, die angibt, wie oft x_i mit x_k verbunden ist, bei *Brunel* durch die Determinante dieser Form.

Von grundlegender Bedeutung für die Theorie des C_1 sind die beiden Begriffe, die von *Listing* zuerst betrachtet und mit dem Namen *Cyklose* und *Dialyse* bezeichnet wurden[22]). Eine Cyklose ist ein geschlossener Kreis, die Dialyse besteht in der Zerstörung dieses Kreises durch Wegnahme einer Strecke.

Durch Wegnahme von

$$\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

passend gewählter Linien wird der Komplex in einen *Baum* (s. Fig. 2)

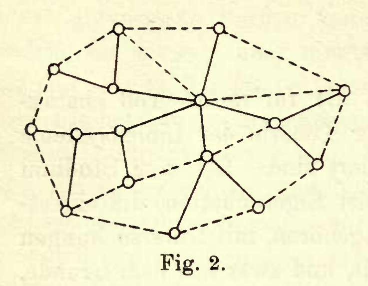
19) *Ahrens*, Math. Ann. 49 (1897), p. 312. Bei *Listing* (Census räuml. Kompl., p. 29) k-zügiger Ausgang.

20) J. f. Math. 70 (1869), p. 185.

21) Bordeaux, Extr. proc. verb. 1892—93, p. IX; Bordeaux Mém. (4) 5 (1895), p. 165.

22) Census § 7 ff.

verwandelt, d. i. in einen C_1 ohne Kreise, der also, wenn „innere" Linien vorhanden sind, durch die Fortnahme einer solchen zerfällt[23]). μ_1 heißt bei *Listing* die *cyklomatische Ordnungszahl*[24]). Für singuläre Komplexe auf einer Π_2 mit keinen anderen Singularitäten als q Doppelpunkten, d. i. zusammenfallenden Knotenpunkten von der Multiplizität 2 (nach *Listing* Traversen) gibt *Listing* die Formel für μ:[25])


Fig. 2.

$$\mu_1 = m - q + 1,$$

wenn m die Anzahl der „Felder" ist, in die die Π_2 von dem Komplexe eingeteilt wird, wo ein Feld eine von Komplexstrecken begrenzte E_2 ist, in der kein Punkt und keine Strecke des Komplexes liegt.

Bedeutet ν_k die Anzahl der Knotenpunkte von der Multiplizität k, so ist:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\sum (k\nu_k)$$
$$\alpha_0 = \sum \nu_k,$$

also:

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}\sum(\nu) + 1,$$

wo $\sum(\nu)$ die Summe der Ordnungen aller Knotenpunkte bedeutet[26]).

Geben wir jeder Strecke S_1^i eines C_1 einen bestimmten Sinn, dann verstehen wir unter der *Kongruenz*[27])

$$\Pi_1 \equiv \sum \varepsilon_i S_1^i,$$

wo ε_i gleich $+1$, -1 oder Null sein kann, daß, wenn man den Kreis Π_1 in bestimmter Richtung durchläuft, die Strecke S_i^1, wo $\varepsilon_i = 0$ ist, überhaupt nicht, diejenige, für die $\varepsilon = +1$ resp. -1 ist, in dem gegebenen resp. in einem dem gegebenen entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird. Dann besteht folgender Satz: Für jeden C_1 gibt es gerade μ_1 linear von einander unabhängige solche Aggregate. Also: jeder Kreis ist „linear auszudrücken" durch ein *Fundamentalsystem* von μ_1 Kreisen. Der Beweis hierfür folgt leicht mit Hilfe des Satzes:

---

23) *G. Kirchhoff*, Pogg. Ann. 72 (1847), p. 498 ff.; *Listing*, Census (1862), § 21; *Jordan*, J. f. Math. 70 (1869), p. 185; *Ahrens*, Math. Ann. 49 (1897), p. 315. Näheres s. Anm. 47.

24) Census § 21.

25) Census § 22, Formel (3).

26) *Ahrens*, Fussn. 23, p. 312 u. 315.

27) Diese Methode ist von *Poincaré*, Palermo Rend. 13 (1899), p. 285 eingeführt worden.

Gibt es für ein System linearer Formen μ_1 und nicht weniger Variable, von denen in jedem linearen Aggregat jener Formen mindestens eine vorkommt, so sind gerade μ_1 Formen des Systems von einander unabhängig. Man hat dann nur noch zu berücksichtigen, daß jede von null verschiedene lineare Verbindung obiger Aggregate Strecken enthält, die zusammen einen Kreis bilden. — Jedes Fundamentalsystem bestimmt Kombinationen von μ_1 „nicht zerstückelnden Linien“: eine „*Gruppe* von μ_1 Linien“, in der Weise, daß jede der Linien einem und nur einem der μ_1 Kreise des Fundamentalsystems angehört, und umgekehrt: zu jeder Gruppe gibt es Fundamentalsysteme[28]. — Es kann höchstens $2^{\mu_1} - 1$ Kreise geben[29]).

Es hat ein besonderes Interesse, wenn sich unter den *Kreisen* eines Liniensystems solche finden, *welche alle Punkte enthalten*, jeden nur einmal. Die Frage, ob solche existieren, und dann in welcher Zahl, läßt sich nicht durch bloße Angabe der Ordnungszahlen der Punkte bestimmen. *Brunel*[30]) setzt die Lösung in Verbindung mit der Berechnung der früher[31]) besprochenen Determinante. Die Lösung verschiedener *mathematischer Spiele*[32]) läßt sich auf die Aufstellung solcher Kreise reduzieren. Vgl. I G 1, *Ahrens*, Nr. 3 und 7.

Eine ähnliche Frage ist die nach der *Minimalzahl von Zügen, in welchen alle Linien des Systems je einmal durchlaufen werden können.* Ein „Zug“ ist in unserer Bezeichnungsweise eine M_1 mit Singularitäten. Zu dieser Frage wurde *Euler*[33]) durch das „Königsberger Brückenproblem“ (s. Einleitung) geführt. Ist die Zahl der Knotenpunkte von *ungerader* Multiplizität, die für jeden Komplex immer gerade ist, etwa $2p$, dann ist die kleinste Zahl von Zügen gleich p. Ist $p = 0$, dann

---

28) *Ahrens* l. c. p. 315.

29) *Ahrens* l. c. p. 317.

30) Anm. 21. 31) S. 171.

32) Vgl. *E. Lucas*, Récr. math., Paris 1882—94, 4, p. 221. Beispiele: 1) *W. R. Hamilton*, Dodekaederspiel; *Lucas*, Récr. math. 2, p. 201 ff.; *Ahrens*, Math. Spiele, p. 327 ff.; eine ähnliche Aufgabe *Brunel*, Bordeaux Extr. proc. verb. 1893—94 (Mém. (4) 5, 1895, p. 165), p. XXVIII. 2) Der Rösselsprung (*Lucas* 4, p. 205; *Ahrens*, p. 165; vgl. *Brunel*, Bordeaux Extr. proc. verb. 1892—93 (Mém. (4) 4, 1894, p. 273), p. IX u. p. LIII; Bordeaux Mém. (4) 5 (1895), p. 165. 3) Das später zu nennende *Problem des Taitschen Graphes* ist jedenfalls lösbar, wenn das hier besprochene Problem gelöst werden kann; vgl. *M. de Polignac*, Bull. soc. math. de Fr. 27 (1899), p. 142. Ähnliche Anwendungen von Liniensystemen liegen vor z. B. bei Problemen verwandschaftlicher Beziehungen (Litt.: *Ahrens*, l. c. p. 78); vgl. *Brunel*, Bordeaux Extr. proc. verb. 1892—93 (Mém. (4) 4, 1894, p. 273), p. XXV; ein anderes Problem *Brunel*, ebenda, 1893—94, p. XIV.

33) Petrop. Comm. 8 (1741), p. 128 ff.; vgl. *Lucas*, Récr. math. 1, p. 21 ff. u. p. 222; *Ahrens*, Math. Spiele, p. 317.

kann man die sämtlichen Linien in *einem geschlossenen Zuge* durchlaufen. Dieser von *Euler* bewiesene Satz wurde später wiedergegeben oder wiedergefunden von *Th. Clausen*[34]), *Listing*[35]), *C. Hierholzer*[36]), *M. de Polignac*[37]), *Jul. Petersen*[38]) und *O. Steinert*[39]). Nach einer Bemerkung von *C. A. Laisant*[40]) kommt die Lösung des *Dominoproblems* auf eine Anwendung dieses Satzes heraus. Verwandt mit dem Satz ist die Aufgabe, den Weg durch ein *Labyrinth* zu finden[41]), und die Aufgabe der sogenannten *Schmugglerreise*[42]). Die Fragestellungen von *A. Thue*[43]) und *E. Steinitz*[44]) gehen in derselben Richtung.

Wenn ein Zug durch einen Knotenpunkt höchstens einmal hindurchlaufen darf, wird die Minimalzahl der Züge im allgemeinen größer. Sie hängt allein von den Ordnungszahlen der Knotenpunkte ab und ist sehr einfach zu bestimmen[45]).

Jordan[46]) nennt zwei Liniensysteme A und A' einander *gleich (pareils)*, wenn sie in unserer Ausdrucksweise ohne interne Transformation einander homöomorph sind, d. i. wenn sie sich nur durch die Bezeichnungsweise unterscheiden, und behandelt die Frage, ob und eventuell wie oft ein Liniensystem mit sich selbst gleich sein kann.

Die Liniensysteme von der cyklomatischen Ordnungszahl 0 (einfach zusammenhängende) sind die *Bäume*[47]). Für einen Baum ist also

$$\alpha_1 = \alpha_0 - 1.$$

---

34) Astr. Nachr. 21 (1844), p. 216.

35) Vorstudien, p. 59 ff.

36) Math. Ann. 6 (1873), p. 30.

37) Bull. Soc. math. de Fr. 8 (1880), p. 121 (nur für Bäume ausgesprochen), wiedergegeben in *Lucas*, Récr. math. (Paris, 2. éd., 1891) 1, p. 51 ff.

38) Acta math. 15 (1891), p. 196 u. p. 210 (nur für reguläre Liniensysteme ausgesprochen).

39) Arch. Math. Phys. (2) 13 (1895), p. 220.

40) *Lucas,* Récr. math. 2, p. 229 (Note 1) u. 4, p. 126; *Ahrens*, Math. Spiele, p. 373. Da auch die Bestimmung von der Anzahl von Lösungen durchgeführt von *G. Tarry,* Ass. fr. Nancy 2 (1886), p. 49. Vgl. auch *Brunel,* Bord. Proc. verb. 1895—96, p. 62.

41) *Ch. Wiener,* Math. Ann. 6 (1873), p. 29; *Lucas,* Récr. math. 1, p. 45 (Lösung von *Trémeaux*); *Tarry,* Nouv. Ann. (3) 14 (1895), p. 187; vgl. *Ahrens,* Math. Spiele, p. 321 ff.

42) *Lucas,* Récr. math. 1, p. 38.

43) Tidskr. f. Math. (5) 3 (1885), p. 102.

44) Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 293.

45) *F. Lippich,* Wien Ber. 69^2 (1874), p. 95.

46) J. f. Math. 70 (1869), p. 185.

47) *A. Cayley* nennt sie *trees, C. Jordan assemblages à continuité simple, M. de Polignac arbres, ramifications, arborescenses.* Vor allem hat sich *Cayley* mit den Bäumen beschäftigt: Phil. mag. 13 (1857), p. 172 = Papers 3, p. 242 (um eine Reihe Differentiationsprozesse zu veranschaulichen); Phil. mag. 18 (1859), p. 374

Die meisten Untersuchungen bezwecken die Aufzählung von Bäumen, welche gegebenen Bedingungen genügen, z. B. gegebene Anzahlen von Linien, freien Endpunkten usw. haben. Diese Aufzählungen werden verschieden, je nachdem man sich den Baum als einen *Wurzelbaum*[48]), von einem bestimmten Knotenpunkt entspringend, denkt oder nicht.

Diese Untersuchungen sind in *der organischen Chemie* von Bedeutung bei der Bestimmung der Anzahl von *isomeren Verbindungen*[49]).

Jordan[50]) hat bewiesen, daß ein Baum immer eine *Mitte* — entweder einen zentralen Knotenpunkt, *Zentrum*, oder eine zentrale *Achse* — besitzt mit folgender Eigenschaft: im ersten Falle ist die Zahl von Linien, welche in jedem von dem zentralen Knotenpunkte entspringenden partiellen Baum enthalten sind, $\leqq \frac{\alpha_1}{2}$; im zweiten Falle, der nur möglich ist, wenn die Anzahl der Linien ungerade ist, teilt jeder Endpunkt der Achse *(Bizentrum)* den Baum in zwei Bäume mit resp. $\frac{\alpha_1+1}{2}$ und $\frac{\alpha_1-1}{2}$ Linien. Von jedem anderen Knotenpunkte entspringt in beiden Fällen ein partieller Baum mit mehr als $\frac{\alpha_1+1}{2}$ Linien.

Im Gegensatz zu dieser *Jordan*schen *Mitte* (etwa Mitte der gesamten „Masse" — *„centre of magnitude or of number"*) definiert

= Papers 4, p. 112; Phil. mag. 47 (1874), p. 444 = Papers 9, p. 202; Rep. Brit. Ass. 1875, p. 257 = Papers 9, p. 427; Phil. mag. (5) 3 (1877), p. 34 = Papers 9, p. 544; Educ. Times 27 (1877), p. 81 = Papers 10, p. 598; Am. J. of math. 4 (1881), p. 266 = Papers 11, p. 365; J. Hopkins Circular 1882, p. 202 = Papers 10, p. 401; Quart. J. of math. 23 (1889), p. 376 = Papers 13, p. 26; vgl. auch Phil. Trans. 158 (1868), p. 141 = Papers 6, p. 260. Mit Bäumen beschäftigen sich auch: *Listing,* Census (1862), § 27; *Jordan,* J. f. Math. 70 (1869), p. 186; *Sylvester,* Educ. Times 30 (1878), p. 52; *S. Tebay,* Educ. Times 30 (1878), p. 81; *de Polignac,* Bull. soc. math. de France 8 (1880), p. 120; ibid. 9 (1881), p. 30; *Brunel,* Bord. Extr. proc. verb. 1892—93 (Mém. (4) 4, 1894, p. 273), p. 18 u. p. 25; ibid. 1893—94 (Mém. (4) 5, p. 165), p. 14, 39 u. 44; Proc. verb. 1894—95, p. 8; *P. A. Mac Mahon,* Phil. mag. (5) 40 (1895), p. 153. Vgl. auch die Darstellungen: *Lucas,* Récr. math. (2. éd.) 1 (1891), p. 51 und *Ahrens,* Math. Spiele (1901), p. 304 ff.

48) *Cayley,* Phil. mag. 13 (1857), p. 172 = Papers 3, p. 242.

49) *Cayley,* Phil. mag. 47 (1874), p. 444 = Papers 9, p. 202; Rep. Brit. Ass. 1875, p. 257 = Papers 9, p. 427 (Refer. in Ber. deutsch. chem. Ges. 8 (1875), p. 1056); Phil. mag. (5) 3 (1877), p. 34 = Papers 9, p. 544; *Brunel,* Bordeaux Extr. proc. verb. 1892—93 (Mém. (4) 4, 1894, p. 273), p. 18; ibid. 1893—94 (Mém. (4) 5, 1895, p. 165), p. 39; Bordeaux Proc. verb. 1894—95, p. 8; *H. Delannoy,* Assoc. franç. Caen 2 (1894), p. 102; Phil. mag. (5) 40 (1895), p. 153. Auszug: L'interméd. 1 (1894), p. 72; Paris. Bull. soc. chim. (3) 11 (1894), p. 239; Ber. deutsch. chem. Ges. 27 (1894), p. 725. Vgl. V 6, Chemische Atomistik, *Hinrichsen, Mamlock* und *Study,* Nr. **36**, **37** und bes. **46**.

50) J. f. Math. 70 (1869), p. 186; vgl. *Cayley,* Educ. Times 27 (1877), p. 81 = Papers 10, p. 598.

Sylvester[51]) eine *Mitte (Zentrum* oder *Achse) der linearen Ausdehnung* (*„centre and bicentre of length“),* indem er den Abstand zweier Knotenpunkte durch die Zahl der zwischenliegenden Linien mißt. Wenn der größte Abstand zweier Endpunkte $2n$ ist, hat das Liniensystem ein *Sylvestersches Zentrum*, von welchem gerechnet die Entfernungen der Endpunkte $\leqq n$ sind; ist sie dagegen $2n+1$, so hat das Liniensystem eine *Sylverstersche Achse*, von deren Endpunkten *(Bicentra)* die Knotenpunkte des Liniensystemes höchstens um n entfernt sind. Für alle anderen Knotenpunkte gibt es einen Knotenpunkt, welcher von ihm eine größere Entfernung als n hat. *Jordan* konstruiert a. a. O. noch eine andere Art von Mitte, die, wie man leicht sieht, gerade die *Sylvester*sche Mitte ist. Entfernt man nämlich von einem Baum alle „äußeren“ Strecken, so entsteht wieder ein Baum, entfernen wir von diesem wieder alle äußeren Strecken und fahren so fort, so bekommt man zum Schluß entweder eine einzelne Strecke (*Sylvester*sche Achse) oder lauter äußere Strecken mit einem gemeinsamen Punkt (*Sylvester*sches Zentrum).

Die *Minimalanzahl von Zügen*, mit welcher ein Baum gezeichnet werden kann, ist nach dem *Euler*schen Satz[52]) die Hälfte der Anzahl von Knotenpunkten ungerader Ordnung. Für diese Zahl gibt *de Polignac*[53]) verschiedene Ausdrücke an. Sie ist z. B. gleich

$$\sum\left[\frac{k+1}{2}\right]-(\alpha_0-1)=\sum\left[\frac{k-1}{2}\right]-1,$$

wo k die Multiplizität eines Knotenpunktes bedeutet, $[a]$ (nach *Gauß*, Werke 2, p. 5) die größte ganze Zahl, die in a enthalten ist, bedeutet und wo die Summationen über alle Knotenpunkte erstreckt sind.

Ganz wie galvanische Elemente entweder in Reihen oder parallel verbunden werden können, kann man auch Linien in „Ketten“ oder „Joche“ zusammenfügen. Die speziellen Liniensysteme, welche durch sukzessives „Zusammenketten“ und „Zusammenjochen“ entstehen, nennt *Cayley Jochkette (yoke-chain)* und *P. A. Mac Mahon*[54]) zeigt, daß ihre Bildung eng mit denen von Bäumen verknüpft ist.

Kette —•—•—•—

Joch ⊖

51) Vgl. *Cayley*, Rep. Brit. Ass. 1875, p. 259 = Papers 9, p. 428; Educ. Times 27 (1877), p. 81 = Papers 10, p. 598; Am. J. of math. 4 (1881), p. 266 = Papers 11, p. 365; *de Polignac,* Bull. soc. math. de Fr. 9 (1881), p. 39; *Brunel,* Bord. Extr. proc. verb. 1893—94, p. 29.

52) s. Anm. 33.

53) Bull. soc. math. de Fr. 8 (1880), p. 120 ff.; ibid. 9 (1881), p. 34 ff.; vgl. *Lucas,* Récr. math. (2 éd.) 1, p. 51.

54) Lond. Proc. math. soc. 22 (1894), p. 330.

Bei Anwendung von Liniensystemen in der Invariantentheorie[55]) sind insbesondere die *regulären Graphen*[56]) von Bedeutung, in deren Knotenpunkten überall dieselbe Anzahl g von Linien zusammenlaufen, g ist *der Grad des Graphes*, α_0 wird die *Ordnung* genannt. Wenn man den Graph durch Überlagerung von regulären Graphen von *derselben Ordnung* aber von niedrigerem Grade herstellen kann, ist er *zerlegbar*, sonst *primitiv*. *Jul. Petersen*[57]) hat folgende Sätze bewiesen: Jeder Graph *geraden* Grades läßt sich in Graphen zweiten Grades zerlegen, und zwar im allgemeinen auf verschiedene Weisen. Dagegen gibt es primitive Graphen von jedem *ungeraden* Grade. Von den Untersuchungen über Primitivität in diesem Falle ist besonders hervorzuheben, daß ein primitiver Graph *von drittem Grade* wenigstens drei Blätter haben muß, wo ein Blatt ein Teil des Graphes ist, welcher nur durch eine Linie (eine Brücke) mit den übrigen Teilen des Graphes zusammenhängt. Ein Graph *vom dritten Grade ohne Blätter* läßt sich in einen Graph ersten und einen Graph zweiten Grades zerlegen.

Der Satz von *P. G. Tait*[58]), daß ein solcher Graph sich immer in drei vom ersten Grade zerlegen läßt, ist wenigstens nicht im allgemeinen richtig[59]). Ob er für Graphen, welche auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlechte $p = 0$ gezeichnet sind, gilt, muß vorläufig dahinstehen; bisher ist kein befriedigender Beweis dafür geführt.

Dasselbe ist der Fall, trotz vieler Mühe[60]), für das damit in Verbindung stehende[61]) *Kartenfarbenproblem*, unter den Mathematikern

55) Vgl. Anm. 10.

56) Bei *Brunel réseaux réguliers* genannt; Bord. Proc. verb. 1894—95, p. 3.

57) *Jul. Petersen*, Acta math. 15 (1891), p. 193 ff.

58) Edinb. Trans. 29 (1880), p. 657; Listings Topology, Phil. mag. (5) 17 (1884), p. 30.

59) *Jul. Petersen*, L'interméd. 5 (1898), p. 225.

60) Das Problem wird behandelt bei *Tait*, Edinb. Proc. 10 (1880), p. 501 und p. 729; Edinb. Trans. 29 (1880), p. 657; *Cayley*, Proc. R. Geogr. Soc. 1 (1879), p. 259 = Pap. 11, p. 7; *A. B. Kempe*, Am. J. of math. 2 (1879), p. 193; Nature 20 (1879), p. 275; 21 (1880), p. 399; *Brunel*, Bordeaux Extr. proc. verb. 1888—89 [Mém. (3) 5], p. 89; *P. J. Heawood*, Quart. J. 24 (1890), p. 332; ibid. 29 (1898), p. 270; *P. Wernicke*, Am. math. soc. Bull. (2) 4 (1897), p. 4. In L'intermédiaire als Antwort auf die Fragen Nr. 51 (1, 1894, p. 20), Nr. 360 (1, p. 213) und Nr. 425 (2, 1895, p. 8): 1, p. 192 (*Delannoy, Ramsey*); 2, p. 232 (*Delannoy*, *H. Brocard*); 2, p. 270 (*E. Borel*); 2, p. 395 (*Delannoy*, *C. Juel*); 3, 1896, p. 179 (*Ch. J. de la Vallée-Poussin*); 3, p. 225 (*Delannoy*); 5, 1898, p. 225 und 6, 1899, p. 36 (*Jul. Petersen*); *de Polignac*, Bull. soc. math. de Fr. 27 (1899), p. 142; *Wernicke*s Beweis (Math. Ann. 58 (1901), p. 413) ist nicht ausreichend. Vgl. auch *Lucas*, Récr. math. 4, p. 168 [= Revue scientif. (3) 32 (1883), p. 11].

61) *Tait* l. c.; vgl. auch *Ahrens*, Math. Spiele; *Lucas*, Récr. math. 4, p. 193; *Jul. Petersen*, L'interméd. 6 (1899), p. 37.

zuerst von *F. Guthrie* und *C. de Morgan*[62]) berührt. Das Problem kommt darauf hinaus, folgenden Satz zu beweisen: Vier Farben genügen, um die Gebiete einer Landkarte so zu färben, daß überall zwei aneinander (längs Linien) grenzende Gebiete verschiedene Farben haben[60]). Daß vier Farben notwendig sind, geht schon hervor aus dem Satze von *Möbius* (oder *H. A. Weiske*), daß auf einer der Kugel homöomorphen Fläche vier *Nachbargebiete (spatia confinia)* existieren[63]), d. i. vier Gebiete, von denen jedes Gebiet mit jedem anderen eine Grenzstrecke gemeinsam hat. Eine obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben ist leicht zu finden, sie ist $= 5$ für die Kugel, $= 7$ für die Torusfläche. Da auf dieser aber sieben Nachbargebiete existieren[63]), so ist für diese Fläche das Kartenfarbenproblem gelöst[64]).

Brunel[65]) berechnet die Werte, welche α_1, α_0 und der Grad eines regulären Graphes annehmen können für μ gleich 1 bis 8, ohne doch zu untersuchen, ob es Graphen gibt, welche jedes Wertsystem realisieren.

Jul. Petersen[66]) beweist mittels der Theorie der regulären Graphen die Unlösbarkeit des sogenannten „*Euler*schen Problems der 36 Offiziere“ [67]).

3. Höhere Komplexe und die (komplektische) Eulersche Formel. (Bettische Zahlen, Torsionskoeffizienten.) Die allgemeine Theorie der höheren Komplexe, also zunächst der Flächenkomplexe oder -systeme, ist lange nicht so ausgebildet wie die der Liniensysteme. Zunächst entsteht die Frage nach den Eigenschaften derjenigen Linienkomplexe, die Flächensystemen von besonderen Eigenschaften zugrunde liegen können. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß aus einem C_1

---

62) Edinb. Proc. 10 (1880), p. 727.

63) *R. Baltzer*, Leipzig Ber. 1885, p. 1. Die Theorie der Nachbargebiete und Nachbarpunkte auf Flächen von willkürlichem Geschlechte behandelt *L. Heffter*, Math. Ann. 38 (1891), p. 477; ibid. 49 (1897), p. 101; ibid. 50 (1897), p. 261 und setzt die Untersuchungen mit *Tripelsystemen* (I A 2, *Netto*, Nr. **10**) in Verbindung. Im Raume gibt es keine obere Grenze der Gebiete; vgl. *F. Guthrie*, Edinb. Proc. 10 (1880), p. 727 und *P. Stäckel*, Zeitschr. Math. Phys. 42 (1897), p. 275; selbst die Beschränkung auf konvexe Gebiete ändert hieran nichts, *H. Tietze*, Monatsh. Math. Phys. 16 (1905).

64) *P. J. Heawood*, Quart. J. 24 (1890), p. 332.

65) Bordeaux Proc. verb. 1894—95, p. 3.

66) Annuaire des math., Paris 1901—02, p. 413.

67) *Euler*, Vlissingen Verhandl. 9 (1782), p. 85 = Comm. arithm. coll. 2, p. 302; vgl. auch L'intermed. 2, 1895, p. 17; 2, p. 79; 3, 1896, p. 17; 3, p. 90; 5, 1898, p. 83; 5, p. 176; 5, p. 252; 6, 1899, p. 251; 6, p. 273; 7, 1900, p. 14; 7, p. 311, und *Ahrens*, Math. Spiele, p. 248 ff.

durch Hinzufügung von Flächenstücken ein C_2 werden kann, ist die, daß jede Strecke des C_1 zu mindestens einem geschlossenen Kreise gehört. Über Eigenschaften von solchen C_1, die einer zweiseitigen M_2 angehören, siehe weiter unten. Im übrigen ist die Theorie gerade so weit entwickelt worden, um die *Euler*sche Formel und damit zusammenhängende Probleme zu erledigen.

Homologie[68]: Es sei gegeben ein im allgemeinen nicht singularitätenfreies System von *zweiseitigen* Mannigfaltigkeiten $C_2(\{M_2\})$ auf einem C_n, deren Berandungen ebenfalls ganz oder teilweise singulär sein können. Diese Berandungen mögen sich aus den geschlossenen Kreisen $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^n$ zusammensetzen, die einzelne Punkte gemeinsam haben dürfen. Geben wir dann allen konstituierenden Flächenstücken von $C_2(\{M_2\})$ einen solchen Umlaufssinn, daß jede Strecke von den zwei in ihr zusammenstoßenden Flächen entgegengesetzte Richtungen erhält, dann werden auch die Strecken von C_n, die die Berandung von $C_2(\{M_2\})$ bilden, ein oder mehrere Male in gleichem oder verschiedenem Sinne durchlaufen werden, je nach den verschiedenen Flächenstücken des $C_2(\{M_2\})$, deren gemeinsame (singuläre) Kanten sie sind. Wird eine Kante α-mal in dem einen Sinne, β-mal in dem anderen Sinne durchlaufen, so sagen wir, sie wird $(\alpha - \beta)$-mal im ersten Sinne oder $(\beta - \alpha)$-mal im zweiten Sinne durchlaufen Ist aber $\alpha = \beta$, so sagen wir, die Strecke wird Nullmal durchlaufen. Wir geben nun $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \ldots$ einen beliebig bestimmten Durchlaufungssinn. Werden dann bei der obigen Umlaufsbestimmung alle Strecken von Π_1^1 ν_1-mal, alle Strecken von Π_1^2 ν_2-mal, alle Strecken von Π_1^n ν_n-mal im gegebenen Sinne durchlaufen, so sagen wir: *Die Kreise* $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^n$, ν_1, *resp.* $\nu_2, \ldots$, *resp.* ν_n*-mal im gegebenen Sinne durchlaufen, begrenzen* $C_2(\{M_2\})$. Oder auch kurz: Π_1^1. $\Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^n$ *begrenzen zusammen einen Teil des* C_n. *Oder endlich*

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n$$

ist homolog null, in Zeichen:

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \backsim 0.$$

Ist $\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 \backsim 0$, so sagen wir $\nu_1 \Pi_1^1$ ist homolog $-\nu_2 \Pi_1^2$.

Mit Hilfe des Begriffes der Kongruenz (siehe oben p. 172) können wir die Definition der Homologie kürzer so fassen: Es sei $\Pi_{e_1}^{\,i}$ irgend ein Kreis, der eines der konstituierenden Flächenstücke des C_n begrenzt, und es möge die Kongruenz bestehen:

68) S. *Poincaré,* J. éc. polyt. (2) 1 (1895), p. 18; Palermo Rend. 13 (1899), p. 285 ff.

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \equiv \sum \mu_i \Pi_{e_1}^i,$$

dann besteht auch die Homologie:

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \backsim 0.$$

Denn in der Tat: Wegen der Kongruenz begrenzen im oben definierten Sinne $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^n$, ν_1- resp. ν_2-, ... resp. ν_n-mal gezählt, das System von Mannigfaltigkeiten, das aus den μ_i-fach gezählten, von den $\Pi_{e_1}^i$ begrenzten Flächenstücken besteht. Umgekehrt folgt aus der Homologie

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \backsim 0,$$

wie sofort einleuchtend ist, eine Kongruenz von der Form

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \equiv \sum \mu_i \Pi_{e_1}^i.$$

Es gilt nun für Kreissysteme auf zweiseitigen M_2 der charakteristische Satz: Haben in der Kongruenz

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \equiv \sum \lambda_i \Pi_{e_1}^i$$

die Koeffizienten der linken Seite einen gemeinsamen Faktor, so haben denselben auch die Koeffizienten der rechten Seite gemeinsam. Hieraus folgt dann weiter: Eine auf einer zweiseitigen M_2 gültige Homologie darf man durch einen gemeinsamen Faktor der Koeffizienten dividieren[69]). — Der Beweis für den ersten Satz wird ganz einfach so geführt: Wir setzen voraus, daß die Kreise $\Pi_{e_1}^i$ alle voneinander linear unabhängig sind. Dann fehlt auf der rechten Seite, wegen der vorausgesetzten Zweiseitigkeit des M_2, mindestens einer der konstituierenden Kreise. Denn nach Definition der Zweiseitigkeit ist ein konstituierender Kreis der Summe aller übrigen kongruent. Nehmen wir an, etwa λ_1 wäre durch ϱ, den gemeinsamen Faktor aller ν_k, nicht teilbar, so folgt leicht durch Betrachtung der an $\Pi_{e_1}^1$ anschließenden $\Pi_{e_1}^i$, daß kein λ_i durch ϱ teilbar ist und daß deswegen auf beiden Seiten jedes $\Pi_1^i\, \Pi_{e_1}^k$ angrenzen müssen. Das ist aber unmöglich. Denn dann müßte an jeder Seite eines $\Pi_{e_1}^i$ ein $\Pi_{e_1}^k$ angrenzen und die $\Pi_{e_1}^i$ die ganze Fläche erfüllen, was ja nicht der Fall ist.

Sei nun $P_1 - 1$ *die Maximalanzahl von zusammen nicht begrenzenden Kreisen* auf einer zweiseitigen geschlossenen M_2, so ist $\mu_1 = \alpha_2 - 1 + P_1 - 1$ nach obigem die Anzahl der Kreise eines Fundamen-

69) Bei *Poincaré* gleich in der Verallgemeinerung für n Dimensionen mit Hilfe der Theorie der Torsionskoeffizienten bewiesen (s. p. 184). Der Textbeweis läßt sich unmittelbar verallgemeinern.

talsystems für den der M_2 zugrunde liegenden C_1. Es ist aber nach *Complexus* Nr. 2

$$\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1.$$

Wir haben also:

$$\alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - P_1,$$

das ist die *erweiterte komplektische Eulersche Formel.* Für eine Kugel ist also (wie übrigens anders leichter zu zeigen):

$$\alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 = 2.$$

Das ist die *gewöhnliche Eulersche (Polyeder-)Formel*[70]. Es ergibt sich noch der Satz: Zu irgend $P_1 - 1 - n$ nicht begrenzenden Kreisen existieren stets n weitere mit den ersten zusammen nicht begrenzende Kreise.

Gewisse fundamentale Betrachtungen bei der Theorie der C_1 können in der Theorie der C_2 wiederholt werden: Wir geben jeder Fläche S_2^i einen bestimmten Sinn (Indikatrix) (siehe Grundlagen Nr. 2). Dann bedeutet die *Kongruenz*

$$M_2 \equiv \sum \varepsilon_i S_2^i \quad (\varepsilon_i = 0 \text{ oder } + 1 \text{ oder } - 1)$$

daß, wenn man der *zweiseitigen* Fläche M_2 eine bestimmte Indikatrix erteilt, die Flächenstücke S_2^i, wenn $\varepsilon_i = 0$ ist, nicht auf M_2 liegen, diejenigen für die $\varepsilon_i = + 1$ oder $- 1$ ist, durch die Indikatrixbestimmung für M_2 eine mit der gegebenen übereinstimmende resp. nicht übereinstimmende Indikatrix erhalten. Für jede C_2 gibt es μ_2 linear voneinander unabhängige solche Aggregate. Also jede geschlossene zweiseitige Fläche des C_2 ist kongruent mit einem linearen Aggregat von μ_2 Flächen, die ein *Fundamentalsystem von geschlossenen Flächen* bilden. Jedes solche System bestimmt wieder Kombinationen von μ_2 nicht zerstückelnden Flächen von der Eigenschaft, daß nach Wegnahme der μ_2 Flächen in dem C_2 keine geschlossene zweiseitige Fläche mehr vorkommt, so daß der C_2 in einen *Flächenbaum* verwandelt ist. Ebenso wie oben läßt sich zeigen, daß für den C_2, der eine zweiseitige M_3 bildet, die Zahl $\mu_2 = \alpha_3 - 1 + P_2 - 1$ ist, wo $P_2 - 1$ *die Maximalanzahl der* (einfach oder mehrfach gezählt) zusammen *nicht begrenzenden zweiseitigen Flächen* auf der M_3 ist. Betrachten wir den die M_3 bildenden C_1, so haben wir jetzt, da nach Fortnahme von μ_2 Flächenstücken keine geschlossene zweiseitige Fläche mehr übrig bleibt, $\alpha_2 - \mu_2$ voneinander linear unabhängige $\Pi_{e_1}^{\,i}$, und folglich ist,

---

70) Dieser rein der Komplexustheorie entspringende Beweis der (komplektischen) *Euler*schen Formel rührt im wesentlichen von *Poincaré* her, Palermo Rend. 13 (1899), § 3. Betreffs des Zusatzes „komplektisch“ s. Anm. 98.

da durch die Fortnahme der μ_2 Flächenstücke keine Kante weggefallen sein kann, für diesen C_1 die Zahl $\mu_1 = \alpha_2 - \mu_2 + P_1 - 1$, wenn $P_1 - 1$ die Maximalanzahl der zusammen auf M_3 nicht begrenzenden Kreise von C_1 ist. Nun ist aber wieder $\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$ und so erhalten wir die Beziehung:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = - P_1 + P_2.$$

Einer Verallgemeinerung auf n Dimensionen steht nichts im Wege, so daß für die *Anzahlen der Teilmannigfaltigkeiten einer zweiseitigen* M_n die Beziehung gilt:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n \alpha_n$$
$$= 1 + (-1)^n - (P_1 - 1) + (P_2 - 1) + \cdots + (-1)^{n-1}(P_{n-1} - 1),$$

wenn P_k dem Obigen entsprechend definiert ist. Dies ist die *erweiterte* (komplektische) *Eulersche Formel für n Dimensionen.*[71]) $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ heißen die *Bettischen Zahlen* der Mannigfaltigkeit M_n.[72]) Um für *einseitige* M_n die analoge Formel zu erhalten, braucht man nur auf der rechten Seite der obigen Gleichung die Zahl $(-1)^n$ fortzulassen.

Wie aus dieser Art der Ableitung hervorgeht, gilt diese Formel auch für Komplexe C_n, welche blos die Forderung erfüllen, daß ein

---

71) S. *Poincaré* a. a. O.; vgl. auch die folg. Anm. Für eine Sphäre für die (nach „Grundlagen" Nr. 5) alle Zahlen $P_1, \ldots, P_{n-1}$ gleich 1 sind, ergibt sich

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \cdots (-1)^n \alpha_n = 0$$

oder $= 2$, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Über die Literatur zu diesem Satze, der sich viel leichter mit Hilfe des Begriffes des Homöomorphismus resp. der internen Transformation ableiten läßt, vgl. *Complexus* Nr. 4 und *Nexus* II Nr. 1 und Anm 99.

72) Diese Bezeichnung rührt von *Poincaré* her: J. éc. polyt. (2) 1 1895, p. 19. *Betti* selbst definiert die Zahlen anders, indem er nämlich den Zusatz, daß die begrenzenden Mannigfaltigkeiten einfach oder mehrfach gezählt werden dürfen, nicht macht. Die so definierten Zahlen sind von denen *Poincarés* im allgemeinen verschieden, und es gilt für sie die obige Formel nicht mehr. Hierauf hat *Heegaard,* Forstudier . . ., Dissert. Kopenhagen 1898, p. 87 ff. aufmerksam gemacht, was *Poincaré* Palermo Rend. 13 (1899), p. 1 ff. weiter ausführt. Dieselbe Definition wie *Betti* gibt *Riemann* in seinem Fragment über An. sit. Werke 2. Aufl., p. 479. Es ist nicht unmöglich, daß die Arbeiten von *Betti* und *Riemann* nicht unabhängig voneinander entstanden sind (*Riemanns* Aufenthalt in Italien, vgl. *R.* Werke, 2. Aufl., p. 555 f.). Vgl. *A. Tonelli,* Rom Linc. Atti (2) 2 (1875), p. 594; *E. Bartolotti,* Rom Linc. Rend. (4) 5^2 (1889), p. 229; *Tonelli,* Rom Linc. Rend. (4) 6^1 (1890), p. 139. Ferner *E. Picard* et *G. Simart,* Th. d. f. d. 2 variables, Paris, 1 (1897), p. 27 ff. Der Beweis, den *Poincaré* für die Formel im J. éc. polyt. gegeben hat, ist, wie *Heegaard* l. c. bemerkt hat, unrichtig, ebenfalls wegen Nichtbeachtung der beiden verschiedenen Definitionen der *Betti*schen Zahlen.

konstituierendes Raumstück S_{n-1} zu zwei und nur zu zwei konstituierenden S_n gehört, d. i. für unhomogene Komplexe (siehe Grundlagen Nr. 5), so z. B. für Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, bei denen die Umgebung nicht jedes Punktes sich wie eine Kugel verhält, sondern bei denen Punkte etwa mit ringflächenförmigen Umgebungen existieren. (Beispiel: Eine Mannigfaltigkeit bestehe aus zwei Raumstücken mit zwei gemeinsamen Flächenstücken (d. i. einem Torus) und den Pyramiden mit gemeinsamer Spitze, deren Basen die anderen die beiden Raumstücke begrenzenden Flächenstücke sind.) Eine andere Art von Beispielen liefern C_2, die geschlossene M_2 mit singulären Punkten (Selbstberührungspunkten) darstellen. Nennt man $\bar{\alpha}_n$ die Anzahl der S_n eines C_n, zwischen deren Berandungen keine Kongruenz besteht ($\bar{\alpha}_n = \alpha_n$ resp. $= \alpha_n - 1$ für ein- resp. zweiseitige M_n), dann ist folgende *Verallgemeinerung der komplektischen Eulerschen Formel für einen beliebigen Komplex* C_n gültig:

$$\sum_0^{n-1}(-1)^k \alpha_k + (-1)^n \bar{\alpha}_n = 1 + \sum_1^{n-1}(P_l - 1)(-1)^l.$$

Nur für gewöhnliche (homogene) geschlossene Mannigfaltigkeiten dagegen gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Größen, die wir *kombinierte Anzahlen*[73]) nennen wollen: Unter $\alpha_{i,k}$ (M_n) verstehen wir, wenn $i > k$ ist, die Anzahl der M_n konstituierenden Mannigfaltigkeiten i^{ter} Dimension, jede so oft gezählt, als sie von Mannigfaltigkeiten k^{ter} Dimension begrenzt wird, wenn $i < k$ die Anzahl der M_n konstituierenden Mannigfaltigkeiten i^{ter} Dimension, jede so oft gezählt, als die Anzahl der Mannigfaltigkeiten k^{ter} Dimension angibt, zu deren Begrenzung sie gehört. Allgemein ist $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$ und $\alpha_{1,0} = 2\alpha_1$, für jede (geschlossene) $M_n (n > 1) \alpha_{2,0} = \alpha_{2,1}$, für jede $M_n (n > 2) : \alpha_{3,0} + \alpha_{3,2} = \alpha_{3,1} + 2\alpha_3$, ferner für jede $M_2 : \alpha_{0,1} = \alpha_{0,2}$, für jede $M_3 : \alpha_{2,3} = 2\alpha_2$, $\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2}$, $\alpha_{0,1} + \alpha_{0,3} = \alpha_{0,2} + 2\alpha_0$; diese Formel folgt, weil die Umgebung jedes Punktes sich wie eine Kugel verhält. Aus diesen Formeln folgt für eine geschlossene M_3 der Satz:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0,$$

woraus nach dem Obigen folgt:

$$P_1 = P_2,$$

ein fundamentaler Satz, der zuerst von *Poincaré* richtig ausgesprochen und bewiesen wurde[74]). — Allgemein ergibt sich für jede ungerade

---

73) Von *Poincaré*, J. éc. polyt. (2) 1 (1895), § 17, eingeführt.

74) Der Satz wurde zuerst von *Betti* l. c. ausgesprochen, ist aber unrichtig für seine Definition der *Betti*schen Zahlen. *Poincarés* Beweis im J. éc. polyt. ist

Anzahl von Dimensionen die Formel:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots - a_n = 0,$$

woraus nach dem Obigen für zweiseitige Mannigfaltigkeiten

$$P_1 - P_2 + P_3 - P_4 - \cdots - P_{n-1} = 0$$

folgt. Bei einseitigen Mannigfaltigkeiten ist das Aggregat auf der linken Seite gleich 1. Für manche Zwecke ist es praktisch, kompliziertere Anzahlen einzuführen, die von drei und mehr Argumenten abhängen[75]).

Poincaré hat noch eine ganz andere Art von Größen eingeführt, die Mannigfaltigkeiten (von mehr als zwei Dimensionen) charakterisieren, nämlich die *Torsionskoeffizienten*[76]). Wir erweitern die Definition von Homologien für mehrdimensionale zweiseitige Mannigfaltigkeiten und es sei etwa:

$$k \sum \nu_i \Pi_q^i \sim 0, \ (k > 1),$$

und k die kleinste Zahl, die diese Homologie erfüllt (es darf also z. B. nicht $\sum \nu_i \Pi_q^i$ selbst ~ 0 sein), dann wird k ein q-dimensionaler Torsionskoeffizient der Mannigfaltigkeit M_n genannt. Den Namen rechtfertigt *Poincaré,* indem er nachweist, daß Mannigfaltigkeiten mit Torsionskoeffizienten (oder kurz mit Torsion) notwendigerweise einseitige Mannigfaltigkeiten enthalten müssen. Doch ist dieser Grund nicht recht zwingend, da umgekehrt M_n ohne Torsion, z. B. eine E_4, sogar geschlossene einseitige Gebilde enthalten können. Geschlossene einseitige M_{n-1} wird allerdings blos eine M_n mit Torsion besitzen können. (*Poincaré* beweist übrigens nur die Existenz ungeschlossener einseitiger Gebilde[77]).) Sehr wichtig ist die analytische Methode zur

---

unzureichend (s. Anm. 72), stichhaltig dagegen in den Palermo Rend. 3 (1899). Dasselbe gilt von dem Beweise bei *Picard-Simart* l. c. p. 44 ff. Der Beweis im Text ist eine Kombination der *Poincaré*schen Betrachtungen in den beiden Arbeiten, die nur für M_3 zum Ziele führt. Vgl. Complexus Nr. 4.

75) S. *M. Dehn,* Math. Ann. 61 (1906), p. 561.

76) Lond. Math. Soc. 32 (1900), p. 281 ff.

77) Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit Torsion bei *Poincaré,* J. éc. polyt. (2) 1895, p. 52; *Heegaard,* Forstudier; *Poincaré,* Palermo Rend. 13, p. 287 f. Die den Beispielen zugrunde gelegten M_3 sind alle homöomorph mit dem projektiven dreidimensionalen Raum oder, was dasselbe ist, mit dem Kugelraum, dessen Oberfläche zentral auf sich selbst bezogen ist, d. i. der zweiseitigen dreidimensionalen Erweiterung des geschlossenen *Möbius*schen Bandes (s. Connexus II B). Eine einfache Zusammensetzung dieser Mannigfaltigkeit aus Raumstücken erhält man in einer Mannigfaltigkeit, die aus 4 Hexaedern (Würfeln), 12 Vierecken, 16 Strecken (den Kanten und Körperdiagonalen eines Würfels) und 8 Punkten besteht.

Bestimmung der Torsionskoeffizienten[78]). Man gibt jedem Raumstück S^i_{q+1} und S^k_q eine bestimmte Indikatrix. Dann setzt man $\varepsilon_{ik} = 0$, wenn S^k_q nicht auf S^i_{q+1} liegt, gleich $+1$ oder -1, wenn S^k_q auf S^i_{q+1} liegt und durch die Indikatrix des letzteren eine mit ihrer eigenen übereinstimmende resp. ihr entgegengesetzte Indikatrix bestimmt wird. Man macht sich aus den ε_{ik} eine Tabelle T_{q+1}, mit α_{q+1} Linien und α_q Kolonnen, in der ε_{ik} in der i^{ten} Linie und k^{ten} Kolonne zu stehen kommt. Die Tabelle kann durch Addition und Subtraktion einzelner Kolonnen oder Linien, ferner durch Vertauschung mit gleichseitigem Zeichenwechsel in eine solche übergeführt werden, in der alle Elemente null sind mit Ausnahme der Elemente, für die $i = k$ ist. Diese sind, wenn sie von null, $+1$ und -1 verschieden sind, die Torsionskoeffizienten der betreffenden Mannigfaltigkeit. Solche Tabellen sind auch sonst sehr praktisch, z. B. zur Entscheidung der Frage, ob eine vorliegende Mannigfaltigkeit ein- oder zweiseitig ist.

4. Benutzung von nektischen Methoden für die Theorie höherer Komplexe. Da die Zusammenhangstheorie (nexus) für mehr als zwei Dimensionen bisher nur unvollkommen entwickelt ist, andererseits die bisherigen Resultate derselben in engstem Zusammenhange mit dem Vorhergehenden stehen, sollen diese gleich an dieser Stelle auseinandergesetzt werden. Da bei jedem einzelnen der Prozesse, die eine interne Transformation (siehe Grundlagen Nr. 5) zusammensetzen, jedesmal gleichzeitig zwei aufeinanderfolgende Anzahlen einer M_n je um Eins vermehrt werden, so ergibt sich der Satz, daß für *zwei homöomorphe M_n die alternierende Summe der Anzahlen α_i gleich sein muß.* Diese Summe entspricht nach *Dyck*[79]) der *Kronecker*schen Charakteristik eines die Mannigfaltigkeit darstellenden Funktionensystems (siehe auch Nexus Nr. 8). Man überzeugt sich ferner leicht, daß die Maximalanzahl nicht begrenzender Kurven, Flächen usw. durch eine interne Transformation ungeändert bleibt. Wir erhalten so den Satz: Zwei homöomorphe M_n haben gleiche *Betti*sche Zahlen (s. Nr. 3), die übrigens auch *Zusammenhangszahlen* genannt werden. Speziell erhalten wir hierdurch das Resultat, daß die Zusammenhangszahlen für eine Mannigfaltigkeit im engeren Sinne (*reduzierte Betti*sche Zahlen nach *Poincaré*) gleich den Zusammenhangszahlen für eine Mannigfaltigkeit im weiteren Sinne (siehe Grundlagen Nr. 4) sind. Dadurch gewinnen die Sätze des vorigen Abschnittes eine tiefere Bedeutung. Ganz dasselbe, was hier über die Zusammen-

78) *Poincaré,* Lond. Math. Soc. 32 (1900), p. 281 ff.

79) Math. Ann. 37 (1890), p. 273 ff.

hangszahlen gesagt ist, gilt auch für die Torsionskoeffizienten, infolge des ebenfalls leicht zu beweisenden Satzes, daß zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten gleiche Torsionskoeffizienten haben. Nach *Poincaré*[80]) gibt es zu jeder Mannigfaltigkeit M_n eine *homöomorphe zu ihr reziproke* M_n' von der Art, daß jedem Punkt von M_n ein S_n von M_n', jedem S_{n-m} von M_n ein S_m von M_n', endlich jedem S_n von M_n ein Punkt von M_n' in der Weise zugeordnet werden kann, daß, wenn auf M_n ein S_i zur Begrenzung eines S_k gehört, das S_k entsprechende S_{n-k} auf M_n' zur Begrenzung des entsprechenden S_{n-i} gehört. Es läßt sich dann zeigen, daß die Maximalanzahl der nicht begrenzenden Π_k auf M_n gleich der Maximalanzahl der nicht begrenzenden Π_{n-k} auf M_n' ist, woraus nach dem Obigen, weil M_n und M_n' homöomorph sind, für jede geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit M_2 der wichtige Satz folgt:

$$P_k \equiv P_{n-k}.$$ [81])

Ebenso folgt, daß die q-dimensionalen Torsionskoeffizienten mit den $(n - 1 - q)$-dimensionalen Torsionskoeffizienten übereinstimmen[82]) müssen und daß eine zweiseitige M_n keine $(n-1)$-dimensionale Torsion haben kann[83]), was gleichbedeutend mit dem Satz ist, der für M_2 oben bereits abgeleitet ist und auch direkt verallgemeinert werden kann: Homologien, die auf zweiseitigen M_n zwischen $n-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bestehen, können durch einen allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor dividiert werden.

Die Vermutung[84]), daß eine M_n, ohne Torsion, deren sämtliche Zusammenhangszahlen gleich 1 sind, einer Hypersphäre homöomorph ist, hat *Poincaré* durch ein Beispiel als irrig nachgewiesen[85]), das in folgende Form gebracht werden kann. Man nehme zwei von Doppelringflächen r und r' begrenzte Räume R und R' und stelle aus ihnen einen geschlossenen Raum dadurch her, daß man die Oberflächen r und r' in folgender Weise aufeinander bezieht: Seien C_1 und C_2 resp. C_1' und C_2' zwei zusammen nicht begrenzende Kreise der Ringfläche r resp. r', die je ein Flächenstück des betreffenden Ring-

80) Palermo Rend. 13 (1899), p. 314 ff.

81) Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes, daß für eine M_3 $P_1 = P_2$ ist; für den Beweis gilt dasselbe wie für den Beweis des letzteren (s. Anm. 75). Der Beweis im Text ist der von *Poincaré* in Palermo Rend. 13, § 8 und Lond. Math. Soc. 32 (1900), § 5, p. 295.

82) *Poincaré,* Lond. Math. Soc. a. a. O. p. 302.

83) *Poincaré,* a. a. O. p. 307.

84) *Poincaré,* a. a. O. p. 308.

85) Palermo Rend. 18 (1904), p. 45.

raumes begrenzen (also auf diesem homolog null sind) (siehe Figur 3). Seien ferner Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven auf r, von denen Γ_1 mit C_1 einen und mit C_2 keinen Punkt, und Γ_2 mit C_1 keinen und mit C_2 einen Punkt gemeinsam hat. Endlich seien D_1 und D_2 zwei sich nicht schneidende Kurven auf r, die bei geeigneter Wahl des Durchlaufungssinus von C_1, C_2, Γ_1 und Γ_2 die Homologie

(1) $$D_1 + 2\Gamma_1 + \Gamma_2 + C_1 \sim 0 \ldots$$

und

(2) $$D_2 + 3\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + C_1 + C_2 \sim 0 \ldots$$

befriedigen (siehe Figur 3). Da man wegen der Ersetzbarkeit von

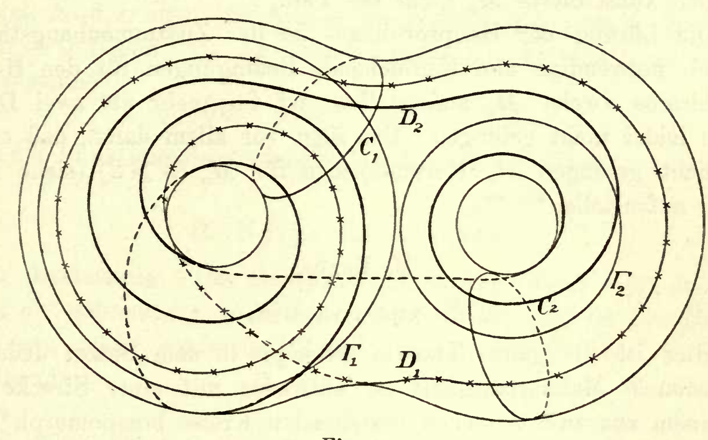


Fig. 3.

Homologien durch Kongruenzen (siehe Seite 179) dieselben mit ganzen Zahlen multiplizieren und voneinander abziehen kann, so folgen aus diesen Homologien die weiteren:

(3) $$\Gamma_1 + 2D_1 - D_2 + C_1 - C_2 \sim 0 \ldots$$

und

(4) $$\Gamma_2 - 3D_1 + 2D_2 - C_1 + 2C_2 \sim 0 \ldots$$

Da das System $\{D_1, D_2\}$ äquivalent (siehe Grundlagen Nr. 3 und Nexus Nr. 7) ist mit dem System $\{C_1, C_2\}$, so kann man die Ringflächen r und r' so homöomorph auf einander beziehen, daß D_1 und D_2, C_1' und C_2' entsprechen. Erklärt man nun überhaupt sich so entsprechende Elemente von r und r' als identisch, so erhält man einen geschlossenen Raum, ohne Torsion, dessen *Betti*sche Zahlen $= 1$ sind. Denn: Jede der M_3 angehörige Kurve begrenzt und zwar einmal genommen. Denn in R begrenzen C_1 und C_2, in R' D_1 und D_2, und folglich nach (3) und (4)

auch Γ_1 und Γ_2, weil jede einem Aggregat von begrenzenden Kurven homologe Kurve selbst begrenzt. Jede andere Kurve aber ist homolog mit einem linearen Aggregat von C_1, C_2, Γ_1 und Γ_2. Also ist die M_3 ohne Torsion und es ist $P_1 = 1$. Also auch $P_2 = 1$ (siehe p. 183). Aber diese M_3 ist nicht mit einer Hyperkugel homöomorph. Denn: Zerlegt man eine Hyperkugel irgendwie in zwei Doppelringräume, R und R' mit der gemeinsamen Begrenzungsfläche r, dann sind die in R begrenzenden Kurven von r in der obigen Bezeichnung homolog mit C_1, C_2 oder $C_1 + C_2$, und die in R' begrenzenden mit Γ_1, Γ_2 oder $\Gamma_1 + \Gamma_2$, wo, wie oben $\Gamma_1\, C_1$ in einem und C_2 in keinem Punkt, und $\Gamma_2\, C_1$ in keinem und C_2 in einem Punkt schneidet. Das ist aber für die oben konstruierte M_3 nicht der Fall.

Die Lösung des Hauptproblems in der Zusammenhangstheorie, nämlich notwendige und hinreichende Bedingungen für den Homöomorphismus zweier M_n aufzustellen, ist für mehr als zwei Dimensionen leider nicht gelungen. Das liegt vor allem daran, daß es bisher nicht gelungen ist, Normalformen für M_n $(n > 2)$ (siehe *Nexus* Nr. 3) aufzustellen[85a])[86]).

B. Nexus.

I. Nexus von Linien.

Hier ist die ganze Theorie erschöpft in dem Satze: Jede eindimensionale Mannigfaltigkeit ist entweder mit einer Strecke oder mit einem aus zwei Strecken bestehenden Kreise homöomorph[87]).

Doch sollen hierher, wegen der späteren Verallgemeinerung, noch gerechnet werden gewisse Betrachtungen analytisch-geometrischer Natur, die von *Dyck*[88]) herrühren. *Dyck* bestimmt eine Charakteristik K für ein System $\{M_1\}$ von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten, die

---

85a) Hierauf weist *Dyck,* Math. Ann. 37 (1890), p. 306 hin. Vgl. bei *Heegaard,* Dissert. Kopenhagen 1898, den Versuch, das Verfahren zur Herstellung von Normalformen von M_2 für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten zu erweitern, p. 43 ff.

86) Über weitere polydimensionale Untersuchungen s. Nexus Nr. 8, Connexus I und II B; vgl. ferner: *P. Wernicke,* Über die An. sit. mehrdimensionaler Räume, Göttingen 1904 (Dissert.). Schon *Möbius*, Leipzig Ber. 15 (1863), p. 18 = Werke 2 (1886), p. 435, hat sich mit 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, nämlich mit den von Ring- und Kugelflächen begrenzten Teilen eines E_3 beschäftigt. Sein Hauptresultat ist, daß alle von je einer Ring- und einer Kugelfläche begrenzten Raumteile einander elementarverwandt sind. Seine Behauptung, daß alle von je zwei Ringflächen begrenzte Körper elementarverwandt sind, ist, wie leicht einzusehen, unrichtig.

87) S. *F. Möbius,* Leipzig Ber. 15 (1863), p. 18 = Werke 2 (1886), p. 435.

88) Leipzig Ber. 13 (1886), p. 53; Math. Ann. 32 (1888), p. 465 ff.

gleich der Anzahl der ungeschlossenen Linien dieses Systems ist. Mit Hilfe der *Kronecker*schen Charakteristikentheorie [I B 3a, *Runge*, Nr. 7] bestimmt er zunächst die Charakteristik desjenigen $\{M_1\}$, welcher von den „innerhalb“ einer Kurve $\psi(x, y) = 0$ liegenden Teilen der Geraden $y = y_a$[89]) gebildet wird. Dann wird anstatt der Geraden eine beliebige Kurve $\varphi(x, y) = 0$ genommen[90]). Durch stetige Umformung läßt er die gegebene $\{M_1\}$ aus einer $\{M_1\}$ mit bekanntem K entstehen. Es ändert sich K für solche Lagen der sich deformierenden $\{M_1\}$, bei denen die Kurven $\psi = 0$ und $\varphi = 0$ sich berühren. Durch Untersuchung des Einflusses, den die verschiedenen Arten von Berührungspunkten auf die Änderung von K haben, ergibt sich K d. i. also: die Anzahl der Stücke von $\varphi = 0$, die innerhalb $\psi = 0$ liegen, als die *Kronecker*sche Charakteristik des Funktionensystems[91])

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta = 0,$$

wo Δ die Funktionaldeterminante von φ und ψ bedeutet.

II. Nexus von Flächen.

1. Einleitung. Das Hauptproblem unserer Theorie ist *die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus zweier gegebener Flächen, M_2 und M_2'.*[92]) Die Lösung ist die folgende:

89) Leipzig Ber. l. c., p. 62 und Leipzig Ber. 14 (1887), p. 40.

90) Math. Ann. 32 (1888), p. 466 ff.

91) *L. Kronecker*, Berlin Monatsber. 1878, p. 145.

92) Der wesentliche Kern dieses Problems ist zuerst von *Riemann* behandelt worden (Diss. Gött. (1851) Nr. 6 = Werke (2. Aufl.), p. 9 und J. f. Math. 54 (1857), p. 105 = Werke (2. Aufl.), p. 91) und zwar nach zwei verschiedenen Methoden, nämlich erstens mit Hilfe der Theorie der Querschnitte (Diss.) und zweitens mit Hilfe der Theorie der Rückkehrschnitte (J. f. Math.). Bei unserer Darstellung ergeben sich die *Riemann*schen Resultate über Querschnitte und Rückkehrschnitte als Korollare der allgemeinen Theorie (s. Nr. 4, 5). Das Problem ist nach dem Fundamentalsatz der Homotopie (Grundlagen Nr. 7) äquivalent mit dem Problem: Wann sind zwei M_2 im E_3 miteinander homotop, oder, anschaulicher, ineinander stetig transformierbar? In dieser Form ist das Problem von *Jordan* (J. de math. (2) 11 (1866), p. 105) formuliert und für zweiseitige Flächen behandelt worden. Daß hierbei alle möglichen sogenannten anschaulichen Annahmen gemacht werden, ist von vorneherein klar. Es wird z. B. die Endlichkeit des Geschlechts (s. Nexus Nr. 5) vorausgesetzt, ferner folgende Annahme über die stetige Deformierbarkeit gemacht: „Deux surfaces S, S' sont applicables l'une sur l'autre, si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quiconques contigues de S correspondent des éléments contigues de S'.“ Naturgemäß werden nachher beim Beweis auch

Sei α_2 resp. α_2' die Anzahl der (Elementar-)Flächenstücke, aus denen M_2 resp. M_2' zusammengesetzt sind, α_1 resp. α_1' die Anzahlen der auf ihnen liegenden Strecken, α_0 resp. α_0' die Anzahlen der auf ihnen liegenden Punkte. Dann sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus von M_2 und M_2':

A.
1) M_2 und M_2' haben gleich viel Randkurven,
2) M_2 und M_2' sind entweder beide einseitig oder beide zweiseitig,
3) $$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_0' + \alpha_1' - \alpha_2'.$$

Daß 1), 2) und 3) *notwendige* Bedingungen sind, ist sofort einzusehen. Für 1) ist das selbstverständlich, für 2) folgt es aus Grundlagen Nr. 5, endlich, da durch die beiden Fundamentaltransformationen des Homöomorphismus sich α_0 und α_1 resp. α_1 und α_2 gleichzeitig um eine Einheit vermehren, so ergibt sich auch 3) als notwendig. Es ist ferner auch keine von den Bedingungen in den beiden anderen enthalten, d. i. man kann zwei einander nicht homöomorphe Flächen konstruieren, die zwei der Bedingungen, aber nicht die dritte befriedigen. Im speziellen folgt aus 3), daß für alle der Kugel homöomorphe Flächen $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + 2 = 0$ sein muß. Diese Formel heißt die *spezielle Eulersche Polyederformel*[92a]). Daß die drei Bedingungen A. hinreichende Bedingungen sind, ergibt sich durch Konstruktion einer Normalform für jede Fläche resp. einer Normalüberdeckung einer gegebenen Fläche mit Flächenstücken.

2. **Normalform**[93]). Wir machen die gegebene Fläche M_2 zunächst dadurch zu einer unberandeten Fläche M_2^0, daß wir Elementar-

stillschweigend Annahmen über die Entstehung solcher unendlich kleiner Teile gemacht. Charakteristisch für die anschauungsgemäße Beweisführung ist endlich, daß die Voraussetzung der Zweiseitigkeit gar nicht ausdrücklich gemacht wird, sondern nur in abgeleiteten Eigenschaften (s. p. 107 a. a. O.) zu Tage tritt.

Wesentlich in der vorliegenden Formulierung ist das Problem vor *Jordan* von *Möbius* für zweiseitige geschlossene Flächen in unbedingt ausreichender Strenge erledigt worden (Leipzig Ber. 15 (1863), p. 19 = Werke 2 (1886), p. 436 ff.), indem er von den als elementarverwandt (s. Anm. 15) nachzuweisenden Flächen voraussetzt, daß sie endliche Ausdehnung haben, stetig gekrümmt und ohne Doppellinien sind.

Der allgemeinste Fall des Problems wird von *Dyck* (Math. Ann. 32 (1888), p. 457) behandelt. Jedoch ist die Behandlung nicht als vollständig zu bezeichnen, weil die Überführbarkeit aller Flächen in gewisse Normalformen ohne Beweis angenommen wird. Gerade hierin liegt aber die Schwierigkeit (vgl. Anm. 93).

92a) Literatur s. Anm. 99.

93) Die erste Idee, auf die hier entwickelte Weise eine Normalform zu erhalten, findet sich bei *Listing,* Der Census räumlicher Komplexe, 1862, Nr. 13 =

flächenstücke hinzufügen, die von den Randkurven von M_1 begrenzt werden. Nach der Ausführung dieses Prozesses greifen wir irgend eines der konstituierenden Flächenstücke, etwa S_2^1, heraus, dessen Begrenzung b' sein möge. Gibt es ein Elementarflächenstück S_2^2, das mit b'' nur einen Streckenzug gemeinsam hat, so wollen wir auch dies herausgreifen. Die S_2^1 und S_2^2 nicht gemeinsamen Kanten bilden eine Berandung b''. Gibt es dann ein Elementarflächenstück S_2^3, das mit b_2'' einen und nur einen Streckenzug gemeinsam hat, so vereinigen wir dieses wieder mit S_2^1 und S_2^2. Diejenigen Kanten dieser drei Flächen, die je nur einer von ihnen angehören, bilden eine Berandung b'''. So fahren wir fort, bis wir zu einer Gesamtheit von Elementarflächenstücken $S_2^1, S_2^2, \ldots, S_2^m$ gelangen, die zusammen ein Elementarflächenstück $P_2^{(m)}$ mit der Berandung $b^{(m)}$ bilden, von der Art, daß jedes andere der konstituierenden Polygone (Flächenstücke) mit $b^{(m)}$ entweder mindestens zwei getrennte Streckenzüge oder keinen Streckenzug gemeinsam hat. Den zweiten Fall können wir ausschließen durch eine geeignete Abänderung der gegebenen Überdeckung (interne Transformation) („Kanal“ von $b^{(m)}$ zu dem betreffenden Polygon; Fig. 4). Durch eine weitere ähnliche Abänderung der Überdeckung können wir erreichen, daß jeder Eckpunkt irgend eines der nicht zu $P^{(m)}$ gehörenden Polygone auf $b^{(m)}$ liegt (Fig. 5). Endlich durch eine dritte Abänderung kann bewirkt werden, daß in jedem Eckpunkt höchstens zwei Polygone (Fig. 6) zusammenstoßen. Durch diese Abänderungen sei $P_2^{(m)}$ in P_2^0 (die „Punktierungsfläche“) übergegangen, $b^{(m)}$ in b^0. Die nicht zu P_2^0 gehörenden Polygone bilden eine Fläche R_2^0 („Restfläche“). Wir nehmen eines dieser Polygone, etwa F_2' heraus, bezeichnen ein mit diesem zusammenhängendes zweites Polygon mit F_2'', ein mit F_2''

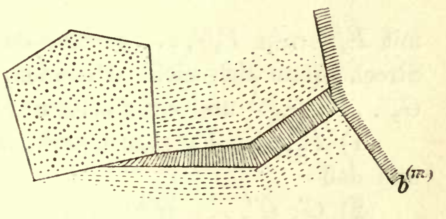


Fig. 4.

Gött. Abh. 10 (1862). Sie ist von *Betti* insbesondere auch auf Mannigfaltigkeiten von höherer Dimension angewandt (Ann. di mat. (2) 4 (1871), p. 146 ff.), und später von *Petersen* für zweiseitige Flächen weiter ausgebildet worden (Forelæsninger over Funktionstheori, Kopenhagen, (1895), p. 83 = Vorlesungen über Funktionentheorie, Kopenhagen, (1898), p. 76). Im Nachlaß von *Möbius* (Werke 2, Nachlaß I (§ 9)) findet sich bereits diese Konstruktion der Normalform auseinandergesetzt. Da, wie aus einer Anmerkung an der betreffenden Stelle hervorgeht, *Gauß* sich mit der Normalform im speziellen Falle der Ringfläche beschäftigt hat, so ist es nicht unwahrscheinlich, daß die Idee der Konstruktion überhaupt ursprünglich von Gauß herstammt.

zusammenhängendes mit F_2''' usw., bis wir zu einem Polygon $F_2^{(m_1)}$ kommen, das außer mit $F_2^{(m_1-1)}$ auch noch mit anderen der vorangehenden Polygone Strecken gemeinsam hat, etwa mit $F_2^{(l_1)}, F_2^{(l_2)}, \ldots, F_2^{(l_{n_1})}$. Wir verbinden dann die zwei Kanten von $F_2^{(m_1)}$, die zu b^0 gehören, und die von der mit $F_2^{(l_1)}$ gemeinsamen Kante ausgehen, mit einem Streckenzug, der in $F_2^{(m_1)}$ verläuft, und schneiden so von $F_1^{(m_1)}$ das Polygon G_2' ab. Entsprechende Streckenzüge ziehen wir zwischen den Kanten von $F_2^{(m_1)}$, die von denjenigen Kanten ausgehen, die $F_2^{(m_1)}$

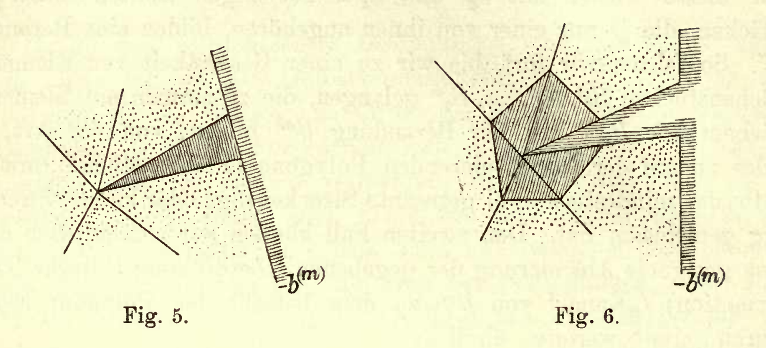


Fig. 5. Fig. 6.

mit $F_2^{(l_2)}$ resp. $F_2^{(l_3)}, \ldots$ gemeinsam hat. Sorgen wir dafür, daß diese Streckenzüge sich nicht schneiden, so erhalten wir weitere Polygone $G_2'', \ldots, G_2^{(n_1)}$ und ein Polygon $\overline{F}_2^{(m_1)}$ von der Art, daß

1) $F_2', \ldots, \overline{F}_2^{(m_1)}$ zusammen ein Elementarflächenstück Z_2' bilden, und daß

2) $G', G'', \ldots, G^{(n_1)}$ Elementarflächenstücke sind, von denen jedes vollständig berandet wird von zwei Streckenzügen, die es mit b^0 gemeinsam hat und zwei Streckenzügen, die es mit Z_2' gemeinsam hat.

Wir nehmen jetzt ein Polygon $F_2^{(m_1+1)}$, das mit Z_2' eine Strecke gemeinsam hat, dann ein Polygon, das mit $F_2^{(m_1+1)}$ zusammenhängt usw. Wir gelangen wieder zu einer Fläche $F_2^{(m_2)}$, die außer mit $F_2^{(m_2-1)}$ auch noch mit anderen der vorangehenden Polygone (inkl. der Polygone von Z'), etwa $F_2^{(l_{n_1+1})}, \ldots, F_2^{(l_{n_2})}$ zusammenhängt. Wir teilen sie dem Obigen entsprechend in $n_2 + 1$ Teile:

$$G_2^{(n_1+1)},\ G_2^{(n_1+2)},\ \ldots,\ G_2^{(n_1+n_2)} \text{ und } \overline{F}_2^{m_2}.$$

So fahren wir fort, bis an keiner Fläche eine Fläche angrenzt, die nicht schon im Konstruktionsmodus vorkommt. Alle Kanten dieser Flächen (jede Fläche hat mindestens zwei solche Kanten), an denen keine andere Fläche angrenzt, gehören folglich zu b^0. Da aber jede Fläche von geschlossenen Kurven berandet wird, und b^0 selbst eine geschlossene Kurve ist, so ist die Gesamtheit dieser Kanten mit b^0

identisch. Da aber jedes zu R_2^0 gehörende Polygon mit b^0 Kanten gemeinsam hat und jede dieser Kanten nur zu einer Fläche gehört, so kommen in unserem Konstruktionsmodus alle R_2^0 bedeckenden Flächen vor. Unsere Restfläche R_2^0 ist dann in folgende Teile zerlegt:

1) das Elementarflächenstück („*Zentralpolygon*“) Z_2, das aus den Flächen F_2', F_2'', ..., $\overline{F_2^{m_1}}$, $F_2^{(m_1+1)}$, ..., $\overline{F_2^{m_2}}$, ... besteht;

2) die k Elementarflächenstücke („*Bänder*“) G_2', G_2'', ..., $G_2^{(n_2)}$, $G_2^{(n_1+1)}$, ..., $G^{(k)}$, von denen jedes vollständig berandet wird von zwei Streckenzügen, die es mit b^0 gemeinsam hat, und zwei Streckenzügen, die es mit Z_2 gemeinsam hat. Für die Anzahl der Bänder und ihre gegenseitige Lage gilt folgendes:

α) *Zweiseitige Flächen* (siehe über Definition von Ein- resp. Zweiseitigkeit, Grundlagen Nr. 2). Sei $q_i r_i s_i t_i$ ein Band, G_2^i, das mit Z_2 die Streckenzüge $q_i t_i$ und $r_i s_i$, mit b^0 die Streckenzüge $q_i r_i$ und $s_i t_i$ gemeinsam hat. Aus der Voraussetzung der Zweiseitigkeit folgt, daß q und r durch t und s auf der Berandung von Z_2 nicht getrennt werden, d. i. daß G_2^i ein „ungedrehtes“ Band ist. Da aber b^0 *eine* geschlossene Kurve ist, so schließen wir, daß es mindestens ein Band $\overline{q}_i \overline{r}_i \overline{s}_i \overline{t}_i (G_2^{\overline{i}})$

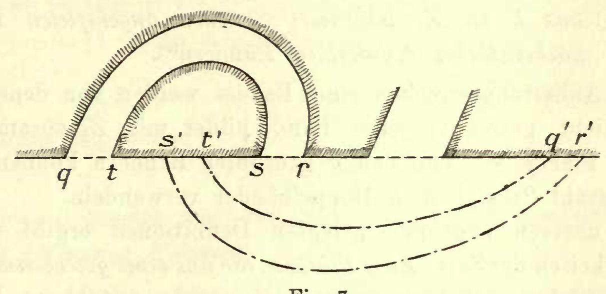


Fig. 7.

geben muß, dessen mit Z_2 gemeinsamen Streckenzüge $\overline{q}_i \overline{t}_i$ und $\overline{s}_i \overline{r}_i$ durch qt und sr auf der Berandung von Z_2 getrennt werden. Durch eine einfache Abänderung („Überschiebung“, siehe beispielsweise Fig. 7) der Überdeckung von R_2^0 können wir es erreichen, daß jedes weitere Band G_2^h mit Z_2 zwei Streckenzüge gemeinsam hat, die alle innerhalb *eines* der vier Teile liegen, in die die Berandung von Z_2 durch die Strecken $q_i t_i$, $\overline{q}_i \overline{t}_i$, $s_i r_i$, $\overline{s}_i \overline{r}_i$ geteilt wird. Wir können dann wieder das obige Verfahren anwenden, um ein zweites Paar von Bändern zu bestimmen, bei denen die Paare der mit Z_2 gemeinsamen Strecken sich gegenseitig trennen. Fahren wir so fort, so erhalten wir das Resultat:

Jede geschlossene zweiseitige Fläche M_2^0 kann überdeckt werden mit:

1) *einem Elementarflächenstück („Punktierungsfläche“) P_2^0;*

2) *einer „Restfläche“ R_2^0, die besteht*

a) *aus einem Elementarflächenstück („Zentralfläche“) Z_2,*

b) *aus p Paaren von Elementarflächenstücken („Bändern“).*

Jedes Band ist ungedreht und hat mit der Berandung von Z_2 zwei „Anheftungsstrecken“ gemeinsam, die voneinander getrennt sind durch die zwei Anheftungsstrecken desjenigen Bandes, das mit dem ersten zusammen ein Paar bildet. Die Anheftungsstrecken eines Paares von Bändern werden durch diejenigen anderer Paare nicht getrennt. — Andererseits ist auch jede solche Fläche zweiseitig.

β) *Einseitige Flächen.* Außer Paaren von ungedrehten Bändern, deren Anheftungslinien sich trennen, gibt es nur noch einzelne „gedrehte“ Bänder und zwar mindestens ein solches. Durch eine Reihe von passenden „Überschiebungen“ erhält man statt jedes Doppelbandes zwei gedrehte Bänder. Wir erhalten so das Resultat:

Jede geschlossene einseitige Fläche M_2^0 kann überdeckt werden mit

1) *einer Punktierungsfläche P_2^0;*

2) *einer Restfläche R_2^0, die besteht*

a) *aus einer Elementarfläche Z_2,*

b) *aus k an Z_2 mit zwei Strecken angehefteten Elementarflächenstücken („gedrehten Bändern“).*

Die zwei Anheftungsstrecken eines Bandes werden von denen anderer Bänder nicht getrennt; jedes Band bildet mit Z_2 zusammen eine einseitige Fläche. — Von den k gedrehten Bändern können wir eine gerade Anzahl $2n < k$ in n Doppelbänder verwandeln.

Aus unseren zugrunde gelegten Definitionen ergibt sich ohne Schwierigkeiten der Satz: *Zwei Flächen, die aus einer geschlossenen Fläche dadurch entstehen, daß man zweimal die gleiche Anzahl von Elementarflächenstücken, die keine Punkte miteinander gemein haben, wegläßt, sind miteinander homöomorph.*

Unter Beachtung dieses Satzes gehen wir von M_2^0 wieder zu M_2 zurück und erhalten den Satz:

Eine zweiseitige Fläche mit r Randkurven ($r > 0$) kann bedeckt werden mit

a) *einem Elementarflächenstück Z_2,*

b) *p an Z_2 angehefteten „Doppelbändern“, $D_2', \ldots, D_2^{(p)}$,*

c) *$r - 1$ einfachen Bändern, $B_2', \ldots, B_2^{(r-1)}$.*

Die Anheftungsstrecken eines dieser Bänder werden von den Anheftungsstrecken der anderen Bänder nicht getrennt.

Eine einseitige Fläche mit r Randkurven ($r > 0$) kann überdeckt werden mit

a) *einem Elementarflächenstück* Z_2,

b) k *an* Z_2 *angehefteten, gedrehten Bändern,* $H_2', \ldots, H_2^{(k)}$,

c) $r-1$ *einfachen Bändern,* $B_2', B_2'', \ldots, B_2^{(r-1)}$.

(Entsprechende Bemerkung über die Trennung der Anheftungsstrecken und Verwandlung der gedrehten Bänder in Doppelbänder wie oben.)

Eine solche Überdeckung, wie sie in dem obigen Satze angegeben ist, soll eine *Normalüberdeckung* heißen, oder auch: die Fläche M_2, in dieser Form dargestellt, soll *Normalform* von M_2 genannt werden. Bei einseitigen Flächen wollen wir von *Normalüberdeckung erster Art* resp. *Normalform erster Art* reden, wenn keine Doppelbänder vorhanden sind, und von *Normalüberdeckung* resp. *Normalform zweiter Art,* wenn höchstens zwei gedrehte Bänder vorhanden sind.

3. Lösung des Hauptproblems. Die Zahl $-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2$ bezeichnen wir als Charakteristik $K(M_2)$[97]) der Fläche M_2. Sie ist leicht zu bestimmen, wenn M_2 selbst, resp. wenn sie geschlossen ist, ihre Restfläche R_2 in der Normalform vorliegt:

α) *Zweiseitige Flächen:*

$$K(M_2) = -[8p+4(r-1)] + [8p+4(r-1)-4p+2(r-1)] \\ -[1+2p+r-1]$$

resp.:

$$K(R_2) = -[8p] + [8p+4p] - [1+2p]$$

und daraus allgemein:

$$K(M_2) = 2p+r-2, \tag{2}$$

wenn $r=0$ gesetzt wird für den Fall, daß M_2 geschlossen ist.

β) *Einseitige Flächen:*

$$K(M_2) = -[4k+4(r-1)] + [4k+4(r-1)+2k+2(r-1)] \\ -[1+k+r-1]$$

resp.:

$$K(R_2) = [-4k] + [4k+2k] - [1+k]$$

---

97) *Dyck,* Math. Ann. 32 (1888), p. 457, wo $-K$ mit K^{II} bezeichnet wird. Statt dieser Charakteristik führt *Riemann* (Diss. Nr. 6 = Werke, 2. Aufl., p. 11) für ungeschlossene, zweiseitige Flächen die *„Zusammenhangszahl“* $Z = 2p+r = 2+K$ ein, die gleich der um 1 vermehrten Anzahl von Querschnitten ist, die notwendig sind, um die Fläche in ein E_2 zu verwandeln (s. p. 5); für eine geschlossene M_2 setzt *Riemann* $Z(M_2) = Z(R_2)$, also $= 2p+1 = 3+K$; *Schläfli* [J. f. Math. 76 (1873), p. 152 Anm.; siehe auch *F. Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 579 und 7 (1874), p. 550 Anm.; aut. Vorles. über Riem. Fl., Gött. [p. 11] setzt dagegen für geschlossene Flächen die *„ungewöhnliche“* Zusammenhangszahl $= Z(R_2)-1$, die so definierte Zusammenhangszahl ist also für geschlossene sowie ungeschlossene Flächen $= 2+K$.

und daraus allgemein:

$$(2) \qquad K(M_2) = k + r - 2.$$

Hat also für zwei Flächen K denselben Wert, sind ferner beide einseitig oder zweiseitig und haben sie dieselbe Anzahl von Randkurven, so sind sie selbst in der Normalform resp., ihre Restflächen in der Normalform identisch. Denn, wie wir aus den obigen Formeln sehen, muß dann die Anzahl der Doppelbänder resp. die Anzahl der gedrehten Bänder die gleiche sein. Damit haben wir nachgewiesen daß die Bedingungen A (S. 190) auch hinreichend sind.

4. Anwendungen der Normalform.

a) *Beweis des Neumannschen Axioms*[94]): Jede Fläche mit mindestens einer Randkurve läßt sich durch eine Anzahl von Querschnitten in ein Elementarflächenstück verwandeln. Der Beweis geschieht so, daß man alle Bänder in der Normalform in zwei Polygone mit je einer Anheftungsstrecke an Z_2 zerlegt, und die Verbindung dieser zwei Polygone miteinander aufhebt.

b) *Möbiussche Grundform für eine* M_2. Nehmen wir wieder an, daß M_2 keine geschlossene Fläche ist, dann zerschneiden wir ebenso wie in a), wenn die Fläche zweiseitig ist, je eines von den ein Doppelband bildenden Bändern, wenn die Fläche einseitig ist, jedes der gedrehten Bänder. Die Fläche wird dann homöomorph mit einem $(p + r - 1)$fach bzw. $(r - 1)$fach punktierten Elementarflächenstück, der „*Grundform*“ von M_2.[95]) Ist M_2 einseitig, so können wir von den k gedrehten Bändern $2h$ $(<k)$ Bänder zu Doppelbändern machen und dann durch Zerschneidung der $k - 2h$ gedrehten Bänder und je eines von den zu Paaren angeordneten $2h$ Bändern ein $(h + r - 1)$-fach punktiertes Elementarflächenstück erhalten.

c) *Minimalzahl von bedeckenden Elementarflächenstücken.* Mit Hilfe der Normalüberdeckung folgt leicht der Satz (s. Fig. 8):

---

94) *C. Neumann,* Vorlesungen über die *Riemann*sche Theorie, 2. Aufl., Leipzig (1884), p. 151; *J. Petersen* gibt (a. a. O. p. 72) einen auf die Anschauung basierten Beweis mit Hilfe der Punktierungsflächen. Jedoch ist das Axiom naturgemäß unbeweisbar, wenn man nicht irgend welche Eigenschaften der M_2 axiomatisch festlegt, die unserer Voraussetzung der Überdeckbarkeit mit einer endlichen Anzahl von Elementarflächen entspricht.

95[a]) Da man jede zweiseitige Fläche in zwei Grundformen zerlegen kann, aber jede Grundform, wie leicht zu sehen, aus 2 Flächenstücken zusammensetzbar ist, so findet man sofort (*Möbius*, Werke, Bd. 1, Nachl. I, § 1a), daß jede geschlossene *einseitige* Fläche aus *vier* Elementarflächenstücken zusammensetzbar ist.

Jede geschlossene Fläche kann stets mit drei Elementarflächenstücken bedeckt werden. Jede nicht geschlossene Fläche und jede Kugelfläche kann mit zwei Elementarflächen bedeckt werden[95a]).

d) *Normalformen für geschlossene Flächen*[96]).

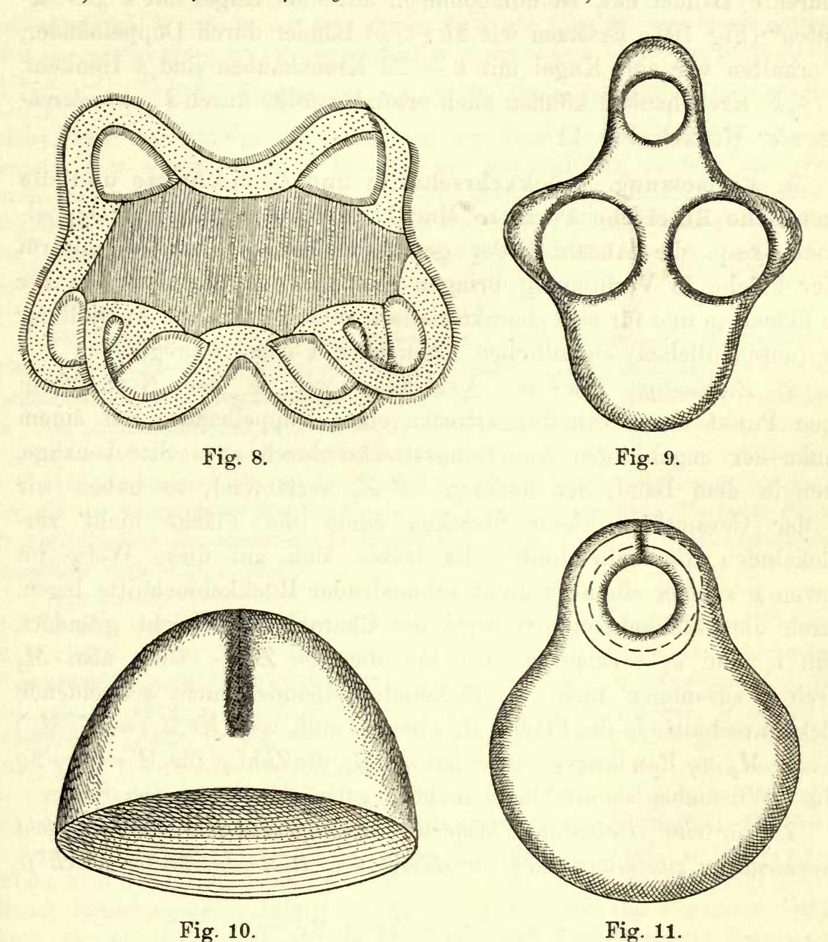


Fig. 8. Fig. 9.

Fig. 10. Fig. 11.

α) *Zweiseitige Flächen.* Eine Fläche, deren Restfläche p Doppelbänder hat, ist homöomorph mit einer Kugel mit p „*Henkeln*" (Fig. 9);

95) *Möbius,* Leipzig Ber. 15 (1863) = Werke 2, p. 450.

96) Diese Formen für geschlossene Flächen sind, soweit zweiseitige Flächen in Betracht kommen, als betrachtet worden von *Riemann* (cf. *Klein*, Über Riemanns Theorie . . . (1882), p. IV), *Möbius*, a. a. O. § 16, *Tonelli* (Rom Linc. Atti (2) 2 (1875), p. 594, vgl. Rom Linc. Rend. (5) 4^1 (1895), p 300; *W. K. Clifford* London Proc. Math. Soc. 8 (1877), p. 292). Normalformen für einseitige Flächen sind von *Dyck* a. a. O. aufgestellt.

denn ein Elementarflächenstück mit einem angehefteten Doppelband ist homöomorph mit einer punktierten Ringfläche.

β) *Einseitige Flächen.* Jede einseitige Fläche, deren Restfläche k (gedrehte) Bänder hat, ist homöomorph mit einer Kugel mit k *„Kreuzhauben“* (Fig. 10). Ersetzen wir $2h$ ($< k$) Bänder durch Doppelbänder, so erhalten wir eine Kugel mit $k - 2h$ Kreuzhauben und h Henkeln. $2l$ ($\leqq k$) Kreuzhauben können auch ersetzt werden durch l *„sich durchsetzende“* Henkel (Fig. 11).

5. Fortsetzung. Rückkehrschnitte und Querschnitte und die eigentliche Eulersche Formel. Man kann die Anzahl p der Doppelbänder resp. die Anzahl k der gedrehten Bänder der Normalform einer Fläche in Verbindung bringen mit anderen Anzahlen, die für die Fläche an und für sich charakteristisch sind und uns die Aufstellung der (anschaulichen) eigentlichen Eulerschen Formel ermöglichen.

a) *Zweiseitige Flächen.* Verbinden wir in der Normalform einen Punkt einer Anheftungsstrecke eines Doppelbandes mit einem Punkt der zugehörigen Anheftungsstrecke durch zwei Streckenzüge, einen in dem Band, den anderen in Z_2 verlaufend, so haben wir in der Gesamtheit dieser Strecken einen die Fläche nicht zerstückelnden Rückkehrschnitt. Es lassen sich auf diese Weise im ganzen p solcher einander nicht schneidender Rückkehrschnitte legen. Durch die Rückkehrschnitte wird die Charakteristik nicht geändert, denn α_0 und α_1 vermehren sich um dieselbe Zahl. Geht also M_2 durch q zusammen nicht zerstückelnde, einander nicht schneidende Rückkehrschnitte in die Fläche M_2' über, so muß, weil $K(M_2) = K(M_2')$ ist und M_2' $2q$ Randkurven mehr hat als M_2, die Zahl p' für $M' = p - 2q$ sein. Wir haben damit, da p' nicht negativ sein kann, den Satz:

Ist für eine zweiseitige Fläche die Maximalzahl der einander nicht schneidenden, zusammen nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte gleich p, so ist:

$$- \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 2p + 2r - 2,$$

wo r die Anzahl der Randkurven bedeutet.

Das ist die **eigentliche**[98]) **Eulersche Polyederformel**[99]).

98) Aus folgendem Grunde haben wir hier den Namen „eigentliche“ Eul. F. vorgeschlagen: In der im *Complexus* abgeleiteten entsprechenden Formel hängt K ab von $P_1 - 1$, d. i. der Maximalzahl der zusammen nicht begrenzenden Kreise auf der M_2. $P_1 - 1$ hat aber, wenn es > 0 ist, eine der Anschauung durchaus nicht so unmittelbar zugängliche Bedeutung wie p als Maximalzahl der zusammen nicht zerstückelnden, sich nicht schneidenden, doppelpunktlosen Kreise. Es läßt sich zwar unschwer für eine Mannigfaltigkeit *im engeren Sinne* nachweisen 1) daß eine einzelne nicht begrenzende Kurve auch eine nicht zer-

Und ferner:

Wenn irgend $p - m$ ($m \leqq p$) zusammen nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte, die sich nicht schneiden, vorliegen, kann man stets (mit

---

stückelnde ist, 2) daß $P_1 - 1$ eine gerade Zahl ist. Aber für eine Mannigfaltigkeit *im engeren Sinne* ist im allgemeinen p in der obigen Bedeutung *nicht* gleich $\frac{2 + K - r}{2} = \frac{P_1 - 1}{2}$. Sondern das gilt nur für Mannigfaltigkeiten im weiteren Sinne, kann also nur im *Nexus* und zwar mit Hilfe der Normalform abgeleitet werden. Die eigentliche E. F. ist nicht nur anschaulicher, sondern auch viel tiefliegender als die complektische, die wir im *complexus* im Anschluß an *Poincaré* abgeleitet haben. Dementsprechend kann die letztere Formel unschwer für M_n verallgemeinert werden, während das für die „nektische" Formel noch nicht gelungen ist, weil es eben eine Normalformdarstellung der M_n für $n > 2$ bis jetzt nicht gibt.

99) Über die Geschichte des *Euler*schen Polyedersatzes gibt *M. Brückner,* Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900, eine ausführliche Übersicht, die wir im folgenden für die Literaturangaben benutzen. Der Satz selbst ist zunächst in zwei Abteilungen zu gliedern: 1) Gleichheit der alternierenden Summe $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ für zwei homöomorphe Polyeder ($\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n$ für M_n, s. S. 185), woraus unmittelbar die *gewöhnliche Euler*sche Formel $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ für die der Kugel homöomorphen (also z. B. für die konvexen) Polyeder folgt. 2) Abhängigkeit der alternierenden Summe vom Geschlecht p, (verallgemeinerte *eigentliche Euler*sche Formel).

Gewöhnliche Eulersche Formel. Rein topologische Beweise: Euler, s. Anm. 7; *S. L'Huilier,* Gergonne Annales 3 (1812—13), p. 169; *C. Seidelin,* Tychsen Tidskr. (2) 6 (1870), p. 22; *E. de Jonquières,* Paris C. R. 60 (1890), p. 110; *Kirkman,* Manchester Memoirs (2) 12 (1835), p. 47; *A. Cauchy,* Rech. sur les polyèdres, J. éc. pol. cah. 16 (1813), p. 76; *J. A. Grunert,* J. f. Math. 2, 1827, p. 367; *H. Thieme, Baltzer* El. 2 (1883), Leipzig, p. 213; *Ch. v. Staudt,* Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, § 4. Die Beweise in den Lehrbüchern sind oft unstreng, weil von dem notwendig vorauszusetzenden Homöomorphismus mit der Kugel (Konvexität) nicht der nötige Gebrauch gemacht ist. *Benutzung metrischer Hilfsmittel: Descartes* s. Anm. 6. *L'Huilier* a. a. O.; *J. Steiner,* J. f. Math. 1, 1826, p. 364 = Ges. Werke 1, p. 97; *A. M. Legendre,* Él. d. géom. 7. éd. Paris, (1808), p. 228; *Meier Hirsch,* Sammlung geom. Aufg. 2 (Berlin 1807), p. 93; *Dehn* (für 3, 4 und 5 Dim.), Math. Ann. 61, 1906, p. 561, wo man auch etwas über die topologische Bedeutung der benutzten Beweismittel findet.

Verallgemeinerte eigentliche *Euler*sche *Formel: L'Huilier,* a. a. O., nur für besondere Formen der Flächen (Höhlungen, Durchbohrungen); ebenso *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. 63 (1879), p. 100; *Listing,* Zensus der räuml. Kompl.; vgl. ferner *Cauchy,* a. a. O.; *K. Becker,* Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 65, 337, 18 (1873), p. 328, 19 (1874), p. 459. Der Satz in der im Text vorliegenden Form ist für zweiseitige Flächen von *Möbius* 1863, Ges. Werke 2, p. 433 ff. abgeleitet worden, indem er die Fläche durch parallele Schnitte in Grundformen zerlegt; vgl. auch *Jordan*, J. f. Math. 66 (1866), p. 86; *C. Crone*, Tiddskr. Math. (5) 3, (1885), p. 44—47; *F. Röllner,* Zeitschr. f. Realschulw. 5^3 (1880), p. 133; im übrigen vgl. Anm. 92.

Hilfe der Normalformdarstellung) noch m weitere nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte angeben, die einander und die ersteren nicht schneiden.

p wird als *Geschlecht* von M_2 bezeichnet[99a]):

Wir verstehen unter einem *Querschnitt* einen Streckenzug, der zwei Randpunkte auf M_2 verbindet. Da die Anzahl der inneren Eckpunkte eines ungeschlossenen Streckenzuges um 1 kleiner ist als die Anzahl seiner Kanten, so wird durch einen Querschnitt $K(M_2)$ um 1 größer. *Querschnitte erster Art* verbinden zwei Punkte derselben Randkurve, r wird um 1 größer, es muß also, damit K um 1 größer wird, p um 1 kleiner werden, wenn der Querschnitt nicht zerstückelt; d. i. eines der Doppelbänder verschwindet. p ist demnach gleich der Maximalzahl der zusammen nicht zerstückelnden Querschnitte erster Art. *Querschnitte zweiter Art* verbinden zwei Punkte von zwei verschiedenen Randkurven. r wird um 1 kleiner, es bleibt also p unverändert, wenn der Querschnitt nicht zerstückelt. Durch p Querschnitte erster Art und $p+r-1$ Querschnitte zweiter Art wird M_2 resp. R_2 in ein Elementarflächenstück verwandelt. Sind irgendwie $p-m$ $(m \leqq p)$ Querschnitte erster Art und $p+r-1-n$ $(m \leqq n \leqq p+r-1)$ Querschnitte zweiter Art vorgelegt, so kann man stets (mit Hilfe der Normalform) m und nicht mehr weitere Querschnitte erster Art und n und nicht mehr weitere Querschnitte zweiter Art angeben, die zusammen die Fläche nicht zerstückeln.

b) *Einseitige Flächen.*

α) Die erste Normalform hat $k = 2\varkappa + 1$ gedrehte Bänder. Es gibt *drei verschiedene Arten von Rückkehrschnitten.*

1) Man kann $2\varkappa$ *einander nicht schneidende, und zusammen nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte* mit je *einem* Rande finden, die die Fläche *einseitig* lassen. Wir erhalten solche Kurven, wenn wir in der gewöhnlichen Normalform, in der neben „einfachen" Randbändern nur gedrehte Bänder auftreten, je einen Punkt einer Anheftungsstrecke eines gedrehten Bandes mit einem Punkt der zugehörigen Anheftungsstrecke durch zwei Streckenzüge verbinden, einen in dem Band den anderen in Z_2 verlaufend. Durch einen Rückkehrschnitt dieser Art wird die Charakteristik K nicht geändert. Daraus folgt wieder: Ziehen wir irgend wie $2\varkappa - m$ sich nicht schneidender, zusammen nicht zerstückelnder, einseitig lassender, einrandiger Rückkehrschnitte auf der Fläche M_2, so ist die entstehende Fläche homöomorph

99a) Der Begriff des Geschlechts als der Maximalzahl der nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte ist von *Riemann* eingeführt und als Grundlage der Theorie des Zusammenhangs von zweiseitigen Flächen benutzt (J. f. Math. 54 (1857), p. 105 = Werke (2. Aufl.), p. 92).

mit jeder Fläche, die aus M_2 durch Ziehen irgend welcher anderer $2\varkappa - m$ solcher Rückkehrschnitte entsteht, und wir können noch weitere $m - 1$ (und nicht mehr) solche Rückkehrschnitte finden. $2\varkappa$ ist aber die Maximalzahl dieser Rückkehrschnitte erster Art, weil ein weiterer die M_2 in eine (nach Voraussetzung einseitige) Fläche mit k' gedrehten Bändern verwandeln würde, aus der Invarianz der Charakteristik und daraus, daß wir jetzt notwendig k Randkurven haben würden, aber $k' = 0$ folgen würde.

2) Man kann einen *einrandigen, nicht zerstückelnden Rückkehrschnitt* finden, der die Fläche zu einer *zweiseitigen* macht. Man erhält einen solchen, wenn man die Fläche (resp. die Restfläche) in der zweiten Normalform annimmt, und das einzige gedrehte Band ebenso wie in 1) zerschneidet. Die Charakteristik wird wiederum nicht verändert: Zwei Flächen, die aus M_2 durch zwei verschiedene Rückkehrschnitte dieser Art entstehen, sind homöomorph, denn alle Bedingungen A sind erfüllt.

3) Es gibt $\varkappa$ *und nicht mehr einander nicht schneidende, zweirandige, zusammen nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte, die M_2 einseitig lassen.* Wir finden sie am einfachsten wieder in der Normalform mit $\varkappa$ Doppelbändern. Es folgt ebenso wie oben: 2 Flächen, die aus M_2 durch je $\varkappa - m$ Rückkehrschnitte dritter Art entstehen, sind homöomorph und $\varkappa$ ist die Maximalzahl solcher Kurven.

Weiter gibt es keine nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte. Denn der einzig übrige Fall wäre ein zweirandiger, zweiseitig machender Rückkehrschnitt. Ein solcher verändert die Charakteristik K nicht. Es ist aber vor dem Ausführen des Schnittes

$$K - r = k - 2$$

und nachher

$$K - r = 2p + 2.$$

Da aber die Zahl auf der rechten Seite das erste Mal ungerade, das zweite Mal gerade ist, so ist dieser Fall unmöglich.

β) Die Normalform hat $k = 2\varkappa$ gedrehte Bänder.

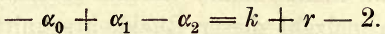
Es gibt wieder drei und nur drei verschiedene Arten von Rückkehrschnitten, von denen ganz analoges gilt, wie bei α):

1) $2\varkappa - 1$ einrandige, einseitig lassende Rückkehrschnitte;

2) einen zweirandigen, zweiseitig machenden Rückkehrschnitt. (Wir finden ihn durch gleichzeitige Zerschneidung zweier gedrehter Bänder, wenn die übrigen Bänder alle zu Doppelbändern zusammengeordnet sind.)

Wir können jetzt die *eigentliche Eulersche Formel für einseitige Flächen* in folgender Form aufstellen:

Ist für eine einseitige Fläche die Maximalzahl der einander nicht schneidenden zusammen nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte gleich k, so ist:



$$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = k + r - 2.$$

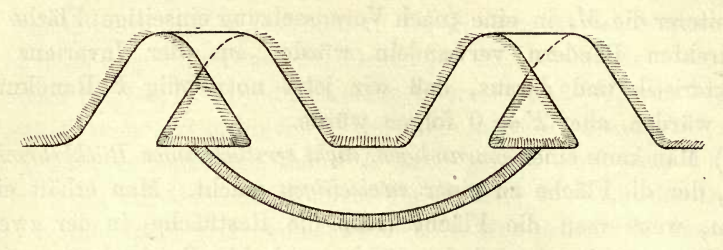


Fig. 12.

3) $2k - 2$ zweirandige, einseitig lassende Rückkehrschnitte.

Auf einseitigen Flächen kann es *vier verschiedene Arten von Querschnitten* geben (s. die Figuren. In den Fig. 12—14 ist die erste

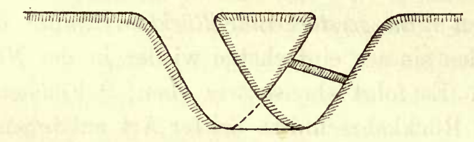


Fig. 13.

Normalform als vorliegend vorausgesetzt, in den Fig. 15 und 16 die zweite Normalform.)

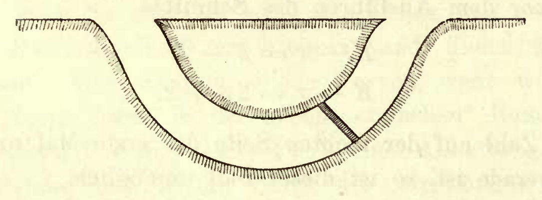


Fig. 14.

1) r (die Anzahl von Randkurven) wird durch den Querschnitt um 1 größer, k um 2 kleiner.

2) r unverändert, k wird um 1 kleiner.

3) r wird um 1 kleiner, k bleibt unverändert.

In den Fällen 1), 2), 3) bleibt die Fläche einseitig.

4α) Flächen, bei denen k ungerade ist. r bleibt unverändert. Die Fläche wird eine zweiseitige Fläche mit dem Geschlecht $p = \frac{1}{2}(k - 1)$.

4β) Flächen, bei denen k gerade ist: r wird um 1 größer. Die Fläche wird eine zweiseitige Fläche vom Geschlecht $p = \frac{1}{2}(k-2)$.

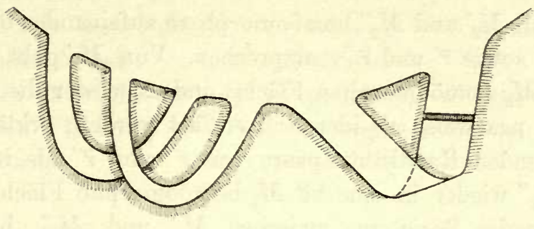


Fig. 15.

6. Zusammensetzung von Flächen. Vereinigen wir zwei Flächen M_2' und M_2'' zu einer Fläche M_2, indem wir eine Randkurve von

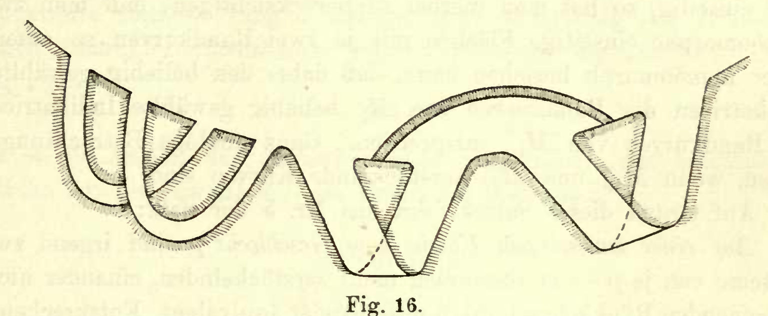


Fig. 16.

M_2' zusammenfallen lassen mit einer Randkurve von M_2'', so ist, weil ein Rückkehrschnitt den Ausdruck K nicht ändert:

$$K(M_2) = K(M_2') + K(M_2'').$$

Hieraus folgt der Satz:

Zwei Flächen, die entweder beide einseitig oder beide zweiseitig sind, und aus je zwei resp. homöomorphen Flächen durch Verschmelzung von je einer Randkurve der Teile entstanden sind, sind einander homöomorph.

7. Äquivalenz von Kurven auf Flächen. Zwei beliebige Systeme von m Randkurven auf einer M_2 sind stets einander äquivalent (Grundlagen Nr. 3). Das folgt daraus, daß man in der Normalüberdeckung von M_2 die Reihenfolge der Randbänder auf der Berandung der Zentralfläche beliebig vertauschen und eine beliebige Randkurve als Berandung der Punktierungsfläche wählen kann. Zwei Rückkehrschnitte, $M_{2,1}'$ und $M_{2,1}''$, auf M_2 sind äquivalent, wenn die durch Zerschneiden von M_2 längs $M_{2,1}'$ und $M_{2,1}''$ entstehenden Flächen resp. Flächenpaare einander homöomorph sind. Denn seien z. B. die Rückkehrschnitte nicht zer-

stückelnd und zweirandig, so mögen durch die Schnitte längs $M'_{2,1}$ und $M''_{2,1}$ aus M_2 die homöomorphen Flächen M_2' und M_2'' mit den neuen Randkurven r' und $\bar{r}'$ bzw. r'' und $\bar{r}''$ entstehen. Nach dem Obigen kann man dann M_2' und M_2'' homöomorph so aufeinander beziehen, daß sich r' und r'' sowie $\bar{r}'$ und $\bar{r}''$ entsprechen. Von M_2' geht man zurück zu einer mit M_2 homöomorphen Fläche, indem wieder die Randkanten von r' und $\bar{r}'$ paarweise als identisch erklärt werden; erklärt man nun die entsprechenden Randkantenpaare von r'' und $\bar{r}''$ als identisch, so geht auch M_2'' wieder in eine zu M_2 homöomorphe Fläche über, und die homöomorphe Beziehung zwischen M_2' und M_2'', bei der sich die Kurvenpaare r', $\bar{r}'$ und r'', $\bar{r}''$ entsprechen, wird, wenn sie geeignet gewählt ist, übergehen in eine homöomorphe Beziehung von M_2 auf sich selbst, bei der sich $M'_{2,1}$ und $M''_{2,1}$ entsprechen. Sind M_2' und M_2'' einseitig, so hat man hierbei zu berücksichtigen, daß man zwei homöomorphe einseitige Flächen mit je zwei Randkurven so aufeinander homöomorph beziehen kann, daß dabei den beliebig gewählten Indikatricen der Randkurven von M_2' beliebig gewählte Indikatricen der Randkurven von M_2'' entsprechen. Ganz analoge Betrachtungen gelten, wenn $M'_{2,1}$ und $M''_{2,1}$ zerstückelnde Kurven sind.

Auf Grund dieses Satzes folgt aus Nr. 5 der Satz:

Auf einer zweiseitigen Fläche vom Geschlecht p sind irgend zwei Systeme von je $p - m$ zusammen nicht zerstückelnden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitten miteinander äquivalent. Entsprechende Sätze gelten auf einer einseitigen Fläche für Systeme von Rückkehrschnitten der verschiedenen Arten.

Ferner: Zwei geschlossene Kurven auf einer zweiseitigen M_2, die einen Punkt gemeinsam haben, sind äquivalent, denn sie sind beide nicht zerstückelnd.

Auf einer geschlossenen zweiseitigen Fläche vom Geschlecht $p > 0$ gibt es $2 + \left[\frac{p}{2}\right]$ und nicht mehr geschlossene Kurven, von denen keine einer anderen äquivalent ist.

8. **Analytisch-geometrische Entwicklungen.** Seine Untersuchungen von Kurvensystemen (s. Nexus I) hat *Dyck* auf zwei- und mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten ausgedehnt[99a]) und zwar unter Anwendung der gleichen (oben angedeuteten) Methoden. Es ergibt sich so unter anderen das wichtige Resultat: Die Charakteristik K der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ ist gleich der *Kronecker*schen Charakteristik

99a) Math. Ann. 32 (1888), p. 457 und 37 (1890), p. 273; siehe für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten Complexus Nr. 4.

des Funktionssystems

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

multipliziert mit dem Faktor -2, wenn $\varphi = 0$ zweiseitig ist und keine Doppellinien hat. Da nun nach *Kronecker*[99b]) die *Kronecker*sche Charakteristik multipliziert mit 4π gleich der *Gauß*schen *Curvatura integra* C der Fläche $\varphi = 0$ ist, so ergibt sich, *unter den obigen Voraussetzungen,*

$$C = -2K\pi.$$

Für einseitige Flächen sind die Resultate von nicht so einfacher Form. Die Curvatura integra im Zusammenhang mit K ist von *W. Boy*[99c]) untersucht worden. Er erweitert ihre Definition auch auf polyedrische Ecken und andere Singularitäten und findet unter der Voraussetzung stückweise stetiger Tangentialebene ohne Benutzung der *Kronecker*schen Charakteristikentheorie mittels einfacher anschaulicher Überlegungen

$$C = -2K\pi + n4\pi,$$

wo n die Anzahl der ungeschlossenen Doppellinien der betrachteten Fläche ist, die sowohl ein- als zweiseitig sein kann[99d]).

C. Connexus.

I. Homotopie.

1) Der Begriff der Homotopie ist bis jetzt von besonderer Bedeutung geworden für die Theorie der Kurven auf Flächen. Das hier sich bietende *Hauptproblem:* Aufstellung der *notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Homotopie zweier Kurven* ist für *zweiseitige* Flächen von *Jordan*[100]) vollständig gelöst worden: Jede Kurve ist homotop mit einer durch einen festen Punkt O hindurchgehenden. Hat man zwei solche Kurven Π_1^1 und Π_1^2 mit bestimmtem Umlaufssinn, dann ist eine Kurve Π_1 (mit singulärem Punkte in O) eindeutig gegeben durch die Bestimmung, daß sie zusammengesetzt ist aus den Kurven Π_1^1 und Π_1^2, die in dieser Reihenfolge und in gegebenem Sinne durchlaufen werden sollen: wir schreiben $\Pi_1 = \Pi_1^1 \cdot \Pi_1^2$. Wir können nun beliebig viele Kurven $\Pi_1^1, \ldots, \Pi_1^n$, die auch teilweise identisch sein

99b) Berlin Monatsber. 1869, p. 689.

99c) Diss. Göttingen 1901; Math. Ann. 57 (1903), p. 151.

99d) Vgl. *Möbius* a. a. O. § 20; *F. Reech*, J. éc. polyt. cah. 21, (1858); ferner Anwendungen in der physischen Geographie: *Cayley* (Phil. Mag. (4) 18 (1859)), *Cl. Maxwell* (Phil. Mag. 1870).

100) J. d. math. (2) 11 (1866), p. 100 ff.

können, so zusammensetzen und es gilt für diese Komposition das assoziative Gesetz; dagegen sind nur solche Änderungen in der Reihenfolge erlaubt, die aus zyklischen Vertauschungen zusammengesetzt sind. *Jordan* konstruiert nun ein *kanonisches Fundamentalsystem* von Kurven durch O, aus dem sich alle anderen zusammensetzen lassen, auf folgende Weise: es sei $C, C_1, \ldots, C_{p-1}$ ein System von nicht zerstückelnden, sich nicht schneidenden, mit Umlaufssinn versehenen Kurven (s. Nexus Nr. 5). Sei ferner $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ ein zweites solches System von der Art, daß die Kurven C_i und Γ_k, wenn $i \neq k$ ist, keinen, wenn $i = k$ ist, *einen* Punkt gemeinsam haben (Wir erhalten solche $2p$ Kurven leicht in der Normalform als „Längsschnitte" in den p Paaren zusammengehöriger Bänder.) Seien endlich $A_1, A_2, \ldots, A_r$ die mit Umlaufssinn versehenen Randkurven der betrachteten M_n. Dann sei mit $[C], [C_1], \ldots, [C_{p-1}]$; $[\Gamma], [\Gamma_1], \ldots, [\Gamma_{p-1}]$; $[A_1], \ldots, [A_r]$ ein System von zu jenen $2p + r$ Kurven homotopen Kurven bezeichnet, die alle durch den Punkt O hindurchgehen. Bezeichnen wir mit $[C]^{-1}, \ldots$ die Kurven $[C], \ldots$, im dem gegebenen entgegengesetzten Sinne durchlaufen, und fügen wir diese Kurven zu den obigen $2p + r$ hinzu, so erhalten wir in dieser Gesamtheit von $4p + 2r$ Kurven das gesuchte Fundamentalsystem.

Die Kurve:

$$[C][\Gamma][C^{-1}][\Gamma^{-1}] \ldots [C_{p-1}]^{-1}[\Gamma_{p-1}]^{-1}[A_1] \ldots [A]_r = G$$

wird, falls der Umlaufssinn von $[A_1]$ usw. passend gewählt ist, mit der Begrenzung eines Elementarflächenstückes homotop sein, oder, wie wie man sagt, auf einen Punkt reduzierbar sein. Wir haben dann die Sätze:

1) Jede Kurve ist homotop mit einer Komposition aus den Kurven des Fundamentalsystems. 2) Zwei Kurven sind dann und nur dann homotop, wenn je zwei zu ihnen homotope Kompositionen des Fundamentalsystems ineinander übergehen: a) durch zyklische Änderung der Reihenfolge, b) durch Einschaltung der Komposition G, c) durch Ausschaltung von Kompositionen von der Form $[C][C]^{-1}$. Hieraus ergibt sich z. B. der Satz, daß alle Kurven auf dem geschlossenen Kreisring in der Form $C^n \Gamma^m$ enthalten sind. — Die sodann sich darbietende Frage nach den Invarianten von Kurven bei externen Transformationen auf Flächen, also die Frage nach der Anzahl der nicht „auflösbaren" Doppelpunkte, wird von *Poincaré*[101]) behandelt, ebenso die Frage nach der Minimalanzahl von Punkten, die

101) Palermo Rend. 18 (1904), § 4.

zwei Kurven, die mit einem gegebenen Paare von Kurven homotop sind, gemeinsam haben.

Auch für höhere Dimensionen sind die von *Jordan* begonnenen Betrachtungen von großer Bedeutung: In der Gesamtheit von geschlossenen mit Umlaufssinn versehenen Kurven, die durch einen festen Punkt O laufen, betrachte man nur die nicht homotopen als voneinander verschieden. Die Gesamtheit von zwei solchen Kurven liefert nach obigem wieder eine bestimmte, mit Umlaufssinn versehene, durch O gehende Kurve. Die durch einen Punkt einer M_n laufenden Kurven liefern so *durch ihre Kompositionseigenschaften eine diskontinuierliche Gruppe*, deren Bau für die Fläche charakteristisch ist. Denn es ist (wegen Grundlagen Nr. 3) für jeden Punkt der M_n, und wie man auch leicht sehen kann, für jeden Punkt einer mit der M_n homöomorphen Mannigfaltigkeit diese Gruppe die gleiche. Diese Gruppe ist von *Poincaré* zuerst betrachtet und hat von ihm den Namen *Fundamentalgruppe* der M_n erhalten[102]).

II. Isotopie.

A. *Kurven.* 1) *Eine* Kurve (Verknotung). Man hat bisher der Isotopie angehörige Betrachtungen nur für Elementarmannigfaltigkeiten, hauptsächlich natürlich für den gewöhnlichen Raum, angestellt. Eine direkte Bestimmung der Lage einer Kurve im Raume ist auf Grund unserer Auseinandersetzungen in den „Grundlagen" leicht zu erreichen. Am einfachsten denkt man sich den Raum in Hexaeder (Würfel) zerlegt, deren Ecken man in der üblichen Weise (cartesische) Koordinaten gibt. Dann ist jede Kurve des Raumes isotop mit einem Zug von Strecken, die sämtlich Kanten von Würfeln einer geeigneten Einteilung sind, und dieser Streckenzug ist durch ein Schema von der Art gegeben:

$$x_1 x_2 \ldots x_n x_1$$
$$y_1 y_2 \ldots y_n y_1$$
$$z_1 z_2 \ldots z_n z_1.$$

Jede Kolonne stellt einen Punkt der Kurve dar. Zwei aufeinanderfolgende Kolonnen unterscheiden sich stets nur in einer einzigen Zahl. Da wir hier die Kurven stets ohne Doppelpunkt annehmen, so werden keine zwei Kolonnen mit Ausnahme der ersten und letzten identisch sein. Zwei isotope derartige Kurven gehen durch folgende Transformationen auseinander hervor: 1) Multiplikation

102) J. éc. polyt. (2) 1 (1895), § 12.

aller Zahlen des Schemas mit einer von Null verschiedenen positiven Zahl. 2) Ersatz von aufeinander folgenden Kolonnen von der Art:

$$\begin{matrix} x & x+1 \\ y & y \\ z & z \end{matrix}$$

durch vier Kolonnen von der Art:

$$\begin{matrix} x & x & x+1 & x+1 \\ y & y+1 & y+1 & y \\ z & z & z & z \end{matrix}$$

3) Umkehrung der Transformation von der Art 2), 4) Ersatz der drei aufeinanderfolgenden Kolonnen von der Art:

$$\begin{matrix} x & x & x+1 \\ y+1 & y & y \\ z & z & z \end{matrix}$$

durch die Reihen

$$\begin{matrix} x & x+1 & x+1 \\ y+1 & y+1 & y \\ z & z & z. \end{matrix}$$

Damit sind alle Probleme der Isotopie von Kurven eines E_3 auf arithmetische Probleme zurückgeführt. Eine Kurve, die nicht mit der Berandung eines (Elementar-)Flächenstücks isotop ist, heißt ein *Knoten.*

Der erste, der sich mit Knoten beschäftigte, war wohl *Listing*[103]). Er projiziert die Kurve auf eine Ebene oder eine Kugel; das erstere können wir auch bequem mit Hilfe des Schemas machen, indem wir eine Reihe, etwa die z-Reihe weglassen und dadurch entstehende identische Kolonnen, die unmittelbar aufeinander folgen, als eine einzige ansehen. Eine solche Kurve, die Projektion der gegebenen auf die xy-Ebene, hat im allgemeinen singuläre Punkte und Strecken, doch können letztere durch die obigen Transformationen leicht weggeschafft werden. Sie teilt die Projektionsfläche in *Parzellen,* zu denen (bei Projektion auf die Ebene) das umschließende Gebiet als selbständige Parzelle (*Amplexum*)[104]) mitgerechnet wird. Durch isotope Transformationen können wir es leicht erreichen, daß an jedem singulären Punkte (*Überkreuzungsstelle*) bloß zwei Zweige der Kurve sich schneiden. Dann liefert uns die Lage der Raumkurve eine Teilung der Winkelräume an einer Überkreuzungsstelle in zwei

103) Vorstudien, Göttingen 1848, p. 51.

104) *Listing* a. a. O. p. 55.

Gruppen. Nämlich besitzt etwa der Zweig Z_1 an dieser Stelle eine größere z-Koordinate, so geben wir den beiden von der Überkreuzungsstelle ausgehenden Teilen von Z_1 einen Durchlaufungssinn von diesem Punkte aus, bewegen uns auf der positiven Seite der xy-Ebene und bezeichnen die links von diesem Zweige gelegenen Winkelräume mit λ, die rechts gelegenen mit δ. Insbesondere betrachtet *Listing monotype Formen*, bei welchen in jeder Parzelle alle Winkelräume dasselbe Symbol haben. Jede Parzelle eines solchen Knotens wird symbolisch dargestellt durch ihr Typuszeichen (λ oder δ) mit einem Exponenten, welcher die Eckenzahl der Parzelle angibt.

Die Koeffizienten des „*Komplexionssymboles*" (*Listing*)

$$\begin{Bmatrix} a\delta^n + b\,\delta^{n-1} + \cdots \\ a_1\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots \end{Bmatrix}$$

bezeichnen die Anzahl der verschiedenen Parzellentypen.

Es ist

$$a + b + \cdots + a_1 + b_1 + \cdots$$

gleich der Anzahl der Kreuzungen $+ 2$, und

$$an + b(n-1) + \cdots = a_1 n + b_1(n-1) + \cdots$$

ist gleich der doppelten Zahl der Überkreuzungen. — Die zwei Knoten in Fig. 17 und 18 werden von ihm als Beispiel für die Möglichkeit

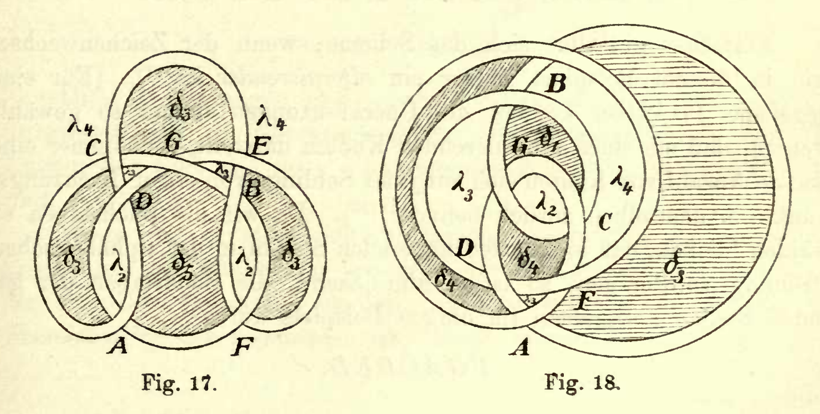


Fig. 17. Fig. 18.

zitiert[105]), daß zwei verschiedene Komplexionssymbole zu isotopen Knoten gehören können. *Tait*[106]) gibt ein Beispiel dafür, daß zwei nicht isotope, monotype Knoten dasselbe Komplexionssymbol haben können. Ob man, wie *H. Weith*[107]) behauptet, immer *Wendepunkte* in der Pro-

105) p. 58.

106) Edinb. Proc. 9 (1877), p. 325; vgl. auch p. 310.

107) *Weith*, Dissert. Zürich 1876, p. 7 und 27.

jektion vermeiden kann, ist zweifelhaft. Ein Wendepunkt hat bei unserem Darstellungsverfahren den Typus:

$$\begin{array}{cccc} x & x+1 & x+1 & x+2 \\ y & y & y+1 & y+1. \end{array}$$

In einer Reihe von Arbeiten führt *Tait*[108]) die Untersuchungen weiter. Er wurde dazu durch *W. Thomsons* Theorie der Wirbelatome angeregt[109]). Wie *Listing* betrachtet er die Projektion des Knotens und stellt sie *schematisch* durch eine Reihe von Buchstaben dar. Die *Verknotungsordnung (degree of knottiness)* „Verschlingung" (*Fr. Meyer*[109a]) ist gleich der Minimalzahl von Überkreuzungen nach jeder möglichen Reduktion[110]). Eine andere für den Verknotungszustand charakteristische Zahl ist die „*Beknottedness*"[111]), d. h. die Minimalzahl von Vorzeichenänderungen bei Überkreuzungen, welche den ganzen Verknotungszustand aufhebt. Die Buchstaben bezeichnen die Überkreuzungen und werden in der Ordnung geschrieben, in welcher man diese trifft, wenn man die Kurve durchläuft. Ein $+$ oder $-$ über jedem Buchstaben gibt an, ob man bei der Überkreuzung über oder unter den anderen Zweig hinwegläuft. Der Knoten in Fig. 17 z. B. ist gegeben durch

$$\overset{-}{A}\,\overset{+}{F}\,\overset{-}{B}\,\overset{+}{G}\,\overset{-}{C}\,\overset{+}{A}\,\overset{-}{D}\,\overset{+}{C}\,\overset{-}{E}\,\overset{+}{B}\,\overset{-}{F}\,\overset{+}{E}\,\overset{-}{G}\,\overset{+}{D}\,\overset{-}{A}.$$

Einfacher gestaltet sich das Schema, wenn der Zeichenwechsel wie in diesem Beispiele immer ein *alternierender* ist[112]). (Für eine gegebene *Projektion* können die Überkreuzungen immer so gewählt werden, daß sie einen alternierenden Knoten darstellt, weil immer eine gerade Anzahl von Kanten sich auf jeder Schlinge von einem Kreuzungspunkt zu demselben zurück befindet)[113]). Da wir die Buchstaben so wählen können, daß sie an den ungeraden Stellen in der alphabetischen Ordnung vorkommen, so ist es hinreichend, die Buchstaben der geraden Stellen anzugeben; im obigen Beispiele durch

$$FGACBED.$$

108) Edinb. Proc. 9 (1877), p. 59, 237, 289, 306, 321, 363, 391, 403, 405 und in gedrängter Form Edinb. Trans. 28 (1879), p. 145; Edinb. Proc. 10 (1879), p. 48; Educ. Times 33 (1880), p. 33; Edinb. Trans. 32 (1885), p. 327; ibid. p. 493.

109) Edinb. Proc. 9 (1876), p. 59.

109a) Diss. München 1878.

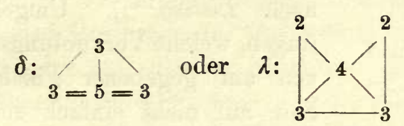
110) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 148.

111) l. c. p. 177; vgl. auch Edinb. Proc. 10 (1879), p. 48.

112) l. c. p. 149.

113) l. c. p. 147; vgl. auch *Jul. Petersen*, Acta math. 15 (1891), p. 198.

Tait untersucht die verschiedenen Schemata für eine gegebene Verknotungsordnung und gibt ferner verschiedene Reduktionsmethoden an[114]). Für *alternierende* Knoten gibt er eine andere schematische Darstellung[115]) an, welche als eine Erweiterung des *Listing*schen Complexionssymbols betrachtet werden kann. Die Parzellen können schachbrettartig in schraffierte und nichtschraffierte eingeteilt werden[116]). Wir bilden ein Schema, indem wir entweder die schraffierten Parzellen oder auch die nicht-schraffierten durch Zahlen repräsentieren, welche ihre Anzahl von Ecken angeben. Die Zahlen werden zu einem Linienkomplex mit Strecken verbunden, welche angeben, in welcher Weise die Parzellen durch die Überkreuzungen miteinander in Verbindung stehen. Jeder Linienkomplex kann einem Knoten zugeordnet werden. Der Knoten in Fig. 17 wird z. B. folgende Schemata haben:



Tait gibt eine Aufzählung aller alternierenden Knoten mit drei bis zehn Überkreuzungspunkten[117]). Der einfachste *(the trefoil knot, Kleeblattschlinge)* ist

$$3 \equiv 3 \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 2 - 2 \end{array}$$

Diese Aufzählungen sind von *T. P. Kirkman*[118]) und *C. N. Little*[119]) fortgesetzt (bis elf Überkreuzungen). Letztgenannter hat auch die Knoten mit acht und neun Überkreuzungen, welche *nicht-alternierend sind,* aufgezählt[120]).

Wenn wir in einem alternierenden Knoten die Art der Überkreuzungen überall ändern, wodurch die Bezeichnungen λ und δ in den Parzellen vertauscht werden, entsteht ein Knoten, welcher die *Perversion*[121]) des gegebenen ist; wenn dieser mit dem gegebenen

114) Vgl. auch *Weith* a. a. O.

115) *Tait* l. c. p. 65.

116) *Tait*, Brit. Assoc. Rep. 1876; Messenger (2) 6 (1877), p. 132. Ist schon in *Listings* Einteilung in λ- und δ-Parzellen enthalten.

117) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 153 ff.; ibid. 32 (1887), p. 327 und p. 501.

118) Edinb. Proc. 13 (1885), p. 359; ibid. p. 363; ibid. p. 514; ibid. p. 693; Edinb. Trans. 32 (1887), p. 281; ibid. p. 483.

119) Connecticut Trans. 7 (1885), p. 27; Edinb. Trans. 36 (1892), p. 253.

120) Edinb. Trans. 35 (1890), p. 663; Edinb. Trans. 39 (1900), p. 771.

121) *Listings* Vorstudien, p. 22.

isotop ist, wird er *amphicheiral* genannt[122]). Es gibt amphicheirale Knoten für *jede gerade Verknotungsordnung*[123]). Dagegen ist z. B. der einzige Knoten mit der Verknotungsordnung 3, die Kleeblattschlinge, nicht amphicheiral. Auf einer Π_3 dagegen sind alle Knoten amphicheiral.

Wir können in verschiedener Weise Flächen konstruieren, welche von der verknoteten Raumkurve begrenzt sind. Solche Flächen mit singulären Linien betrachten *Weith*[124]) und *O. Böddicker*[125]). *Tait, O. Simony* u. a.[126]) betrachten Flächen ohne Selbstdurchkreuzungen. Man kann solche Flächen konstruieren, indem man in der Projektion die schraffierten Parzellen mit Flächen erfüllt, die bei den Überkreuzungspunkten zwischen den Kurvenzweigen „als um π tordierte Flächenstreifen" verlaufen. Die schraffierte Fläche in Fig. 19 ist nach *Tait*[127]) linksgewunden (*dexiotrop* nach *Listing*[128])). Umgekehrt kann man fragen, welche Verknotungseigenschaften Kurven auf gegebener Fläche haben können. Nur auf nicht einfach zusammenhängenden Flächen können verknotete (oder verkettete) Kurven liegen.

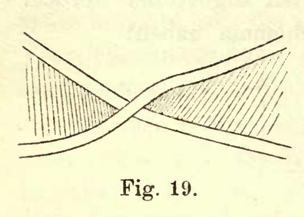


Fig. 19.

Wenn wir die Kurve mit einer Umlaufsrichtung versehen, können wir eine Überkreuzung als *positiv* rechnen, wenn wir in der gegebenen Richtung des einen Zweiges „liegend" die positive Richtung der anderen Zweige als von rechts kommend sehen, sonst *negativ*[129]). Die algebraische Zahl der Überkreuzungen ist für die reduzierte Form jedes Knotens bestimmt; *für amphicheirale Formen ist sie gleich* 0[130]). *A. B. Kempe*[131]) nennt zwei Überkreuzungen miteinander

122) *Tait*, l. c. p. 147; ibid. p. 187. Ein Beispiel schon in *Listings* Nachlaß, Edinb. Trans. 39 (1900), p. 771.

123) *Tait*, l. c. p. 189.

124) Diss. Zürich 1876, p. 24.

125) Erweiterung der *Gauß*schen Theorie der Verschlingungen, Stuttgart, 1876, p. 62 ff.; vgl. auch *Tait*, l. c. p. 180.

126) Vgl. Anm. 129.

127) l. c. p. 147.

128) Vorstudien, p. 53; vgl. teils die Literaturübersicht l. c. p. 35 ff., teils Edinb. Proc. 9 (1877), p. 316.

129) Verwandte oder identische Festsetzungen z. B. bei *Listing*, Vorstudien, p. 52; *Boeddicker*, Erweiterungen der *Gauß*schen Theorie der Verschlingungen, Stuttgart 1876, p. 49; *Tait*, Edinb. Trans. 28 (1879), p. 147 und Edinb. Proc. 10 (1879), p. 42; *Simony*, Gemeinfaßliche Lösung ... 1881, p. 3; *H. Brunn*, Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 106; *Little*, Edinb. Trans. 39 (1900), p. 774.

130) *Little*, l. c.

131) Edinb. Proc. 14 (1886), p. 36.

verkettet, wenn ihre zwei Paare von Buchstaben in dem *Tait*schen Schema (in Kreisordnung geschrieben) einander trennen.

Brunn[132]) hat folgenden Satz aufgestellt: Die algebraische Summe der (geeignet mit Vorzeichen versehenen) scheinbaren Doppelpunkte, die von einem beliebigen Punkt a aus erscheinen, plus der algebraischen Summe der (in passender Weise mit Vorzeichen gerechneten) Schnittpunkte einer Linie, welche a und einen *festen* Punkt a' verbindet, mit der developpablen Fläche der Raumkurve, ist eine konstante Zahl (eine Invariante für isotope Transformationen).

Eine von dem *Tait*schen Schema und dem *Listing-Tait*schen Symbol verschiedene Darstellung eines Knotens gibt *Brunn*[133]), wo die Beschreibung des Knotens in Form einer Substitution hervortritt. Eine Andeutung eines anderen Symboles befindet sich bei *Brunel*[134]).

Die topologischen Verknotungsbegriffe sind mit dem reellen Gebilde der analytischen Geometrie in Verbindung gesetzt worden, indem *A. Brill*[135]) gezeigt hat, daß die Kleeblattschlinge von einer endlichen, rationalen Raumkurve 6. Ordnung gebildet wird, und *Fr. Meyer*[136]) vermittelst des *Tait*schen Schemas die Typen der algebraischen ebenen, rationalen Kurven 4. und 5. Ordnung mit reellen, nicht isolierten Doppelpunkten aufgestellt hat. Es mußte hierbei die *Tait*sche Darstellung einige Modifikationen erfahren, z. B. wegen der eventuellen *„projektivisch unzerstörbaren“ Asymptoten*, welche bei den algebraischen Kurven vorkommen können. Die von *Tait* aufgestellten Knotenprojektionen mit nicht mehr als 7 Überkreuzungen können sämtlich durch ebene, rationale endliche Kurven 6. Ordnung dargestellt werden (event. mit isolierten oder imaginären Doppelpunkten).

2) *Zwei und mehr Kurven (Verkettung).* Auch hier handelt es sich bloß um Untersuchungen im E_3. Gelingt es (nach etwaiger interner Transformation des E_3), zwei Kurven in Kugeln einzuschließen, die keinen Punkt miteinander gemeinsam haben, so sind sie *unverkettet*, andernfalls *verkettet*. Analoges gilt für drei und mehrere Kurven. Nach *Tait*[137]) (vgl. auch *Brunn*[138])) können drei unverknotete Kurven-

132) Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 3 (1893), p. 84. Es ist eine wichtige Aufgabe, den rein topologischen Kern des Satzes herauszuschälen.

133) Verh. d. int. Math.-Kongr. in Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 256.

134) Bordeaux Extr. Proc. verb. 1891/92, p. IV; [Bord. Mém. (4) 3 (1893)].

135) Math. Ann. 18 (1881), p. 95.

136) Diss. München, 1878; Edinb. Proc. 13 (1886), p. 931.

137) Edinb. Proc. 9 (1877), p. 66, 405; Edinb. Trans. 28 (1879), p. 183; vgl. auch *Crum Brown*, Edinb. Proc. 13 (1885), p. 383.

138) München Ber. 22 (1892), p. 77.

miteinander verkettet sein, ohne daß irgend zwei von ihnen verkettet sind (s. Fig. 20). *Brunn*[138]) führt ein *Schema des Verkettungszustandes*, und verschiedene die *Verkettung charakterisierende Zahlen* ein[139]). Die ersten Betrachtungen dagegen über Verkettung oder *Verschlingung* von zwei Kurven verdanken wir *Gauß*[140]), der (ohne Beweis) den Satz aufgestellt hat, daß, wenn die Koordinaten irgend eines Punktes der beiden Kurven (x, y, z) resp. (x', y', z') sind,

$$\iint \frac{(x'-x)(dy\,dz'-dz\,dy')+(y'-y)(dz\,dx'-dx\,dz')+(z'-z)(dx\,dy'-dy\,dx')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

Fig. 20.

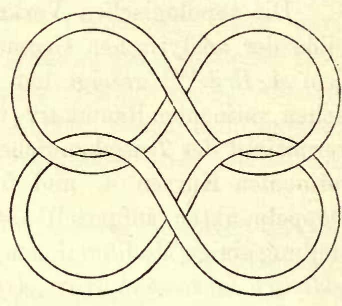


Fig. 21.

gleich einer ganzen Zahl m mal 4π ist und bei irgend welchen isotopen Transformation unverändert bleibt. *Maxwell*[141]) beweist, daß, wenn die eine Kurve von einem elektrischen Strom, die andere von einem Magnetpol durchlaufen wird, die Arbeit, abgesehen von einer Konstanten, gleich V ist. — m ist ein Maß der Verkettung. Es kann jedoch bei ganz verschieden verketteten Kurven denselben Wert haben, z. B. kann es 0 sein für zwei verkettete Kurven (s. Fig. 21). Später haben *Boeddicker*[142]), *J. Thomae*[143]), *Tait*[144]) und *Brunn*[145]) das Verschlingungsintegral untersucht. Der erste zeigt, daß m abgesehen vom Vorzeichen gleich der Differenz der Anzahl der positiven und der negativen

139) Vgl. auch Katalog math. phys. Modelle, hersg. von *Dyck*, München 1893, Nachtrag 30 und 189a.

140) Werke 5, p. 605.

141) A treatise on electricity and magnetism, Oxford, 2 (1873), p. 40.

142) s. Anm. 125.

143) Freiburg Ber. 7 (1876).

144) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 178.

145) Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), p. 114.

Schnittpunkte der einen Kurve mit einer von der anderen begrenzten zweiseitigen Fläche ist. Dabei ist die eine Seite der Fläche positiv, die andere negativ und ein Schnittpunkt positiv gerechnet, wenn die Kurve von der positiven zur negativen Seite geht, negativ, wenn das Umgekehrte der Fall ist. *Brunn*[145]) zeigt, daß $|2m| = |\delta - \lambda|$ ist, wo δ die Anzahl der positiven Überkreuzungen (s. oben) der Raumkurven ist, und λ die der negativen.

B. Flächen und mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Noch weniger als bei den Kurven ist hier die Theorie der Isotopie entwickelt. Wenn zwei berandete Flächen isotop sein sollen, so müssen sie selbst natürlich homöomorph und ihre Randkurvensysteme miteinander isotop sein. Aber das genügt nicht, wie man aus dem Beispiel des punktierten verschlungenen Schlauches erkennt. Die Schwierigkeit der hier sowie in der Knoten- und Kettentheorie zu lösenden Probleme hängt damit zusammen, daß das im wesentlichen Probleme des Nexus für dreidimensionale Gebilde sind: Entfernt man aus zwei Kugeln die von zwei isotopen geschlossenen Flächen begrenzten Räume, so müssen die Resträume homöomorph sein. Näher untersucht sind bisher bloß *Bänder*, d. i. von einer oder zwei Randkurven begrenzte, einseitige resp. zweiseitige Flächen, die durch einen Querschnitt einfach zusammenhängend werden. Wenn das Band einseitig ist, so kann seine Randkurve in mannigfacher Weise verknotet, aber doch nicht mit jedem beliebigen Knoten isotop sein, dasselbe gilt für den Verkettungs- und Verknotungszustand der zwei Randkurven eines zweiseitigen Bandes. Ist hier z. B. eine der Kurven unverknotet, so ist es auch die andere, und sie sind in diesem Falle nicht anders verkettet, als wie die Achsenlinie eines Ringes, und ein doppelpunktloser nicht zerstückelnder Rückkehrschnitt: das Band ist isotop mit einem Teile einer Ringfläche. Zum Zwecke der Herstellung von Knoten und Ketten sind die Bänder zuerst von *Tait*[146]), dann später eingehend von *Simony*[147]) studiert.

146) *Tait,* Edinb. Trans. 28 (1879), p. 169; vgl. auch *Listing,* Vorstudien (1848), p. 49 ff.

147) Wien Ber. 82^2 (1880), p. 691; ibid. 84^2 (1881), p. 237; ibid. 85^2 (1882), p. 907; ibid. 87^2 (1883), p. 556; ibid. 88^2 (1883), p. 939; ibid. 96^2 (1887), p. 191; vgl. auch *Simony,* Gemeinfaßliche leicht kontrollierbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen" und verwandte merkwürdige Probleme, Wien (3. Aufl. 1881); Math. Ann. 19 (1882), p. 110; Math. Ann. 24 (1884), p. 253; Math. Ann. 31 (1888), p. 549; Tageblatt des Vers. der Naturf. u. Ärzte 59 in Berlin (1886), p. 336; ibid. 60 in Wiesbaden (1887), p. 229. *L. Koller,* Wien Ber. 89^2 (1884), p. 250; *L. Schuster,* Wien Ber. 97^{2a} (1888), p. 217; *F. Dingeldey,* Wien Ber. 98^{2a} (1889), p. 79; vgl. auch *Dingeldey,* Topologische Studien, Leipzig 1890, und die Rezension dieses Buches von *Brunn,*

Der einfachste Fall des einseitigen Bandes rührt von *Möbius*[148]) her. Dasselbe ist überhaupt das erste Beispiel einer einseitigen Fläche und hat den Namen *Möbiussches Band* bekommen. Hier ist die Randkurve verknotet.

Möbius hat auch die empirische Konstruktion der nächstliegenden Fälle gegeben, Torsion eines länglichen rechteckigen Streifens um π, $2\pi, \ldots, n\pi$ und Zusammenheftung der Enden ohne Verschlingung. Dies sind, wenn n gerade ist, die oben angeführten auf einer Ringfläche liegenden Bänder. Die für komplizierte verschlungene Bänder von *Simony* gegebene Definition des Torsionsmaßes hat *Brunn*[149]) als unzureichend nachgewiesen und folgende dafür aufgestellt: Wenn das Band zwei Randkurven hat, so ist die Torsion $(\delta - \lambda)\pi$, wo δ die Zahl der positiven (s. p. 212), λ die der negativen Überkreuzungen ist. Eine ähnliche Anzahlbestimmung wird für Bänder mit nur einer Randkurve auf diese Definition zurückgeführt.

Simony stellt auch Untersuchungen an über die Verschlingung von Bändern, die eintritt, wenn man ein zweiseitiges Band längs der Mittellinie aufschneidet. Eine exakte Definition der zu betrachtenden Bänder und Flächen erhält man, wenn man wie bei der Kurvendefinition eine Einteilung des Raumes, etwa in Würfel, zugrunde legt.

Dyck[150]) hat das *Gauß*sche Verschlingungsintegral erweitert für den Fall der Verkettung einer M_k mit einer M_{n-k-1} im E_n. Indem er zeigt, daß dieses Integral in nahem Zusammenhang steht mit der Charakteristik zugehöriger Funktionssysteme, ergibt sich unmittelbar, daß diese Integrale gegenüber speziellen externen Transformationen sich invariant verhalten. Er findet ferner den Satz: Wie man auch die M_k und M_{n-k-1} darstellenden $n+1$ Gleichungen in zwei Gruppen teilt, das durch das Verschlingungsintegral gegebene Maß der Verkettung der durch diese beiden Gruppen dargestellten Mannigfaltigkeiten bleibt stets das gleiche. Es ist zu erwarten, daß dieser Satz auch eine rein geometrische Bedeutung hat.

D. Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten.

1. *Allgemeinere Probleme.* Wir haben hier das Problem: Gegeben eine M_n; man soll alle Typen von miteinander nicht isotopen

Zeitschr. f. Math. 37 (1892), hist.-lit. Abt., p. 72, wo die Erklärung der Tatsache gegeben ist, daß eine von *Dingeldey* hergestellte Reihe von Gebilden identisch ist mit einer Reihe von *Simony* gebildeter Knoten.

148) s. Anm. 14).

149) Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 106.

150) München Ber. 25 (1895), p. 261, und besonders p. 447.

Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Singularitäten, die auf ihr liegen können, bestimmen. Es ist dies das umfassendste Problem der Isotopie, und es ist demgemäß auch für die einfachsten Fälle nur in sehr bescheidenem Umfang gelöst. Bei geschlossenen oder ungeschlossenen Kurven kann man füglich von singulären Strecken absehen und sich bei singulären Punkten auf Doppelpunkte beschränken. *Gauß*[151]) hat sich mit der Aufstellung von Typen ebener singulärer Kurven (Trakten) beschäftigt. Er bezeichnet die singulären Punkte mit Buchstaben $a, b, c, \ldots$ und stellt die Kurven etwa in der Form $a\,bc\,a\,bc$ dar, wo die aufeinander folgenden Buchstaben aufeinander folgende Punkte der Kurve bezeichnen (vgl. p. 210). Für den E_3 entspricht jeder solcher Ausdruck auch wirklich einer Kurve, nicht so für einen E_2. So z. B. gibt es keine Kurve, die den Ausdruck $abacbc$ liefern würde. *Gauß*[152]) unterscheidet nun noch unter den repräsentationsfähigen Ausdrücken diejenigen, die es bei Vor- und Nachsetzung eines neuen Knotenpunktes bleiben, und solche, für die das nicht der Fall ist. $aabbcc$ ist ein Beispiel für den ersten, $ababcc$ eins für den zweiten Fall. Bis zu fünf Doppelpunkten hat *Gauß* alle möglichen Trakte aufgestellt. Eine allgemeine Regel für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Trakten aufzustellen, ist ihm jedoch nicht gelungen.

Allgemeine Untersuchungen über Singularitäten bei geschlossenen Flächen rühren von *Boy*[153]) her. Er beweist den Satz, daß es zu jeder geschlossenen Fläche homöomorphe Repräsentanten im E_3 gibt, die als Singularitäten höchstens geschlossene Doppellinien mit einem dreifachen Punkt besitzen. Dazu war es bloß nötig, eine derartige einseitige Fläche mit der Charakteristik -1 zu konstruieren[154]). Der Satz hat insofern eine besondere Bedeutung, als aus ihm folgt, daß es zu jeder Fläche homöomorphe analytische Repräsentanten gibt, bei denen in der Umgebung jedes Punktes eine Koordinate sich in der Form von (höchstens drei) Potenzreihen darstellen läßt, die nach *ganzen* Potenzen der anderen Koordinaten fortschreiten.

2. *Riemannsche Flächen.* Von größter Bedeutung sind diejenigen singulären zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die man als *Riemannsche Flächen* bezeichnet. Vom rein topologischen Standpunkt

151) Werke 8 (Nachlaß), p. 271 ff.

152) a. a. O. p. 282.

153) Dissert. Göttingen (1901) u. Math. Ann. 57 (1903), p. 151 ff.

154) Vgl. auch Gött. Nachr. 1901, p. 20.

aus sind sie etwa folgendermaßen zu definieren[155]): Auf einer Kugelfläche verbinde man w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mit einem weiteren Punkte O durch sich nicht schneidende Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$, und schneide längs dieser Linien die Kugelfläche auf, d. h. man betrachte die Kugelfläche als ein Elementarflächenstück mit singulärer Berandung, die aus den Linien $l_1' l_1'', l_2' l_2'', \ldots, l_w' l_w''$ in dieser Reihenfolge (wenn wir die Indizes $1, 2, \ldots, w$ passend gewählt haben) besteht, wobei aber je zwei Linien l_i' und l_i'' zu einer Doppellinie zusammenfallen. O wird demnach für dieses Elementarflächenstück ein w-facher Punkt. Wir denken uns nun die Kugel mit n solchen Elementarflächenstücken (Blättern) $B_1, \ldots, B_n$ mit denselben Singularitäten bedeckt und erklären je eine Linie l_k' auf einem Blatt B_i mit einer Linie l_k'' auf demselben oder einem anderen Blatt B_{α_i} als identisch. Dadurch erhalten wir eine oder mehrere geschlossene zweiseitige Flächen, und es gibt gemäß der Zusammenheftungsbestimmung zu jeder Linie l_k eine Substitution der Zahlen 1 bis n:

$$S_k = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ist nun die durch $S_1, \ldots, S_n$ erzeugte Gruppe transitiv, dann hängen alle Blätter miteinander zusammen, und wir haben *eine* geschlossene Fläche; ist ferner $S_1 \, S_2 \ldots S_n = 1$, so bedeutet das, daß der Punkt O als n-facher singulärer Punkt zu zählen ist (wie jeder andere Punkt der Kugel mit Ausnahme der Verzweigungspunkte). Sind alle diese Bedingungen erfüllt, dann nennen wir die Fläche eine *Riemannsche Fläche* mit den *w Verzweigungspunkten* $a_1, \ldots, a_w$ und den *w Verzweigungslinien* $l_1, \ldots, l_w$.[156]) An jedem Verzweigungspunkte a_i werden sich die Blätter zu c_i Zyklen anordnen. Jedem Zyklus entspricht ein bestimmter Punkt $A_{i,j}$ der singularitätenfreien Mannigfaltigkeit, deren Bild die Riemannsche Fläche ist, und die in diesem Zyklus vereinigten Blätter sind die Bilder der an den Punkten $A_{i,j}$ hängenden Flächenstücke. Es ist also a_i ein c_i-facher Punkt. Jede der Linien l_i ist eine n-fache Linie, und es folgt so aus der *Euler*schen Formel (s. Nexus II Nr. 5) die Beziehung:

$$(\sum c_i + n) + n = wn + 2 - 2p,$$

oder auch

$$\sum (n - c_i) - 2n = 2(p - 1),$$

wo dann $n - c_i$ wieder eine Bedeutung hat. Es ist nämlich diese Zahl

155) s. *Ad. Hurwitz,* Math. Ann. 39 (1891), p. 3.

156) *Hurwitz* l. c.

gleich der Summe der um 1 verminderten Anzahlen der in den Zyklen zusammenhängenden Blätter, oder gleich der *Multiplizität* des Verzweigunspunktes a_i. *Riemann*[157]) beweist diese Relation mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln (*Dirichlet*sches Prinzip, konforme Abbildung), *C. Neumann*[158]) später mit den Hilfsmitteln der Analysis situs. Aus der Formel folgt, daß die Summe der Multiplizitäten stets eine gerade Zahl ist, daß also beispw. eine Fläche mit nur einfachen Verzweigungspunkten davon eine gerade Zahl besitzen muß. Zwei *Riemann*sche Flächen sind als gleich zu erachten, wenn sie sich bloß durch die Numerierung der Blätter und Verzweigungspunkte unterscheiden. Die Anzahl aller möglichen Riemannschen Flächen mit bloß einfachen Verzweigungspunkten und gegebener Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten ist von *Hurwitz*[159]) bestimmt worden. *Transformationen* der Riemannschen Fläche sind zunächst von *J. Lüroth*[160])

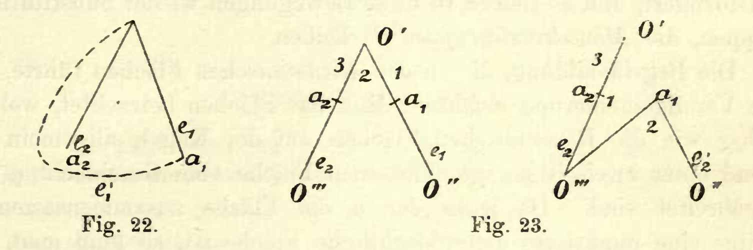


Fig. 22. Fig. 23.

ebenfalls für den Fall von lauter einfachen Verzweigungspunkten untersucht worden. Als Transformationen kommen hier in Betracht die durch funktionentheoretische Begriffe unmittelbar gelieferten „Überschiebungen“ der Verzweigungslinien. Diese sind von folgender Art: seien l_1, l_2, zwei aufeinanderfolgende Verzweigungsschnitte und mögen an l_1 die Blätter 1 und 2, an l_2 die Blätter 2 und 3 zusammenhängen, dann transformiere man l_1 in l_1' so, daß l_1' auf l_1 folgt (s. Fig. 22) und lasse an l_2 jetzt 1 und 2 in einander übergehen. Dieser Transformation der Riemannschen Fläche entspricht die in der Fig. 23 an-

157) Theorie der Abelschen Funkt. § 7; J. f. Math. 54 (1857), p. 127 = Werke (2. Aufl.), p. 113; vgl. auch *H. Durège,* Funktionenth., Leipzig, 1. Aufl. (1865), §§ 58, 59; *Thomae,* Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 361 u. *Durège,* Wien Sitzber. 69^2 (1874), p. 115.

158) Vorles. üb. Riemanns Theorie usw. Leipzig 1865, p. 312

159) l. c. u. Math. Ann. 55 (1901), p. 53 ff.

160) Math. Ann. 4 (1871), p. 181; *A. Clebsch,* Math. Ann. 6 (1873), p. 216; vgl. auch *J. H. Graf,* Dissert. Bern 1880; *Picard,* Traité 2, Paris 1893, p. 369 ff.; *Jordan,* Cours 2, Paris (2. Aufl.) 1894, p. 558 ff.; *E. Bertini,* Rom Linc. Rend. (5) 3^1 (1894), p. 106; *H. Stahl,* Theorie d Abelschen F., Leipzig 1896, p. 31.

gedeutete Änderung der Überdeckung eines zu ihr gehörigen singularitätenfreien Originals.

Lüroth hat bewiesen, daß durch solche Überschiebungen eine Fläche (mit lauter einfachen Verzweigungspunkten) in eine solche von kanonischer Form übergeführt werden kann: Das erste Blatt hängt blos mit dem zweiten und zwar in zwei Verzweigungslinien zusammen, allgemein: das k^{te} Blatt $(k < n)$ hängt blos mit dem $k + 1^{\text{ten}}$ und $k - 1^{\text{ten}}$ und zwar in je zwei Verzweigungsschnitten zusammen, endlich das n^{te} blos mit dem $n - 1^{\text{ten}}$ und zwar in $2p + 2$ Linien.

Allgemeinere Transformationen mit Bewegung der Verzweigungspunkte von beliebigen *Riemann*schen Flächen sind von *Hurwitz*[161]) untersucht. Gehen die Verzweigungspunkte aus einer bestimmten Lage durch eine Bewegung wieder in die ursprüngliche Lage über, so ist im allgemeinen durch diese Bewegung das Substitutionsschema $S_1, \ldots, S_w$ transformiert, und es liefern so diese Bewegungen wieder Substitutionsgruppen, die *Monodromiegruppen*[162]) heißen.

Die Begriffsbildung, die zu den *Riemann*schen Flächen führte, hat eine Verallgemeinerung erfahren: Man hat Flächen betrachtet, welche, analog wie die *Riemann*schen Flächen auf der Kugel, allgemein auf irgend einer zweiseitigen geschlossenen Fläche vom Geschlecht $q > 0$ ausgebreitet sind. Da jedes der n die Fläche zusammensetzenden Blätter eine punktierte q-geschlechtliche Fläche ist, so muß man, um die *Euler*sche Formel anwenden zu können, in jedem Blatt noch $2q$ Querschnitte, also $4q$ Ecken und $2q$ Strecken hinzufügen. Wir erhalten so:

$$(n + \sum c_i + 4nq) + n = wn + 2nq + 2 - 2p$$

oder:

$$\tfrac{1}{2} \sum (n - c_i) + n(q - 1) = p - 1.$$

Hurwitz[162]) hat eine Reihe seiner für gewöhnliche *Riemann*sche Flächen angestellten Betrachtungen auch auf diesen Fall ausgedehnt[163]).

---

161) Math. Ann. 39 (1891), p. 1; vgl. auch *Klein*, Riem. Th., Leipzig 1882, p. 64; *H. Kasten*, Theorie d. dreiblättr. *Riemann*schen Flächen, Göttingen 1876.

162) *Hurwitz*, l. c.

163) Über die Anwendung der Riemannschen Flächen in der Funktionentheorie, s. II B 2, *Wirtinger*.

(Abgeschlossen im Januar 1907.)

III A, B 4a. GEGENSATZ VON SYNTHETISCHER UND ANALYTISCHER GEOMETRIE IN SEINER HISTORISCHEN ENTWICKLUNG IM XIX. JAHRHUNDERT.

Von

G. FANO

IN TURIN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Da der vorliegende Artikel einen allgemeinen Überblick über die darauffolgenden von Bd. III geben soll, so muß hier auf Literaturangabe verzichtet werden, und für jeden einzelnen Abschnitt auf die bei den entsprechenden Artikeln von III A, B; III C; III D angeführte Literatur verwiesen werden. Hier werden nur einige Werke allgemeinen oder historischen Charakters erwähnt:

A. Brill und *M. Noether,* Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 3 (1894), p. 107—566 („Bericht").

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837; 2. Aufl. Paris 1875 („Aperçu historique").
F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie, 2 Bde; autogr. Vorlesung, Göttingen 1892—93; insbes. Bd. 1 („Höhere Geometrie").
E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. I. Teil: von *Monge* bis auf *v. Staudt,* Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 5^2 (1901), p. 1—486 („Bericht").
G. Loria, Il passato e il presente delle principali teorie geometriche, Torino Mem. 38 (1887); deutsch durch *F. Schütte,* Leipzig 1888. Zweite ital. Aufl., Torino 1896.
E. Pascal, Repertorio di matematiche superiori, 2 (Geometria), Milano 1900; deutsch durch *A. Schepp,* Leipzig 1902.

I. Allgemeine Bemerkungen. Fixierung des Themas: Die Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert, von Monge beginnend.

1. Charakteristische Merkmale der beiden Geometrieen. Man unterscheidet allgemein zwei Arten von Geometrie: die *synthetische Geometrie,* welche die Figuren an sich betrachtet, und die *analytische Geometrie,* welche mit Hilfe der Analysis ihr Lehrgebäude aufstellt. Es liegt in der Natur der Sache, daß von diesen beiden Arten, geometrische Gebilde zu untersuchen, ausschließlich die erste in den älteren Zeiten angewandt wurde, während die zweite erst im 17. Jahrhundert, nach Entstehung der Algebra, als *Anwendung der Algebra auf die Kurvenlehre* zur Geltung kam.

Wir können die Geometrie zunächst als eine *eigenartige* Wissenschaft auffassen, welche durch Betrachtungen aus der Raumanschauung veranlaßt wird. Sie benutzt einige Grundbegriffe (Punkt, gerade Linie, . . .) und stützt sich auf eine Reihe von Grundsätzen (die sogen. „Postulate"), welche aus der Anschauung entnommen sind, dann aber innerhalb unseres Geistes einem Abstraktionsprozesse unterworfen und dementsprechend in genauerer Form ausgesprochen werden. Von hier aus schreitet man durch deduktive Schlüsse weiter, und gelangt zu abstrakten Resultaten, welche sich durch eine gewissermaßen inverse Operation, d. h. durch einen Übergang von abstrakten (mathematischen) Punkten usw. zu konkreten (physikalischen), auf die physikalische Welt anwenden lassen[1]). Die Auswahl der notwendigen

---

1) Diese abstrakten Resultate lassen sich ja auch in vielfacher Weise interpretieren, indem man den Grundbegriffen Punkt, gerade Linie, . . . auch andere, von den gewöhnlichen verschiedene Bedeutungen erteilt, welche den zugrunde gelegten Postulaten genügen. So war es besonders in den neueren mehrdimensionalen Untersuchungen (Nr. 30; III C 9, mehrdimensionale Räume, *Segre*).

Grundsätze, ihre präzise Formulierung, die auf ihre gegenseitige Verträglichkeit und Unabhängigkeit bezüglichen Untersuchungen, sind schwierige und zugleich grundlegende Aufgaben (III A, B 1, Prinzipien der Geometrie, *Enriques*).

Anderseits können wir die Arithmetik, oder allgemeiner die Analysis, d. h. die Grundeigenschaften der *Zahlen* als bekannt voraussetzen; diese Eigenschaften lassen sich ebenfalls aus gewissen Grundsätzen ableiten, die aber in kleinerer Anzahl und viel einfacher sind als die der Geometrie. Verstehen wir unter einem *Punkte* (beispw. des Raumes) das aus *drei Zahlen* (den sogen. Koordinaten) gebildete *analytische Element*; unter einer *Ebene* den Inbegriff aller Punkte (d. h. aller Zahlentripel), die eine bestimmte lineare Gleichung mit drei Veränderlichen befriedigen; usw., so ergibt sich aus bekannten analytischen Theoremen sofort, daß die geometrischen Sätze über die Bestimmung von geraden Linien und Ebenen durch zwei bezw. drei Punkte (in allgemeiner Lage), sowie auch diejenigen über Durchschnitte von geraden Linien und Ebenen, sämtlich bestehen; und zugleich folgt die Kontinuität des (analytisch definierten) Raumes aus derjenigen der Zahlen. Von hier aus läßt sich eine „analytische Raumlehre“ entwickeln, welche sich mit der Geometrie deckt, ohne irgendwie notwendigerweise die Anschauung oder geometrische Begriffe und Operationen zu benutzen. In dieser werden die geometrischen Gebilde durch analytische (deren „Koordinaten“, oder deren „Gleichungen“) ersetzt, auf welche die Rechnungsmethoden anwendbar sind; der Übergang von einem Gebilde zu einem anderen deckt sich mit der Aufgabe, aus der Gleichung des ersten die des zweiten abzuleiten; geometrische Wahrheiten sind denkbare Gegenbilder analytischer Beziehungen. Das ist die *„analytische Geometrie“*; erstere heißt dagegen *„synthetische Geometrie“*.

2. Weiteres über die Grundbegriffe der analytischen Geometrie. In historischer Hinsicht darf bemerkt werden, daß die „analytische Raumlehre“ dadurch zur Geltung kam, daß man die Punkte der Ebene oder des Raumes durch 2 bezw. 3 Zahlen (deren Koordinaten) „darzustellen“ lernte, und von hier aus die analytische Theorie der Zahlenpaare oder Zahlentripel aufbaute und geometrisch deutete.

Spuren eines orthogonalen Koordinatensystems in der Ebene sind schon in älteren Zeiten zu finden; insbesondere hat *Apollonius* (ca. 200 v. Chr.) metrische Eigenschaften der Kegelschnitte durch Formeln dargestellt, die mit den heutigen Gleichungen dieser Kurven in bezug auf spezielle Koordinatensysteme zusammenfallen. Im 15. Jahrhundert

bestimmte *Viète* (1540—1603) die Punkte einer geraden Linie durch Zahlen. Aber die Möglichkeit, den Algorithmus der Algebra auf die Darstellung beliebiger, nach bestimmten Gesetzen konstruierter Gebilde anzuwenden, und zugleich auch den Vorteil, den die systematische Anwendung dieser Darstellung bieten konnte, haben, obwohl noch in beschränkter Form, erst *Descartes* (1596—1650) und, für spezielle Fälle, *Fermat* (1602—1665) erkannt[1a]). Derselbe Grundbegriff, den sie für die Punktgebilde einer Ebene aufstellten und für die Raumgeometrie andeuteten, ist in neuerer Zeit in mannigfaltiger Weise angewandt und verallgemeinert worden (III A, B 8, Koordinaten, *Müller*). In jeder „Grundform" 1., 2. oder 3. Stufe (Nr. 9), deren Element der Punkt, die gerade Linie, oder die Ebene ist, sind verschiedenartige Koordinatenbestimmungen bekannt; direkte Koordinatenbestimmungen lassen sich ebenfalls auf das ∞^3-System der Kreise einer Ebene und auf das ∞^4-System der Raumkugeln anwenden; dabei sind die Koordinaten immer bestimmte, mit dem betr. Elemente zusammenhängende geometrische Größen. *Wesentliches Kennzeichen einer jeden Koordinatenbestimmung ist, daß bei gegebenen Koordinaten das entsprechende Gebilde eindeutig bestimmt sei, und umgekehrt, sowie daß bei stetiger Änderung der Koordinaten das Gebilde sich ebenfalls stetig ändere, und umgekehrt.*

Im allgemeinen wird jedes einzelne Gebilde durch eine Anzahl k unabhängiger Koordinaten bestimmt. Es kann sich aber manchmal empfehlen, $k+1$ *homogene Koordinaten* zu benutzen, oder auch das Gebilde mit einer größeren Anzahl von Koordinaten zu behaften, welche dann nicht mehr unabhängig sind, sondern eine entsprechende Anzahl von Bedingungsgleichungen identisch erfüllen müssen. So ist es z. B. bei den *Plücker*schen Linienkoordinaten im Raume (III C 10, *Wälsch*), bei den pentasphärischen Koordinaten (III A, B 8, *Müller*), bei den Pentaederkoordinaten für die Darstellung der Flächen 3. Ordnung (III C 7, *Meyer*, Nr. 3)[2]).

1a) *Descartes* in seiner „Géométrie" (Leyde, 1637), 3ter Anhang zu dem „Discours sur la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences plus la dioptrique, les météores et la géométrie", p. 297 u. ff. = Oeuvres, publiées par *Ch. Adam* et *P. Tannery*, 6 (Paris 1902), p. 369 (vgl. *Brill* und *Noether*, Bericht, p. 113—16); *Fermat* in seiner „Ad locos planos et solidos isagoge", welche unabhängig von *Descartes* geschrieben, aber erst später, nach seinem Tode, in den „Varia opera mathematica" (Tolosae 1679) veröffentlicht wurde (Oeuvres de Fermat publiées par *P. Tannery* et *Ch. Henry*, 1 (Paris 1891), p. 91).

2) Diesen Standpunkt hat besonders *P. Serret* in seiner „Géométrie de direction. Application des coordonnées polyédriques" (Paris 1869) berücksichtigt,

Haben wir in einem System von Gebilden eine Koordinatenbestimmung eingeführt, so können wir dort kleinere Scharen von Gebilden dadurch definieren, daß wir die k Koordinaten eines Gebildes einer oder mehreren Gleichungen zwischen k Veränderlichen unterwerfen. Wir sagen dann, daß die betreffende Schar durch diese Gleichung oder dieses System von Gleichungen *dargestellt* wird. Umgekehrt kann jede Gleichung und jedes System verträglicher Gleichungen in mehrfacher Weise geometrisch gedeutet werden, überall wo sich die Veränderlichen als Koordinaten deuten lassen.

Von hier aus ergibt sich eine wesentliche Erweiterung des Koordinatenbegriffes. Wir können uns in die (beispielsweise in Punktkoordinaten geschriebene) Gleichung eines Gebildes eine beliebige (endliche) Anzahl von Parametern eingeführt denken, und die Gesamtheit der Gebilde ins Auge fassen, deren Gleichungen allen möglichen Wertsystemen dieser Parameter entsprechen. Erfüllt dabei jene Gleichung noch die Bedingung, jedes Gebilde der Schar für ein einziges Wertsystem, oder auch nur für eine diskrete Anzahl von Wertsystemen der Parameter darzustellen[2a]), so daß bei stetiger Änderung der Parameter das Gebilde sich auch stetig ändert und umgekehrt, so dürfen wir die obigen Parameter als *Koordinaten* des entsprechenden Gebildes innerhalb der betrachteten Schar auffassen. Diese Überlegung wird fortwährend auf lineare Systeme algebraischer Kurven und Flächen, insbesondere auf das System aller ebenen Kurven oder aller Flächen von gegebener Ordnung und auf Involutionen in einstufigen Gebilden angewandt. Dadurch, und eventuell nach wiederholter Anwendung dieses Verfahrens, werden viel weitere Kreise geometrischer Gebilde der Koordinatenbestimmung zugänglich.

Gleichungen mit mehreren Reihen von Variabelen lassen sich dadurch geometrisch deuten, daß die Variabelen jeder einzelnen Reihe als Koordinaten eines Elementes je einer Mannigfaltigkeit gedeutet werden; dieser Deutung liegt die Gesamtheit derjenigen Gebilde zugrunde, welche aus je einem Elemente einer jeden der obigen Mannigfaltigkeiten auf alle möglichen Weisen bestehen. Diese verschiedenen Elemente sind nicht notwendigerweise gleichartig; bei ungleichartigen

---

indem er zeigte, was mit diesen „polyedrischen Koordinaten“ überhaupt zu machen ist.

2a) Auch im Falle einer diskreten Anzahl von Wertsystemen läßt sich durch geeignete Festsetzungen die eindeutige Umkehrbarkeit der Korrespondenz zwischen Parameterwerten und Gebilden herstellen.

Elementen liefern die *Clebsch*'schen „Konnexe" der Ebene das einfachste Beispiel[3]).

Als eine Erweiterung der Deutung endlicher Gleichungen durch geometrische Gebilde ist die durch *G. Monge* erdachte[4]) und später durch *P. du Bois-Reymond*[5]) und *S. Lie*[5a]) wieder aufgenommene geometrische Deutung der Differentialgleichungen anzusehen. Ebenso wie ein Wertsystem von x, y oder x, y, z als ein Punkt der Ebene oder des Raumes gedeutet wird, so kann man ein Wertsystem von x, y, y' $\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ oder von $x, y, z, dx:dy:dz$ bezw. von $x, y, z, p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$ als ein „Linienelement" der Ebene, oder als ein Linien- bezw. Flächenelement des Raumes deuten. Durch eine Differentialgleichung wird eine gewisse Mannigfaltigkeit solcher Elemente dargestellt, und das Integrationsproblem dieser Differentialgleichung läßt sich dann geometrisch in durchsichtiger Weise auffassen (II A 4b, *Vessiot*; II A 5, *v. Weber*; vgl. Nr. 39).

Die Bestimmung geometrischer Gebilde durch Koordinaten, und die Darstellung von Systemen solcher Gebilde, d. h. nochmals von Gebilden, durch Gleichungen, sind die beiden Grundbegriffe der analytischen Geometrie; darüber hinaus kommt es nur auf Rechnungen (im allgemeinsten Sinne), d. h. auf Aufgaben der Analysis an. Jedes Gebilde, welches durch eine Gleichung dargestellt wird, läßt sich übrigens auch, allgemein zu reden, durch Koordinaten bestimmen, indem man als solche die in seiner Gleichung auftretenden Konstanten ansieht; und jedes Gebilde, welches sich durch Koordinaten bestimmen läßt, kann als

---

3) Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene, Gött. Nachr., 18. Sept. 1872, p. 429; Math. Ann. 6 (1873), p. 203. Der Begriff des Konnexes tritt schon bei *J. Plücker* auf (Analytisch-geometrische Entwicklungen, 2², Essen, 1831, § 2).

4) Supplément, où l'on fait voir ...., Paris Acad. 1784, p. 502. Application de l'analyse à la géométrie, teilweise 1795 veröffentlicht, unter dem Titel: „Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie", letzte Ausgabe Paris 1850, durch *J. Liouville*; vgl. insb. die Addition, p. 420 u. ff.

5) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln (Leipzig 1864).

5a) Schon in seinen ersten Arbeiten (1870—71) machte *Lie* die *Plücker*sche Liniengeometrie und die Kugelgeometrie für die Lehre der Differentialgleichungen nutzbar. Die Grundbegriffe der geometrischen Deutung der Differentialgleichungen sind bereits in den Aufsätzen von 1872 (Christiania Forh.; Gött. Nachr. p. 473) enthalten und finden von da an fortwährend Anwendung. Ausführlich wurde diese Deutung in „Geometrie der Berührungstransformationen" 1 (Leipzig 1896) dargelegt. S. auch die von *F. Engel* herausgegebenen 3 Kapitel aus dem unvollendeten Bd. 2 in Math. Ann. 59 (1904), p. 193.

gemeinsames Element (Durchschnitt) gewisser Systeme angesehen werden, deren jedes durch eine Gleichung (und zwar durch das Konstantsetzen je einer der obigen Koordinaten) dargestellt wird.

3. Gegenseitige Beziehungen der beiden Geometrieen. Jede geometrische Frage kann nach analytischer, oder nach synthetischer Methode behandelt werden. In der analytischen Behandlung lassen sich *drei* wesentliche Momente unterscheiden: 1) die analytische Übersetzung des Problems, in welcher es sich darum handelt, die vorliegenden Umstände durch *Gleichungen* auszudrücken, d. h. „in der Sprache der analytischen Geometrie zu schreiben"; 2) die Ableitung, von diesem System von Gleichungen ausgehend, der weiteren Gleichungen oder der Koordinatenwerte, welche die aufgesuchten Gebilde darstellen; eine rein analytische Aufgabe, in welcher die von der Analysis der Geometrie geleistete Hilfe besteht; 3) die geometrische Deutung der analytisch gewonnenen Resultate. Der in den Einzelproblemen 1) und 3) verlangte Übergang von einer geometrischen Beziehung zu ihrem analytischen Bilde und umgekehrt ist oft ein unmittelbarer, fast unbewußter. Dagegen beruhen die in der Aufgabe 2) einbegriffenen Umformungen auf einer Reihe allgemeiner und fortwährend auftretender analytischer Prozesse (z. B. Gleichungen der geraden Linie oder der Ebene durch 2 oder 3 vorgelegte Punkte, Durchschnitt gerader Linien und Ebenen, Gleichungen von Tangenten und Tangentenebenen an vorgelegten Kurven und Flächen, Zusammensetzung von Gleichungen zu linearen Systemen, . . .), in denen das Wesentliche der analytischen Geometrie liegt.

Trotz des scheinbaren Gegensatzes läßt sich in den Methoden der beiden Geometrieen vielfach derselbe Leitfaden erkennen. Wird eine Frage den beiden Behandlungsweisen unterworfen, so ist oft der Gedankengang nur einer; geändert ist bloß die Ausdrucksweise, die „Sprache". In der Tat kann jede synthetische Überlegung „analytisch übersetzt" werden; und aus einer Reihe synthetischer Operationen, welche von gewissen Gebilden (A) ausgehend ein weiteres (B) erzeugen, ergibt sich durch Umsetzung ein analytischer Prozeß, welcher aus den Gleichungen der Gebilde (A) die Gleichungen von (B) zu folgern gestattet, wie es oben bei 2) gemeint war. Umgekehrt kann, allgemein zu reden, jede Rechnung geometrisch gedeutet werden, und zwar auf sehr verschiedene Weisen, je nach der Mannigfaltigkeit, innerhalb welcher man die auftretenden Variabeln als Koordinaten deutet; so daß ein einziger analytischer Prozeß die Behandlung verschiedener (in gewissem Sinne äquivalenter) geometrischer Fragen liefern kann.

Durch diese geometrischen Interpretationen werden öfters analytische Betrachtungen veranschaulicht und belebt, so daß die Geometrie ihrerseits der Analysis zu Hilfe kommt. So war es z. B. in der Nr. 2 erwähnten Theorie der Differentialgleichungen (vgl. Nr. **5**, **36**, **39**); ebenso läßt sich der Begriff des Differentialquotienten einer reellen Funktion $y = f(x)$ (II A 1, Funktionenlehre, *Pringsheim*, Nr. **10**) durch Betrachtung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ klar machen.

4. Plan der folgenden Darstellung. Es war ein Verdienst der analytischen Methode, jene Allgemeinheit der Auffassung und Behandlung, welche früher als ein besonderer Vorteil der Analysis erschien, auch der Geometrie zugänglich gemacht zu haben. Die synthetische Geometrie erreichte aber im 19. Jahrhundert, im algebraischen Gebiet, eine ebenso vollständige und von jeder fremden Hilfe unabhängige Allgemeinheit. Wie es in Bezug auf die beiden Arten von Geometrie bei den neuesten Untersuchungen steht, hauptsächlich in der Mengenlehre, lassen wir noch dahingestellt sein (I A 5, *Schoenflies*, Nr. **16**; III AB 2, *v. Mangoldt*, Nr. **8**, **9**). *Es soll die Aufgabe der folgenden Darstellung sein, zu zeigen, wie sich die beiden Behandlungsweisen der Geometrie während des 19. Jahrhunderts entwickelt und durchdrungen haben*, und wie in den grundlegenden geometrischen Untersuchungen öfters beide Methoden auf ihren Anteil am Endresultat Anspruch machen dürfen.

5. Die Stellung von Monge. Durch die Einführung des Koordinatenbegriffes in die Geometrie, und die kurz darauf (Ende des 17. Jahrhunderts) durch *Newton* (1642—1727) und *Leibniz* (1646—1716) erfolgte Erfindung der Infinitesimalrechnung (II A 2, *Voss*) wurde der mathematischen Tätigkeit ein weites Gebiet eröffnet. Aufgaben aus den älteren Zeiten, welche der synthetischen Geometrie unzugänglich erschienen, ließen sich durch die neuen Methoden mit überraschender Leichtigkeit behandeln; das ist besonders an der Theorie der infinitesimalen Beziehungen der Kurven und Flächen (III D 1, 2, *v. Mangoldt;* 3, *v. Lilienthal*) ersichtlich, an deren Spitze *Clairaut* (1715—65)[6]) und *Euler* (1707—83)[7]) stehen.

Am Ende des 18. Jahrhunderts herrscht in Frankreich ein Aktivitätszentrum, und alles gruppiert sich um die neugegründete „École polytechnique". Die zentrale Stellung nimmt *G. Monge* (1746—1818) ein, welcher in seiner Hauptleistung „Application de l'analyse à la géométrie"[4]), zugleich mit der Ausgestaltung der Aufgaben der Flächen-

6) Traité des courbes à double courbure (Paris 1731).

7) Introductio in analysin infinitorum, 2 (Lausannae 1748); Recherches sur la courbure des surfaces (Berlin Abh. 16, 1760).

theorie, die Geometrie zum ersten Male für eine rein analytische Theorie — die Theorie der partiellen und totalen Differentialgleichungen — ausnutzt; insbesondere sucht er durch geometrische Konstruktionen ein Verständnis dieser Differentialgleichungen und der betreffenden Integrationsprobleme zu gewinnen (vgl. Nr. **36, 39**). — Ein zweites Werk von *Monge* sind seine „Leçons de géométrie descriptive“ [7a]); und obwohl das wesentlich eine organisatorische Leistung ist, indem der Unterricht der darstellenden Geometrie (III A, B 7, *Papperitz*) in feste Form gebracht und weiteren Kreisen zugänglich gemacht wird, so war es doch *der erste Schritt zum Neuaufblühen der synthetischen Geometrie.* In diesem Gebiete dürfen wir als Hauptpunkte von *Monge's* Leistung die beiden folgenden bezeichnen:

1) Die systematische Anwendung von *Projektionen* — obwohl bei ihm nur von Orthogonalprojektionen —, durch welche er die Beziehungen zwischen zweidimensionalen und dreidimensionalen Figuren beherrscht, sowie auch Eigenschaften der einen aus denen der anderen ableitet, und welche von jener Zeit an zu einem selbständigen Untersuchungsmittel erwachsen sind;

2) Die Einführung einer neuen Beweismethode, welche die älteren Geometer als unstreng und unzulässig verworfen hätten, aber in *Monge's* und seiner Schüler Händen Erfolg haben sollte, der *„Méthode des relations contingentes“* [8]), nach welcher man das Auftreten oder das Nichtauftreten gewisser Umstände als zufällig („contingent“) betrachtet, und folglich einen bei ihrem Auftreten bewiesenen Satz (z. B. in der Voraussetzung, daß eine Fläche 2. Grades von einer gewissen geraden Linie getroffen wird) stillschweigend als allgemein bewiesen ansieht und ausspricht (d. h. auch für den Fall, daß obige Linie die Fläche 2. Grades nicht trifft [9])). Diese glückliche Idee sollte erst durch *Poncelet's* „Principe de continuité“ (Nr. 7), durch die analytische Übersetzung der Beweisführung, und zuletzt noch durch die Imaginärtheorie (Nr. **14** ff.) ihre Begründung erhalten.

6. Die Nachfolger von Monge. Unter den Schülern von *Monge* entsteht der Wunsch, die zahlreichen Sätze, welche die Koordinatenmethode der Geometrie erworben hatte, aus dieser letzten Wissenschaft allein, ohne fremde Hilfe, durch die neuen Methoden abzu-

---

7a) Erste Veröffentlichung an der École normale, 1795; in Buchform 1799 (an VII) erschienen.

8) Bezeichnung nach *M. Chasles*, Aperçu historique, p. 197 u. ff. S. auch ebenda, Note XXIV.

9) Géometrie descriptive, Nr. 35 u. ff.

leiten. In dieser Hinsicht sind in erster Linie die Arbeiten von *L. N. M. Carnot* (1753—1823) zu nennen: *De la corrélation des figures de géométrie* (Paris 1801), die *Géométrie de position* (Paris 1803) und die unter dem Namen *Essai sur la théorie des transversales* vielzitierte Schrift[10]). Er bedient sich mit Vorliebe von Transversalenbetrachtungen, welche von einer Verallgemeinerung des Satzes des *Menelaus*, betreffend die Schnittpunkte einer ebenen Kurve (an Stelle einer geraden Linie) mit den Seiten eines Dreiecks, ausgehen. Besonders entwickelt sich die Lehre der Kegelschnitte und Flächen 2. Grades (III C 1, 2 *Dingeldey, Staude*), deren bereits von *Monge* vielfach behandelte Polarentheorie *C. J. Brianchon* (1783—1864) auf seinen Satz über das einem Kegelschnitte umbeschriebene Sechsseit führt[11]). Und alles gipfelt in *J. V. Poncelet*'s *„Traité des propriétés projectives des figures“*, welcher die erste systematische Darstellung der „Projektiven Geometrie“ (III A, B 6, *Schoenflies*) im heutigen Sinne ist.

II. Einsetzen der synthetischen Geometrie durch Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles.

7. Poncelet's „Traité“. Poncelet's „Traité“[12]) markiert den Übergang von der älteren zur neueren synthetischen Geometrie, indem hier zum ersten Male gewisse moderne Begriffe und Gesichtspunkte in bestimmter Form auftreten und rationelle Anwendung finden. Als Hauptpunkte sind die folgenden hervorzuheben:

1) *Poncelet* (1788—1867) führt schon am Anfang seines „Traité“ den Begriff der Projektion, und zwar der allgemeinsten *„Zentralprojektion“* ein (Nr. 1 u. ff.), und macht daraus ein Mittel, um aus Eigenschaften einfacher Figuren Eigenschaften komplizierter Figuren, in die sich erstere projizieren lassen, abzuleiten. Dabei bietet sich von selbst der Unterschied dar zwischen den *„projektiven Eigenschaften“* der Figuren, d. h. solchen, die durch Projektion ungeändert bleiben (Nr. 5) (III A, B 6, *Schönflies*), und den „nicht projektiven“; zu ersteren gehören die sämtlichen Eigenschaften *„der Lage“*, dagegen nur spezielle *„metrische“* Eigenschaften (Nr. 7); darunter weist *Poncelet* (Nr. 21)

---

10) Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales (Paris 1806).

11) Sur les surfaces courbes du second dégré, J. éc. polyt. 6 (1806), p. 297. Beweis erst in Bd. 10 (1810), p. 1.

12) Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822), 2te Aufl., 2. Bde., 1865—66.

hin auf das schon bei *Brianchon*[13]) vorkommende *Doppelverhältnis* von vier Punkten einer geraden Linie, dessen Invarianz gegenüber beliebiger Projektion auf einen bekannten Satz des Pappus hinauskommt[14]). — Bei der systematischen Anwendung der Zentralprojektion wird es auch notwendig, das *unendlich Weite* zu beherrschen; was *Poncelet* (zugleich mit anderen Betrachtungen) dazu führt, das unendlich Weite der Ebene als eine gerade Linie von unbestimmter Richtung (Nr. 96), das unendlich Weite des Raumes als eine Ebene von unbestimmter Stellung (Nr. 580) aufzufassen, und daraufhin allgemein gültige Sätze über Lagenbeziehungen aufzustellen. Mit der Zentralprojektion verbindet er die Betrachtung der „*homologischen Figuren*“ in der Ebene (Nr. 297 u. ff.) und im Raume (d. h. die sogen. „Reliefperspektive“; Nr. 576 u. ff.): ein erster Ansatz zur Betrachtung der „kollinearen Beziehung“ zwischen Grundgebilden 2. oder 3. Stufe.

2) In *Poncelet*'s Theorie der Kegelschnitte und Flächen 2. Grades, wie sie bereits im „Traité“ entwickelt wird, und noch mehr in seinem „Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques“, welches 1824 der Pariser Akademie vorgelegt wurde, aber erst 1826 in einem kurzen Auszuge[15]) und 1829 in extenso[16]) zum Abdruck gelangte, findet sich ein bemerkenswerter Ansatz für das *Dualitätsprinzip.* Diese grundlegende Beziehung zwischen „Punkt“ und „Gerade“ in der Ebene, sowie auch zwischen „Punkt“ und „Ebene“ im Raume, versuchte *Gergonne* in drei 1824—27 erschienenen Arbeiten[17]) dahin zu begründen, daß die Fundamentalsätze der Geometrie eben jene Wortumwechslungen gestatten[18]), und daß sich dieses Symmetriegesetz als „Principe de dualité“ durch die gesamte Geometrie der Ebene bezw. des Raumes hindurchzieht. Das war der Anfang eines Prioritätsstreites zwischen *Poncelet* und *Gergonne*[19]). Sollte auch das Dualitätsgesetz erst in späterer Zeit durch *Möbius* (1827) und *Plücker* (1831) (Nr. 8, 12) in voller Allgemeinheit aufgefaßt und begründet werden, so war doch *Poncelet* der erste, welcher die weitgehende Bedeutung

---

13) Mémoire sur les lignes du second ordre (Paris 1817).

14) Mathem. Collect. 7, Satz 129. Im Druck zuerst lateinisch durch *F. Commandino* herausgegeben (Venetis 1589).

15) Gerg. Ann. 17 (1826), p. 265.

16) J. f. Math. 4 (1829), p. 1. Abgedruckt in der 2. Aufl. des „Traité“, Bd. 2, p. 57 u. ff.

17) Gerg. Ann. 15 (1824—25), p. 157; 16 (1825—26), p. 209; 17 (1826—27), p. 214.

18) In moderner Aussprache, eine „automorphe Transformation“ mit der Periode 2.

19) Vgl. *E. Kötter*, Bericht, p. 160 u. ff.

eines Spezialfalles desselben, der Polarentransformation, eingesehen und ausdrücklich hervorgehoben hat, während *Gergonne* das allgemeine Gesetz bereits in den ersten Elementen der Geometrie erkannte, aber nur beobachten lernte.

3) Bei *Poncelet* tritt als „*Principe de continuité*“ [III C 3, Abzählende Methoden, *Zeuthen*, Nr. 5—7] eine vorläufige Rechtfertigung — wenn auch noch nicht eine eigentliche Begründung — der Methode auf, die *Monge* als „Méthode des relations contingentes“ stillschweigend anwendete (s. oben, Nr. 5). „Ist eine Figur aus einer anderen durch stetige Veränderung hervorgegangen, und «ebenso allgemein als diese», so kann eine an der ersten Figur bewiesene Eigenschaft ohne weiteres auf die andere übertragen werden“[20]). Es besteht bei ihm sozusagen die Auffassung, daß eine Eigenschaft, die einmal vorhanden ist, bei kontinuierlicher Änderung der Figur nicht verschwinden kann, und daß man folglich berechtigt ist, aus dem Falle, in welchem gewisse zum Beweise erforderliche Elemente wirklich auftreten, auch auf den Fall zu schließen, in welchem diese Elemente „ideell“ sind. Dieses Prinzip sucht *Poncelet* gewissermaßen durch Analogie mit der Koordinatenmethode, d. h. mit der Algebra zu rechtfertigen[21]). Ja, um an „die Analogie zwischen den Ideen und der Sprache“ fest zu halten (Nr. 50), spricht er ohne weiteres von einer „ideellen Sehne“ zweier Kegel-

20) Vgl. die „Introduction“ des „Traité“ p. XIII u. ff. Weiteres über das Kontinuitätsprinzip findet sich in den „Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques“ (Applications d'analyse et de géométrie . . ., Paris 1862—64, 2, p. 296—312).

21) Es gibt bekanntlich eine große Menge analytischer Prozesse, welche erst im komplexen Gebiete stets durchführbar sind und zu einem einfachen stets gültigen Endresultat führen; so oft die analytische Behandlung eines geometrischen Problems auf einen derartigen Prozeß hinauskommt — wie es in der algebraischen Geometrie, wegen des Auftretens des Fundamentalsatzes der Algebra (I B 1 a, *Netto*, Nr. 7), fortwährend geschieht —, wird man das Resultat, insbesondere die Anzahl der vorhandenen Lösungen nicht aussprechen können, ohne eine große Anzahl von Ausnahmefällen hinzuzufügen, falls man nicht die eventuellen imaginären Lösungen durch ebenfalls „imaginäre“ (den reellen gleichberechtigte) Elemente interpretiert. Es empfiehlt sich daher, für derartige analytische Entwicklungen den Punktraum von Hause aus als Inbegriff aller beliebig komplexer Zahlentripel einzuführen, und jedes aus nicht sämtlich reellen Zahlen bestehendes Tripel als einen „imaginären“ oder „komplexen“ Punkt zu definieren; hierin liegt eine bloß formelle, aber doch strenge Einführung der imaginären Elemente, welche für die analytische Geometrie zulässig ist. Für die synthetische Geometrie ist aber eine entsprechende Erweiterung der Begriffe, Punkt, Gerade usw. erforderlich, wie sie *v. Staudt* geleistet hat (Nr. 14).

schnitte und von „imaginären Schnittpunkten“, und erkennt in diesen „expressions purement figurées, mais fondées sur des rapports exacts et rigoureux“ (Nr. 62) das einzige Mittel, durch welches die synthetische Geometrie sich zu einer ebenso vollen Allgemeinheit als die Analysis erheben kann. Dadurch kommt er zu der Bemerkung (Nr. 94), daß alle Kreise einer Ebene „ont idéalment deux points imaginaires communs à l'infini“, und daß (Nr. 95) je zwei von diesen Kreisen auch eine im Endlichen gelegene reelle oder ideelle gemeinsame Sehne besitzen; welche aber für konzentrische Kreise ebenfalls ins Unendliche übergeht. Ebenso besitzen zwei Kugeln (Nr. 593), und allgemeiner je zwei ähnliche und ähnlich gelegene Flächen 2. Grades eine unendlich weit liegende reelle oder ideelle gemeinsame ebene Schnittkurve. Man ersieht daraus, daß die für die folgende Entwicklung grundlegenden Begriffe der Kreispunkte einer Ebene und des Kugelkreises im Raume in bestimmter Form bereits vorliegen, und, obwohl unsystematisch, schon angewandt werden, um metrische Beziehungen projektiv aufzufassen.

8. **Möbius.** Das Zentrum der geometrischen Tätigkeit siedelt nun nach Deutschland über, wo die neuen Ideen der französischen Schule und insbesondere die von *Poncelet* weiter verfolgt werden, und mit der analytischen Geometrie in Verbindung treten. Im Gebiete der synthetischen Geometrie sind hier *A. F. Möbius* (1790—1868), welcher auch Analytiker war, und *J. Steiner* (1796—1863) zu nennen.

In *Möbius'* „Barycentrischer Calcul“[21a]) wird (§§ 217 u. ff.) die *allgemeine kollineare Verwandtschaft ebener* oder *räumlicher Figuren* betrachtet, und deren eindeutige Bestimmung durch 4 resp. 5 Paare entsprechender Punkte in allgemeiner Lage festgesetzt. Bemerkenswert ist der Ansatz (§§ 247—48) zu einer *Klassifikation der Eigenschaften geometrischer Figuren*, je nach den Verwandtschaften (Kollineation, Affinität, Ähnlichkeit), bei welchen diese Eigenschaften sich „invariant“ verhalten, wobei das vielfach behandelte „*Doppelschnittsverhältnis*“ als die fundamentale Invariante der kollinearen Verwandtschaft erscheint.

Durch die *reziproke Beziehung ebener Figuren* (§§ 285 u. ff.) gewinnt *Möbius* das Mittel, einem Satze über Lagenbeziehungen aus der ebenen Geometrie seinen „dualen“ an die Seite zu stellen, ohne sich eines vermittelnden Gebildes 2. Grades zu bedienen, d. h. das *Dualitätsprinzip* in seiner allgemeinen Fassung streng aufzustellen.

21a) Leipzig 1827. Ges. Werke 1 (Leipzig 1885), p. 1.

9. Steiner. In seiner „Systematischen Entwicklung“[22]) hatte sich *Steiner* die Aufgabe gestellt, die Ergebnisse der letzten Jahrzehnte im Gebiete der Geometrie zu einem organisch zusammenhängenden Ganzen zusammenzufassen. Von den fünf Abschnitten, die vorläufig geplant waren, ist nur einer zustande gekommen, welche folgende Anordnung der projektiven Geometrie enthält:

1) Die Aufzählung der *Grundgebilde* der verschiedenen Stufen (Punktreihe, Strahlenbüschel, usw.).

2) Die Betrachtung ihrer *perspektivischen Lagen* und der daraus entspringenden ein-eindeutigen Korrespondenzen, welche durch das Heranziehen der unendlich fernen Elemente vervollständigt werden.

3) Der Begriff der *projektiven Korrespondenz* zwischen Grundgebilden 1. Stufe, indem man, von der perspektiven Lage zweier Gebilden ausgehend, ihre ein-eindeutige Zuordnung festhält, während die Gebilde selbst (jedes für sich als ein starres System gedacht) in neue Lagen übergehen, insbesondere in eine „schiefe“ Lage, in welcher entsprechende Elemente nicht mehr ineinander liegen.

4) In zwei projektiven Gebilden erster Stufe haben entsprechende Quadrupel gleiches Doppelverhältnis; und *ihre Beziehung ist durch drei Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt.* Von hier aus wird die Theorie der projektiven Beziehungen mit den betreffenden Konstruktionen ausführlich entwickelt.

5) Die Erzeugung der Kegelschnitte und ihrer Tangentenenveloppen durch projektive Strahlenbüschel bezw. Punktreihen wird für den Kreis direkt erörtert, und von da aus auf jeden Kegelschnitt und auf die Kegelflächen durch Projektion übertragen. Aus dieser Erzeugung lassen sich „fast alle anderen Eigenschaften der Kegelschnitte in einem umfassenden Zusammenhange und auf eine überraschend einfache und anschauliche Weise entwickeln“.

6) Auch für das „einfache“ (d. h. einschalige) Hyperboloid werden drei verschiedene Erzeugungen angegeben (§ 50 u. ff.), nämlich a) durch projektive Punktreihen, die nicht in einer Ebene liegen; b) durch projektive Ebenenbüschel mit schiefen Achsen; c) durch die Gesamtheit der geraden Linien, welche drei feste zu je zwei schief liegende gerade Linien treffen[23]). Als spezieller Fall wird (§ 52) das hyperbolische Paraboloid angeführt.

---

22) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander . . ., Berlin 1832.

23) Die Erzeugung c) tritt bei *Monge* auf (Géométrie descriptive, an VII, Additions, 2). Die beiden anderen waren nur an metrischen Spezialfällen be-

10. Weiterführung des Steiner'schen Programms. *Steiner*'s „Entwicklung" enthält den Ansatz eines allgemeinen und umfangreichen Programms, nämlich der *rein synthetischen Definition geometrischer Gebilde als Erzeugungen projektiver Grundformen.* Dieses Programm wurde später durch andere weiter verfolgt; insbesondere durch *J. Seydewitz* (1807—1852) (eingehendere Untersuchung der projektiven Beziehungen einstufiger Gebilde und der Involutionen, mit Anwendungen auf die Theorie der Kegelschnitte[23a]); projektive und quadratische Verwandtschaften zwischen Grundgebilden zweiter Stufe[23b]); Erzeugung der Flächen 2. Ordnung durch reziproke Strahlenbündel[24]), und deren Konstruktion aus neun gegebenen Punkten[24a]); Erzeugung der Raumkurven 3. Ordnung durch kollineare Strahlenbündel[24b])); ferner durch *H. Schroeter* (1829—1892), welcher die *Grassmann*'sche Erzeugung der Flächen 3. Ordnung durch drei kollineare Ebenenbündel wieder aufnahm[25]), die Flächen 2. Grades weiter verfolgte, und die analytisch bereits hervorgetretenen Eigenschaften der ebenen Kurven 3. Ordnung und der Raumkurve 4. Ordnung erster Spezies auf rein geometrischem Wege ableitete[26]); durch *Th. Reye*, dessen „Geometrie der Lage", in ihren aufeinanderfolgenden Auflagen[26a]), diese sämtlichen Auseinandersetzungen zugleich mit neuen Entwicklungen (tetraedraler Komplex, einfachste Strahlenkongruenzen, *Kummer*'sche Fläche, . . .) zusammenfaßte; durch *Fr. Schur*, welcher diesen Weg fortsetzte, wo *Reye* aufhörte (ebene Kurven 3. Ordnung, Raumkurven R_3^6, Flächen 4. Ordnung, die

---

kannt (*E. Kötter*, Bericht, p. 76—78) und sind erst durch *Steiner* der allgemeinen projektiven Behandlung zugänglich geworden.

23a) Archiv Math. Phys. 4 (1844), p. 246; 5 (1844), p. 225.

23b) Ebenda 7 (1846), p. 113; 8 (1846), p. 1.

24) Ebenda 9 (1847), p. 158, 187.

24a) a. a. O. S. auch ebenda 17 (1851), p. 275.

24b) Ebenda 10 (1847), p. 203. Die Erzeugung der Raumkurven 3. Ordnung durch drei projektive Ebenenbüschel tritt erst bei *Chasles* auf (Paris C. R. 45 (1857), p. 189).

25) J. f. Math. 62 (1863), p. 265. Betreffend *Grassmann*, s. J. f. Math. 49 (1855), p. 47; insbes. §§ 5—6; Ges. Werke 2¹ (Leipzig 1904), p. 180.

26) Man vgl. die Lehrbücher: *Jacob Steiner*'s Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2: die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften (Leipzig 1866, 2. Aufl. 1876); Theorie der Oberflächen 2. Ordnung und der Raumkurven 3. Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde (Leipzig 1880); die Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung (Leipzig 1888); Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve 4. Ordnung erster Spezies (Leipzig 1890).

26a) 1. Aufl., 2 Bde., Leipzig 1868; 2. Aufl. 1882; 3. Aufl., 3 Bde., 1886—92; 4. Aufl.; Bd. 1, 1899; Bd. 2, Stuttgart 1907.

eine solche R_3^6 enthalten)[27]. Es lag aber in der Natur der Sache, daß gewisse Übelstände nicht vermieden und eine volle Allgemeinheit in den erzeugten Figuren nicht immer erreicht werden konnte. Der Begriff des Doppelverhältnisses, welcher von der Betrachtung der Längen und Winkel, d. h. von metrischen Begriffen ausging, war in der *Steiner*'schen Theorie der projektiven Beziehungen immer noch grundlegend[27a]; die Erzeugung durch projektive Grundformen führte noch nicht auf die allgemeinsten Kurven und Flächen beliebiger Ordnung; und die imaginären Elemente entzogen sich der ganzen Behandlung.

11. Chasles. Zu der *Poncelet-Steiner*'schen Richtung darf noch der französische Geometer *M. Chasles* (1796—1880) gerechnet werden. Seiner Leistung liegen drei Begriffe zugrunde: 1) das Doppelverhältnis von vier Elementen, welches er als „*rapport anharmonique*" bezeichnet; 2) die projektiven Beziehungen, oder „*divisions homographiques*", welche durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Quadrupel bedingt werden; 3) die involutorische Lage von sechs Elementen eines einstufigen Gebildes. Diese Begriffe treten im „Aperçu historique" (1837), besonders in den Noten, fortwährend auf, und werden im *Traité de géométrie supérieure* (Paris 1852; 2. Aufl. 1880) ausführlich besprochen. In dem auf den Aperçu historique folgenden, aber bereits 1829 redigierten *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie* werden die reziproken und kollinearen Beziehungen räumlicher Figuren eingehend untersucht (für ebene Figuren, s. den gen. Traité, sect. 3); darunter weist *Chasles* (1, § 24), von der Betrachtung einer infinitesimalen Bewegung oder auch eines Kraftsystems ausgehend, auf den Fall des Nullsystems hin (s. Anm. [42]). Im *Traité des sections coniques* (1, Paris 1865) wird die Theorie der Kegelschnitte von der projektiven Erzeugung aus entwickelt.

Von *imaginären Elementen* wird bei *Chasles*, ebenso wie bei *Poncelet*, in einer noch unbestimmten Form geredet. Im großen und ganzen sieht er in der Algebra und in der gleichmäßigen Anwendbarkeit der analytischen Operationen auf reelle und komplexe Zahlen die eigentliche Begründung der Einführung imaginärer Elemente in die Geometrie. Für *Paare konjugiert-imaginärer Punkte* gibt *Chasles* auch *reelle Darstellungen* an[28]: nämlich durch

27) Über die durch kollineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen, Math. Ann. 18 (1881), p. 1.

27a) In *Reye*'s „Geometrie der Lage" wird aber *v. Staudt*'s Definition der projektiven Beziehung durch harmonische Würfe (Nr. 13) aufgenommen.

28) „Les imaginaires, qui se présentent toujours par couples, comme dans

ihren (reellen) Mittelpunkt, und das Produkt der Abstände von einem festen Anfangspunkte[29]); und weiter spricht er auch von *imaginären Kreisen* einer reellen Ebene, die er durch reellen Mittelpunkt und negatives Radiusquadrat darstellt[30]) und zur Aufstellung von Eigenschaften der Kegel mit kreisförmiger Basis benutzt. Er bemerkt auch, daß die Polarität in bezug auf einen imaginären Kreis sich von einem bestimmten Punkte aus durch eine orthogonale Polarität projizieren läßt; aber die eigentliche Bedeutung dieses Punktes — daß er nämlich eine der beiden „Nullkugeln" des durch den vorgelegten Kreis bestimmten Kugelbüschels ist — wurde erst später durch *Möbius* erkannt[31])[32]).

III. Entsprechende Entwicklung der analytischen Geometrie.

12. Möbius, Plücker. In der analytischen Geometrie stehen bis 1825 die eleganten (größtenteils in Gerg. Ann. enthaltenen) Abhandlungen von *H. Gergonne* (1771—1859) und *G. Lamé*'s (1795—1870): „Examen des différentes méthodes . . ." (Paris 1818) im Mittelpunkte. Durch die synthetische Entwicklung der projektiven Geometrie erhielt die analytische Geometrie einen bedeutenden Anstoß; neue Probleme boten sich ihrer Behandlung dar, und für diese Behandlung mußten auch neue Methoden geschaffen werden. Es steht hier nochmals *A. F. Möbius* und mit ihm *J. Plücker* (1801—1868)[32a]) im Vorder-

---

les racines d'une équation du 2nd dégré, n'offrent aucune difficulté dans leur interprétation, et se trouvent toujours représentés par des éléments réels . . ." (Rapport sur les progrès de la géometrie, Paris 1870, chap. 4, p. 220—21).

29) Géométrie supérieure, chap. 5.

30) a. a. O. chap. 33, 34.

31) Über imaginäre Kreise, Leipzig Ber. 9 (1857), p. 38 = Werke 2, p. 315.

32) An dieser Stelle möge noch erwähnt werden, daß *E. Laguerre* (Soc. philomatique Bull., 1870, p. 95; Nouv. Ann. de math. (2) 11 (1872), p. 14, 108, 241 = Oeuvres 2 (Paris 1905), p. 109, 238) konjugiert-imaginäre Punkte des Raumes durch den reellen Kreis darstellt, welcher den von diesen Punkten auslaufenden Nullkegeln gemeinsam ist (III D 3, *v. Lilienthal,* Nr. 4). Diese Darstellung tritt auch bei *W. Fiedler* auf (Cyklographie, Leipzig 1882, p. 138 u. ff.). Durch Umlaufung des *Laguerre*schen Kreises in bestimmtem Sinne erfolgt die Trennung der beiden konjugiert-imaginären Punkte. Entsprechendes für imaginäre Punkte der Ebene lieferte *Laguerre* in Nouv. Ann. de math. (2) 9 (1870), p. 163, 241 = Oeuvres 2, p. 83, 98.

32a) Eine eingehende Würdigung von *Plücker*'s Arbeiten ist in der Gedächtnisrede von *A. Clebsch* enthalten (Gött. Abh. 15 (1872), abgedruckt in *Plücker*s Ges. Wiss. Abh. 1, herausgegeb. von *A. Schönflies* (Leipzig 1895), p. IX). Betreffend den wissenschaftlichen Nachlaß, s. *A. Schönflies,* Math. Ann. 58 (1904), p. 385.

grund, und ihre Hauptleistungen dürfen wir in folgenden Punkten zusammenfassen:

1) *Es werden zum ersten Male homogene Koordinaten eingeführt*, und dadurch das unendlich Weite der analytischen Geometrie zugänglich gemacht. Bei *Möbius* geschieht das durch *barycentrische Koordinaten*[33]): jeder Punkt D einer Ebene läßt sich als Schwerpunkt irgend dreier anderer nicht in einer Geraden liegender Punkte A, B, C derselben Ebene in der Form $D = pA + qB + rC$ darstellen, deren Gewichte p, q, r in bestimmten Verhältnissen (und zwar gleich den Dreiecken $DBC : DCA : DAB$) zueinander stehen; es heißen dann p, q, r die „homogenen barycentrischen Koordinaten" von D. Bei *Möbius* findet sich gewissermaßen auch der Begriff der „Gleichung der unendlich fernen Geraden", insofern er bemerkt, daß wenn $p + q + r = 0$ ist, der Punkt $pA + qB + rC$ unendlich fern in bestimmter Richtung liegt (§ 32). Der Begriff der *homogenen Gleichung einer ebenen Kurve* in der Form $f(p, q, r) = 0$ tritt erst bei *Plücker* auf, welcher die Abstände eines beliebigen Punktes von den drei Seiten eines festen Dreiecks allgemein als *Dreieckskoordinaten* einführt[34]) und die vielfachen Übereinstimmungen zwischen seinen Resultaten und *Poncelet's* Äußerungen über das unendlich Weite öfters hervorhebt.

2) In einer Arbeit aus dem Jahre 1830[35]) bemerkt *Plücker*, daß man die Konstanten der Gleichung einer geraden Linie als *Koordinaten der Linie* auffassen kann, und daraus *eine neue Art* gewinnt, *Kurven durch Gleichungen darzustellen*; nämlich als Enveloppen ihrer Tangenten. Es war das ein erster Ansatz zur Betrachtung *beliebiger Raumelemente*, und zu deren Darstellung durch Koordinaten[36]) (III A B 7, *Müller*, Koordinaten; III C 10, *Waelsch*, Höhere Raumelemente). Und in dem Umstande, daß Punkt und Gerade von vornherein als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie der Ebene angesehen werden dürfen, daß die Bedingung ihrer vereinigten Lage die symmetrische Gestalt

33) Barycentrischer Calcul, Abschn. I, Kap. 3.

34) Über ein neues Koordinatensystem, J. f. Math. 5 (1829), p. 1, oder auch: Ges. Wiss. Abh. 1, p. 124.

35) Über eine neue Art . . ., J. f. Math. 6 (1830), p. 107, oder auch: Ges. wiss. Abh., 1, p. 178. Viel ausführlicher im 2. Bde., Abt. 1 der „Analytisch-geometrischen Entwicklungen", Essen 1831.

36) Ebenenkoordinaten im Raume und die daraus fließende neue Darstellung der Flächen und Developpabeln, werden im J. f. Math. 9 (1832), p. 124 betrachtet (Abh. 1, p. 224). Ausführlicher im „System der Geometrie des Raumes" (Düsseldorf 1846, 2. Aufl. 1852), wo auch (Nr. 258) vorläufig bemerkt wird, daß sich die gerade Linie im Raume durch vier Koordinaten bestimmen läßt.

$ux + vy + 1 = 0$ hat, daß eine beliebige Kette algebraischer Gleichungen mit zwei Variabeln eine doppelte Interpretation — durch Punkt- und Geradenkoordinaten — erhalten kann, erblickt er das ganze Geheimnis des *Dualitätsprinzips*, und hebt das an verschiedenen Stellen hervor[37]).

3) Zusammen mit *Gergonne*[37a]) und *Bobillier*[38]) hat *Plücker* die *Methode der abgekürzten Bezeichnung* in die analytische Geometrie eingeführt[39]) und vielfach ausgenutzt, in welcher für ganze Funktionen der Koordinaten, mit denen man in mannigfaltiger Weise operieren muß, Abkürzungen angewandt werden.

4) Die analytische Darstellung der *kollinearen Verwandtschaft* in der Ebene und im Raume durch barycentrische oder Dreiecks- resp. Tetraeder-Koordinaten kommt darauf hinaus, daß die Koordinaten eines beliebigen Punktes des einen Systems lineare Funktionen der Koordinaten des entsprechenden Punktes des andern sind[40]).

5) Die *reziproke Verwandtschaft* stellt *Plücker* durch eine *bilineare Gleichung* dar — die *aequatio directrix* —[41]), und gelangt dadurch zu seinem *Prinzip der Reziprozität*, in welchem er auf eine zweite Weise die Grundlage der Dualität erblickt. Bei *Möbius* kommt diese bilineare Gleichung auch vor, insbesondere für die räumliche Reziprozität, in welcher jeder Punkt der entsprechenden Ebene angehört, d. h. für den Fall des „*Nullsystems*"[42]).

---

37) Vorrede zum 2 Bde der Analytisch-geometrischen Entwicklungen, p. 8; ebenda, Fußnote p. 283—84; System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, Abschn. I Man vergl. auch: *E. Kötter*, Bericht, Fußnote zu p. 169.

37a) Recherches sur quelques lois générales .., Gerg. Ann 17 (1826—27), p. 214.

38) Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue, Gerg. Ann. 18 (1827—28), p. 320.

39) Über ein neues Prinzip der Geometrie ... J. f. Math. 5 (1829), p. 268; oder auch Abh. 1, p. 159; Anwendung auf Kurven 3. Ordnung in J. f. Math. 34 (1847), p. 329 (Abh. 1, p. 404). Als Ausgangspunkt dieser Methode ist die spezielle Bemerkung von *G. Lamé* anzusehen, daß durch die Gleichung $mE + m'E' = 0$ jedes Gebilde dargestellt werden kann, welches die sämtlichen Schnittpunkte zweier Gebilde derselben Ordnung $E = 0$, $E' = 0$ enthält (Gerg. Ann. 7 (1816—17), p. 229; Examen des différentes méthodes..., Paris 1818, p. 28).

40) *Möbius*, Barycentrischer Calcul, §§ 217 u. ff. Für die Kollineation im Raume s. *Plücker*, System der Geometrie des Raumes, § 1.

41) Andeutung in dem Anm. [34]) erwähnten Aufsatze: Über ein neues Koordinatensystem, Nr. 36 u. ff. Ausführlich in den Analytisch-geometrischen Entwicklungen 2, Nr. 697 u. ff.

42) J. f. Math. 10 (1833), p. 317 = Werke 1, p. 489. Zu dieser besonderen Beziehung war schon vorher, von mechanischen Betrachtungen ausgehend, *G. Giorgini* in einer 1827 verfaßten und 1828 erschienenen Arbeit gelangt (Mem. soc. it. d. sc. 20 (parte matem.), 1828, p. 243 [IV 2, *Timerding*, Nr. 10]). Be-

6) Was die *imaginären Elemente* betrifft, so operiert man, von *Plücker* anfangend, in der analytischen Geometrie in gleicher Weise mit reellen und imaginären Elementen[43]); und es ist beispielsweise selbstverständlich, daß alle Kugeln des Raumes durch die feste Kurve $x^2 + y^2 + z^2 = t = 0$ hindurchgehen.

IV. von Staudt. Insbesondere Gebilde 2. Grades und Imaginärtheorie mit Erweiterungen.

13. von Staudt. Einen bedeutenden und endgültigen Schritt machte die projektive Geometrie durch *G. C. Chr. von Staudt*'s „*Geometrie der Lage*" (Nürnberg 1847) und „*Beiträge zur Geometrie der Lage*" (3 Hefte, Nürnberg 1856—60). Als Hauptgedanken der „Geometrie der Lage" sind die beiden folgenden zu bezeichnen:

1) Die Benutzung der durch räumliche Betrachtungen gewonnenen Sätze über homologische Dreiecke und Vierecke und der darauf gegründeten Lagentheorie der harmonischen Gebilde zu einer neuen Definition der projektiven Beziehung zwischen Grundformen 1. Stufe, zu welcher (bei reellen Elementen) die Bedingung ausreicht, daß harmonischen Gebilden stets ebensolche entsprechen[44]).

2) Die Betrachtung des allgemeinen Polarsystems in der Ebene, durch welches der Kegelschnitt — und zwar zugleich als Punkt- und Liniengebilde — definiert wird. Dadurch wird auch der Fall des *reellen nullteiligen* Kegelschnittes einbegriffen, welcher sich der Erzeugung durch projektive Strahlenbüschel entzieht. Entsprechende Gebilde bei einer Dimension sind die (elliptischen und hyperbolischen) *Involutionen*;

---

treffend *Chasles*, s. Nr. 11. Ebenso ist als Vorläufer dieser Beziehung die Abhandlung von *Möbius* über einander zugleich um- und einbeschriebene Tetraeder anzusehen (J. f. Math. 3 (1828), p. 273 = Werke 1, p. 439).

43) S. beispielsw. System der analytischen Geometrie, Nr. 27 u. ff., Nr. 55 u ff.

44) Der *v. Staudt*'sche Beweis des Fundamentalsatzes, daß eine projektive Beziehung einstufiger Gebilde, welche drei getrennte Doppelelemente besitzt, notwendigerweise identisch ist (Nr. 106), und daß folglich eine projektive Beziehung stets durch drei Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt ist, war nicht einwandsfrei, ist aber später durch Heranziehen des *Cantor-Dedekind*'schen Kontinuitätsprinzips (I A 3, Grenzbegriff, *Pringsheim*, Nr. 4; III A, B 1, Prinzipien der Geometrie, *Enriques*, Nr. 7, 20) vervollständigt worden (vergl. *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1873), p. 132; ebenda 7 (1874), p. 531, *J. Lüroth* und *H. G. Zeuthen*, ebenda p. 535; *Klein*, Math. Ann. 37 (1890), p. 544, bez. p. 565f.; *G. Darboux*, Math. Ann. 17 (1880), p. 55). Bei Zulassung imaginärer Elemente ist in der Definition der Projektivität zwischen einstufigen Gebilden die weitere Bedingung erforderlich, daß entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, von derselben Art seien („Beiträge", 2. Heft, Nr. 215. Vergl. auch unten, Nr. 18).

bei drei Dimensionen die (nullteiligen, einteiligen und nicht geradlinigen, und geradlinigen) *Flächen 2. Grades.*

Durch das bei 1) angegebene Verfahren wurde der Aufbau der projektiven Geometrie ohne Heranziehen metrischer Begriffe ermöglicht. Und durch die Betrachtung des Polarsystems in der Ebene und im Raume gestaltete sich die allgemeine Theorie der Gebilde 2. Grades in ihrer möglichst einfachen und rationellen Form.

14. v. Staudt's Imaginärtheorie. Die erste Lösung des Problems: „Imaginäre Elemente durch wirklich vorhandene geometrische Gebilde zu definieren, und zwar derart, daß sie den reellen Elementen völlig gleichberechtigt seien“ verdanken wir *v. Staudt*'s „Beiträgen“.

Als „imaginäres Element (Punkt, gerade Linie, Ebene) erster Art“ definiert *v. Staudt* (§ 7) den Inbegriff einer elliptischen (d. h. keine Doppelelemente besitzenden) Involution auf einem einstufigen Gebilde (Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) und irgend eines der beiden auf dem Gebilde zu unterscheidenden (entgegengesetzten) Sinne[45]. Und als „imaginäre Gerade zweiter Art“ definiert er den Inbegriff einer elliptischen Involution auf einer Regelschar und eines bestimmten Sinnes auf letzterer. Die beiden aus einer und derselben Involution und den zwei verschiedenen Sinnen auf deren Träger bestehenden Elemente heißen „konjugiert-imaginär“. Sind AA_1, BB_1 irgend zwei Paare der elliptischen Involution, so lassen sich die beiden Sinne als ABA_1, AB_1A_1 voneinander unterscheiden, und die entsprechenden konjugiert-imaginären Elemente werden durch die Elementenreihen ABA_1B_1 resp. AB_1A_1B dargestellt. Sind die Paare AA_1, BB_1 zu einander harmonisch, so heißt die Darstellung auch harmonisch. Unter

45) Die Betrachtung des Sinnes erscheint zunächst als etwas willkürliches. Wir versuchen das nach Vorlesungserklärungen von *F. Klein* zu rechtfertigen. Bekanntlich führt in der analytischen Geometrie die Frage nach den in einer elliptischen Involution auf einer Punktreihe sich selbst entsprechenden Punkten auf eine Gleichung 2. Grades mit konjugiert-imaginären Wurzeln $a \pm bi$. Denken wir uns diese Involution auf der x-Axe der $x+yi$-Ebene gelegen, so sind die beiden Punkte $a \pm bi$ der $x+yi$-Ebene (I A 4, *Study*, Nr. 5) gerade diejenigen, aus welchen die vorgelegte Involution sich durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projizieren läßt; es erscheint also als zweckmäßig, diese beiden konjugiert-imaginären Punkte $a \pm bi$ durch jene Involution darzustellen. Diese beiden Punkte sind zugleich auch die Grundpunkte des Kreisbüschels, welcher die x-Axe zur Zentralaxe hat und die obige Involution ausschneidet. Umkreisen wir diese beiden Punkte $a \pm bi$ der $x+yi$-Ebene in einer und derselben Richtung, etwa in der Richtung des Uhrzeigers, und übertragen diese Umkreisung in kontinuierlicher Weise auf die x-Axe, so ergeben sich die beiden entgegengesetzten Sinne auf letzterer.

allen Darstellungen eines und desselben imaginären Elementes, welche von einem bestimmten Elemente A der Form ausgehen, ist eine aber auch nur eine harmonisch.

Die v. Staudt'sche *Theorie ist also eine Theorie der Involutionen und der Sinne in einstufigen Gebilden*; jeder Satz, welcher in ihr auftritt, könnte so ausgesprochen werden, daß nur von reellen Punkten, Geraden, Ebenen die Rede wäre.

Die Zugehörigkeit (Inzidenz) reeller und imaginärer Elemente, sowie auch imaginärer Elemente unter sich, wird derart definiert, daß die sämtlichen Grundsätze über eindeutige Bestimmung und über Durchschnitte von Ebenen und geraden Linien auch im imaginären Gebiet ihre Gültigkeit behalten.

Den Inbegriff von vier in bestimmter Reihenfolge zu betrachtenden Elementen eines einstufigen Gebildes nennt *v. Staudt* einen „*Wurf*“. Entsprechende Würfe zweier projektiver Gebilde heißen auch projektiv, oder einander *gleich*. Von geeigneten Definitionen der Fundamentaloperationen (§§ 19—21) ausgehend, wird ein „Rechnen mit Würfen“ entwickelt, und jeder Schar unter sich gleicher Würfe je eine *Zahl* zugeordnet (§§ 28, 29), welche mit dem (durch metrische Beziehungen definierten) Doppelverhältnisse der vier Elemente zusammenfällt.

Durch *v. Staudt*'s Leistung erreichte die geometrische Theorie der imaginären Elemente ihre strenge und endgültige Gestalt. *Es dürfen von jetzt an*, was hauptsächlich für die algebraische Geometrie (III, C) von grundlegender Bedeutung ist, *reelle und imaginäre Elemente als gleichberechtigt angesehen werden*, ebenso wie in den analytischen Entwicklungen die Koeffizienten und Variablen der auftretenden Gleichungen als beliebig komplex anzusehen sind. *v. Staudt* selbst hat die projektiven Beziehungen zweier Gebilde und die Theorie der Kegelschnitte mit Rücksicht auf das Imaginäre durchgeführt, wobei es sich zeigt, daß die Ausnahmen, welche die ausschließliche Betrachtung des Reellen übrig läßt, beseitigt werden, und zugleich Übereinstimmung mit den Resultaten der analytischen Geometrie stattfindet (s. auch Nr. **15**).

15. Weitere Ausbildung der Imaginärtheorie. Leider hat diese grundlegende Untersuchung nicht gleich diejenige Anerkennung und Verbreitung gefunden, die sie verdiente. Erst in *H. Pfaff*'s „Neuere Geometrie“[46]) wurde die *v. Staudt*'sche Definition der imaginären Elemente mit unwesentlichen Änderungen aufgenommen. *O. Stolz*[47])

46) Erlangen 1867, vgl. Abschn. I, §§ 9—10.
47) Math. Ann. 4 (1871), p. 416.

stellte sich die Aufgabe, *v. Staudt*'s Betrachtungen analytisch zu verfolgen, und zeigte, daß man die imaginären Elemente durch Systeme von komplexen Zahlen derart darstellen kann, daß die zwischen ersteren obwaltenden Beziehungen in den üblichen Beziehungen zwischen letzteren ihr analytisches Bild finden. *F. August*[48]) führte die imaginären Geraden 2. Art als Durchschnitte imaginärer Ebenen ein, deren reelle Träger (gerade Linien) sich nicht treffen (d. h. von Ebenen, die keinen reellen Punkt gemeinsam haben).

Eine wesentliche Änderung zu *v. Staudt*'s Verfahren hat *F. Klein*[49]) vorgeschlagen. Er geht von der Bemerkung aus, daß zwei konjugiert-imaginäre Punkte auf ihrer reellen Verbindungsgeraden stets Doppelelemente einer zyklischen Projektivität von beliebiger Ordnung n sind, und daß als Bild des *einzelnen* imaginären Punktes irgend ein *in bestimmtem Sinne durchlaufener* Cyklus dieser Projektivität dienen kann, während sein konjugierter durch denselben aber in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Cyklus dargestellt wird. Am einfachsten gestaltet sich das für $n = 3$, da jedes System von drei Punkten einer geraden Linie zyklisch projektivisch ist, und zwar nur auf eine einzige Weise[50]). Der komplexe Punkt wird dann durch *drei beliebige in bestimmter Reihenfolge zu nehmende reelle Punkte einer reellen Geraden* dargestellt, d. h. durch ein Punkttripel $abc \equiv bca \equiv cab$, während sein konjugierter Punkt $bac \equiv acb \equiv cba$ ist[51]). Dieses in bestimmter Reihenfolge zu nehmende Punktetripel enthält bereits alles, was zur Darstellung des einzelnen imaginären Punktes notwendig ist, und auch nicht mehr, da die drei Punkte a, b, c auf der geraden Linie beliebig angenommen werden dürfen.

Der Begriff der „zyklisch projektivischen Reihen" umfaßt auch *v. Staudt*'s „harmonische Darstellung" der imaginären Elemente. Ist nämlich $abcd$ eine solche Darstellung, so sind die beiden Paare ac, bd zueinander harmonisch; und es folgt daraus:

$$abcd \barwedge adcb \barwedge bcda,$$

d. h. $abcd$ ist eine cyklisch projektivische Reihe 4. Ordnung.

---

48) Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie, Programm der Friedrichsrealschule, Berlin 1872.

49) Gött. Nachr. 14. Aug. 1872, p. 373, abgedruckt in Math. Ann. 22 (1883), p. 242.

50) Für $n = 2$ dagegen auf ∞^1 Weisen: dieser Fall wäre also für *Klein*'s Darstellung ungeeignet.

51) Analytisch kommt diese Darstellung darauf hinaus, daß diese beiden konjugiert-imaginären Punkte durch die *Hesse*'sche Kovariante derjenigen kubischen Form, welche das Tripel a, b, c vorstellt, repräsentiert werden (Math. Ann. 22 (1883), p. 245).

Einen weiteren Fortschritt brachten für die Imaginärtheorie zwei Abhandlungen von *J. Lüroth*[52]). In der ersten Abhandlung wird gezeigt, daß man das durch *v. Staudt* erfundene Rechnen mit Würfen so erweitern und ausbilden kann, daß sich der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra auf eine algebraische Gleichung, die einen unbekannten Wurf enthält und deren Koeffizienten auch lauter Würfe sind, übertragen läßt: „Es gibt stets einen Wurf — und folglich auch n Würfe — für welche eine gegebene Funktion n^{ten} Grades eines unbekannten Wurfes dem Wurfe Null gleich wird." Es werden dann für Punkte und Geraden einer Ebene projektive (d. h. Wurf-) Koordinaten eingeführt, und gezeigt, daß sich die Bedingung der vereinigten Lage durch eine bilineare Gleichung darstellen läßt. Die zweite Abhandlung enthält Ausführungen zu der obigen *Klein*'schen Auffassung. Vereinfachende Zusätze zur ersten *Lüroth*'schen Abhandlung, mit der Aufstellung der linearen Gleichung einer Ebene oder eines Punktes des Raumes in Wurfkoordinaten, hat *R. Sturm*[52a]) gegeben.

Eine ausführliche Darstellung der *v. Staudt*'schen Theorie, mit der Einführung projektiver Koordinaten in den Grundformen 1., 2. 3. Stufe, gab *W. Fiedler* in seiner „Darstellenden Geometrie"[53]). Dadurch war die Beziehung zur analytischen Geometrie in endgültiger Weise gewonnen. *F. Enriques* erreichte das für den Punktraum auf einen Schlag[54]), indem er zwischen letzterem und dem als Inbegriff der homogenen Zahlenquadrupel $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ aufgefaßten „analytischen Raum" eine Kollineation herstellte, in welcher fünf unabhängigen Raumpunkten ebensoviele beliebige unabhängige analytische Punkte, z. B. (1000), (0100), (0010), (0001), (1111), entsprechen.

Die *v. Staudt*'sche Theorie vereinfacht sich besonders, wenn man nur konjugiert-imaginäre Elemente zu Paaren, und nicht voneinander getrennt, betrachten will, da das Heranziehen des Sinnes vermieden wird. Für diesen Fall lieferte *C. Segre*[55]) eine eingehende Behandlung.

---

52) Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Ann. 8 (1874), p. 145; ebenda 11 (1876), p. 84. Vgl. auch einen früheren Aufsatz in Gött. Nachr. 1873. [III AB 1, *Enriques*, Nr. 19].

52a) Math. Ann. 9 (1875), p. 333.

53) Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 2. Aufl. (Leipzig 1875) 3, p. 30 u. ff. (3. Aufl. 1883—88; 3, p. 67 u. ff.)

54) Lezioni di geometria proiettiva (Bologna 1898; 2. Aufl. 1904), deutsch durch *H. Fleischer* (Leipzig 1903), Anhang IV, V.

55) Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica, Torino Mem. (2), 38 (1886).

In Grundformen 1. Stufe werden (reelle, imaginäre) zueinander harmonische Paare durch vertauschbare (hyperbolische, elliptische) Involutionen, die Doppelelemente einer nicht involutorischen Projektivität durch die einzige mit letzterer vertauschbaren Involution (die „Involuzione unita") dargestellt. Ein Paar konjugiert-imaginärer Geraden 2. Art wird durch ein räumliches geschart involutorisches System, welches weder Doppelpunkte noch Doppelebenen besitzt, ein imaginärer Kegelschnitt durch ein Polarsystem, welches keine Ordnungskurve besitzt, eindeutig definiert. Die Sätze von *Desargues* und *Sturm* behalten auch im imaginären Gebiet ihre Gültigkeit.

Eine zusammenfassende Darstellung der geometrischen Imaginärtheorieen hat *A. Ramorino* gegeben[56]), welcher auch weitere Literatur anführt.

16. Spätere Erweiterungen. Hyperalgebraische Gebilde und bikomplexe Elemente. Versinnlichen wir uns die Gesamtheit der ∞^{2r} komplexen Elemente einer Grundform r^{ter} Stufe F (oder auch, allgemeiner, irgend einer r-gliedrigen Mannigfaltigkeit) durch ein reelles Gebilde Φ_{2r} von doppelter Dimensionenanzahl — wie es bei einem einstufigen Gebilde durch die reelle z-Ebene oder z-Kugel geschieht —, so können wir innerhalb Φ_{2r} beliebige aus ∞^k $(k < 2r)$ reellen Elementen bestehende Gebilde G_k ins Auge fassen, und nach deren Bildern g_k auf der Grundform F fragen, welche aus ∞^k komplexen Elementen bestehen werden[57]). Als solche g_k ergeben sich nicht nur Linien, Flächen usw., sondern auch eine große Menge weiterer Gebilde, deren einfachstes Beispiel (für $r = 1$, $k = 1$) in *v. Staudt*'s „*Ketten*" vorliegt[58]). Es ist das ein allgemeines und umfangreiches Programm, welches von *C. Segre* skizziert und bis zu einem gewissen Punkte durchgeführt wurde[59]).

Aus einer *imaginären* Grundform F läßt sich eine reelle Darstellung Φ_{2r} öfters dadurch erhalten, daß man als Bild eines jeden komplexen Elementes von F das einzige ihm angehörige reelle Element einer bestimmten Art auswählt, beispielsweise für jeden Punkt

---

56) Gli elementi immaginari nella geometria, Giorn. di mat. 35 (1897), p. 242; ebenda 36 (1898), p. 317.

57) D. h. aus Elementen, deren Gesamtheit auf das System der Werte von k veränderlichen *reellen* Zahlen in stetiger Weise bezogen werden kann.

58) „Beiträge", 2. Heft, § 15.

59) Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, Math. Ann. 40 (1891), p. 413; Un nuovo campo di ricerche geometriche, Torino Atti, 25 (1889—90), p. 276, 430, 592; 26 (1890—91), p. 35. Betreffend diese letzteren Aufsätze, s. Nr. 18.

die reelle Gerade, welche ihn mit seinem konjugiert-imaginären verbindet. Als wichtigste reelle Darstellungen eines einstufigen Gebildes ergeben sich: 1) *der Inbegriff der reellen Punkte einer reellen Ebene*[60]; 2) *das Strahlensystem 1. Ordnung und 1. Klasse mit konjugiert-imaginären Leitlinien;* 3) *die nicht geradlinige Fläche 2. Grades,* insbesondere *die* (*reelle*) *Kugel*[61]).

Reelle Repräsentanten von Grundformen 2. und höherer Stufe lassen sich nach demselben Grundprinzip in mehrdimensionalen Räumen (III C 9, *Segre*) aufstellen[62]).

Die obigen g_k nennen wir für $k = 1$ *„Fäden“* (*fili*), für $k = 2$ *„Gewebe“* (*tele*) usw.; eine „Linie“ (oder Regelschar usw.) der Grundform F ist also ein spezielles Gewebe; eine Fläche ist ein spezielles g_4; *v. Staudt*'s Ketten sind aber Fäden. Bei ungeradem k haben wir es stets mit Gebilden zu tun, welche in der bisherigen Geometrie nicht in Betracht kamen. Ist das reelle Gebilde G_k algebraisch (was immer zutrifft, falls g_k algebraisch ist, nicht aber umgekehrt!), so nennen wir g_k *hyperalgebraisch* (und diese Definition ist von der besonderen Art der Φ_{2r}, welche die Grundform F versinnlicht, unabhängig); unter den hyperalgebraischen Gebilden sind also die algebraischen einbegriffen. Als „hyperalgebraische Korrespondenzen“ bezeichnen wir die, welche durch algebraische Korrespondenzen auf Φ_{2r} abgebildet werden.

Will man die Durchschnitte von hyperalgebraischen Gebilden g_k untersuchen, insbesondere für ein solches g_k den Begriff der „Ordnung“ aufstellen, so erscheint es zweckmäßig, die entsprechenden Begriffe und Sätze über die algebraischen Bilder G_k auf die g_k zu übertragen. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß bei den G_k bis jetzt nur die reellen Elemente ins Auge gefaßt wurden, während die heranzuziehenden Sätze erst im komplexen Gebiet ihre volle Gültigkeit er-

---

60) Ein Spezialfall dieser Darstellung ist derjenige der komplexen Variablen $x + iy$ in der Ebene nach *Wessel-Argand-Gauß* (I A 4, *Study*, Nr. 5). Diese Erzeugung der *Gauß*'schen $x + iy$-Ebene findet sich auch in *F. Klein*'s *„Riemann*'sche Flächen“ (Göttingen, autogr. Vorl., 2. Abdr. 1904, 1, p. 267 u. ff.).

61) In den beiden letzten Darstellungen treten keine Fundamentalelemente auf, d. h. die Beziehung der Grundform auf ihren reellen Repräsentanten ist *ausnahmslos* ein-eindeutig. In der ersten Darstellung gibt es dagegen eine reelle Gerade (in der *Gauß*'schen Ebene die unendlich ferne Gerade), deren sämtliche Punkte einem einzigen Elemente der Grundform entsprechen.

62) Einige derartige (der Riemann-Neumann'schen Kugel analoge) Mannigfaltigkeiten hat *C. Segre* in einem anderen Aufsatze angegeben (Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, Palermo Rend. 5 (1891), p. 192. Vgl. insbes. Nr. 9).

halten; hierdurch werden Ausnahmefälle, ungenaue oder komplizierte Sätze verursacht.

Diese Schwierigkeiten lassen sich dadurch beseitigen, daß man den Elementenbegriff abermals erweitert; und zwar indem man die bisher als reell vorausgesetzten Φ_{2r} und G_k als Inbegriff ihrer sämtlichen reellen und komplexen Elemente auffaßt, und diesen komplexen Elementen weitere in geeigneter Weise zu definierende, die sogen. „bikomplexen" Elemente der Grundform F, als entsprechend zuordnet. Zur geometrischen Definition letzterer braucht man nur eine der reellen Definitionen komplexer Elemente von Φ_{2r} auf die Grundform F zu übertragen. So kann z. B. in einer Ebene, als reellem Repräsentanten einer komplexen Geraden, ein Paar konjugiert-imaginärer Punkte durch einen reellen Kreisbüschel definiert werden; dementsprechend werden wir in der komplexen Geraden ein Paar von „bikomplexen Zwillingspunkten" (*coppia di punti bicomplessi gemelli*) als einen „Büschel von Ketten" definieren, welcher keine Grundelemente hat, oder auch als eine Involution ohne Doppelelemente auf einer dieser Ketten. Durch Heranziehen der beiden Sinne auf der Kette läßt sich dieses Paar noch in seine beiden Elemente spalten. Die *Ordnung eines hyperalgebraischen* g_1 in einer geraden Linie wird dann gleich der Hälfte der Anzahl seiner Schnittpunkte mit einer Kette.

17. Entsprechende analytische Entwicklungen. Bikomplexe Zahlen. Analytisch kommen diese Betrachtungen darauf hinaus, daß man eine jede Koordinate eines imaginären Elementes der Grundform F als komplexe Zahl $x + iy$ in ihre beiden Bestandteile x, y spaltet, und diese sämtlichen Bestandteile, in doppelter Anzahl als die früheren Koordinaten, ganz beliebig in die Gleichungen aufnimmt (was damit gleichbedeutend ist, daß wir zugleich mit jeder Elementenkoordinate $x + iy$ die komplex-konjugierte Variable $x - iy$ ebenfalls in die Gleichungen mit aufnehmen und als unabhängige Veränderliche betrachten)[63]. Sind die betreffenden Gleichungen zwischen x, y (oder zwischen $x \pm iy$) algebraisch, so haben wir es mit hyperalgebraischen Gebilden zu tun.

---

63) Die hierauf bezüglichen Untersuchungen können folglich mit Vorteil überall herangezogen werden, wo zugleich mit jeder komplexen Variablen die entsprechende komplex-konjugierte auftritt, was in der Funktionentheorie (z. B. in der Theorie der automorphen Funktionen, der konformen Abbildung, der Minimalflächen) öfters geschieht. Vgl. auch Nr. 18. Insbesondere können die obigen Gebilde Φ_{2r} (Nr. 16) für die Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen ähnliches leisten, wie die gewöhnliche z-Ebene oder z-Kugel für die Funktionen einer Veränderlichen (II B).

Der Einführung bikomplexer Elemente läßt sich eine entsprechende Erweiterung des Zahlbegriffes zur Seite stellen, indem man die beiden Bestandteile x, y jeder komplexen Zahl (Koordinate) $x + iy$ auch als komplex, in der Form:

$$x = x_1 + hx_2, \quad y = y_1 + hy_2$$

annimmt, unter h eine neue von i und $-i$ verschiedene imaginäre Einheit verstanden, welche ebenfalls die Bedingung $h^2 = -1$ erfüllt. Will man für diese *„bikomplexen“* Zahlen

$$x_1 + hx_2 + iy_1 + ihy_2$$

die üblichen Rechnungsgesetze der reellen Zahlen aufrecht erhalten, so muß das System *„Nullteiler“* enthalten (I A 4, *Study*, Nr. **11**), und zwar gibt es davon zwei verschiedene Systeme[64]), welche für $h = i$ bezw. $h = -i$ zum Verschwinden gebracht werden. In einem einstufigen Gebilde gibt es zwei Scharen spezieller Fäden, die sogen. „Protofili“, denen die Eigenschaft zukommt, daß bikomplexe Punkte desselben „Protofilo“ stets Koordinaten haben, deren Differenz einem Nullteiler des einen oder des anderen Systems gleich ist[64a]).

Als unmittelbare Folge der Einführung bikomplexer Elemente und Zahlen ergibt sich, daß wir uns nicht mehr auf Gebilde g_k der Grundform F zu beschränken brauchen, deren entsprechende Bilder G_k in Φ_{2r} reell sind (vgl. Nr. **16**); vielmehr dürfen wir innerhalb Φ_{2r} beliebig komplexe (insbesondere algebraische) Gebilde auswählen, und deren Bilder in F, welche beliebig bikomplex (insbesondere hyperalgebraisch) sein werden, untersuchen. Wir gelangen dadurch zu einer „allgemeinen bikomplexen Geometrie“, welche zu der „reellen“ und „komplexen“ Geometrie als eine dritte Stufe hinzutritt.

Es läßt sich auch einsehen, daß ein ähnlicher Übergang,

---

64) *C. Segre* a. a. O. Nr. 29—30.

64a) Das obige System von höheren komplexen Zahlen (I A 4, *Study*, Nr. 7 ff.) bekommt dadurch eine direkte geometrische Interpretation. Andere Systeme komplexer Zahlen haben sich ebenfalls in der Geometrie, schon seit *Grassmann* und *Hamilton*, als nützlich erwiesen, hauptsächlich dadurch, daß das Rechnen mit ihnen als ein Algorithmus zur Zusammenfassung und formalen Vereinfachung mehrerer Formeln dienen kann. Eine derartige Anwendung hat *E. Study* gemacht, indem er zur Darstellung der Strahlen im Raume die sog. „dualen Größen“, d. h. drei als homogene Koordinaten aufgefaßte komplexe Zahlen $a + b\varepsilon$ benutzte, wobei $\varepsilon^2 = 0$ vorausgesetzt wird (Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 199 ff.) (III A, B 4 b, Gruppentheorie, *Fano*; Nr. **17**). Weitere geometrische Anwendungen der dualen Zahlen, s. III A, B 4 b, Nr. **20**, **24**. S. auch *J. Grünwald,* Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie, Monatsh. Math. Phys. **17** (1906), p. 81.

wie derjenige von komplexen zu bikomplexen Elementen und Zahlen und von komplexer zu bikomplexer Geometrie, mehrmals, ja sogar ins Unendliche wiederholt werden kann.

18. Direkte Untersuchung der hyperalgebraischen Gebilde. Beziehung zu den Hermite'schen Formen. In den Anm. [59]) erwähnten Arbeiten: *Un nuovo campo di ricerche geometriche* hat *C. Segre* die hyperalgebraischen Gebilde direkt untersucht — anstatt von ihren reellen Repräsentanten auszugehen —; sowohl auf analytischem Wege, indem er deren Gleichungen an die Spitze stellt, als durch synthetische Betrachtungen, wenn es sich um Gebilde handelt, welche durch einfache *hyperalgebraische Korrespondenzen* erzeugt werden, insbesondere durch die sogenannten „antiprojektiven" Beziehungen, welche eine ganz ähnliche Rolle spielen wie die projektiven. Eine ein-eindeutige und kontinuierliche Beziehung zweier einstufiger Gebilde, welche harmonische Würfe in ebensolche überführt, ist im komplexen Gebiet nicht notwendig projektiv, vielmehr kann sie einen nicht neutralen (d. h. nicht reellen) Wurf in einen entgegengesetzter Art, was den Sinn anbelangt (d. h. in seinen konjugiert-imaginären) überführen [65]). In diesem Falle heißt die Beziehung *antiprojektiv* [66]); und auch bei Gebilden höherer Stufe unterscheiden sich die antiprojektiven Korrespondenzen in ihrer Definition von den projektiven nur dadurch, daß entsprechende nicht neutrale Würfe von entgegengesetzter Art sind (*Segre*, a. a. O. Nr. 1—3). Die Sätze über eindeutige Bestimmung der projektiven Korrespondenzen durch 3, 4, 5 Paare entsprechender Elemente in allgemeiner Lage und die einfachsten Konstruktionen lassen sich auf den antiprojektiven Fall sofort übertragen; Unterschiede treten dagegen bei den Doppelelementen auf. Die Untersuchung der „Antiinvolutionen" (d. h. der antiprojektiven Beziehungen, welche mit ihren Inversen zusammenfallen; Nr. 11ff.) führt zur Verallgemeinerung des *v. Staudt*'schen Begriffes einer „Kette": eine *Kette* r^{ter} *Stufe* ist, vom Standpunkte der projektiven Geometrie aus, mit dem Inbegriffe der reellen Elemente einer reellen Grundform r^{ter} Stufe identisch.

Diese Korrespondenzen (nicht aber die sofort zu nennenden anti-

65) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage § 16, Nr. 225.

66) Auf der komplexen Geraden gibt es also, außer den projektiven und antiprojektiven Beziehungen, keine weiteren kontinuierlichen Korrespondenzen, welche harmonische Würfe in ebensolche überführen. Die Frage, ob die Kontinuität der Beziehung auch im komplexen Gebiet aus der harmonischen Eigenschaft bereits zu folgern ist, hat *Segre* a. a. O. aufgestellt, ist aber bis jetzt unbeantwortet geblieben.

polaren) waren kurz vorher unter dem Namen „Symmetralitäten" von *C. Juel*[66a]) betrachtet worden; aber *Segre*'s Untersuchungen sind von denen *Juel*'s unabhängig, und greifen tiefer ein.

Durch die „antipolaren" Korrespondenzen der Ebene und des Raumes werden die „Hyperkegelschnitte" und die „Hyperflächen 2. Grades" erzeugt (a. a. O. Nr. 27 ff.), welche aus den sämtlichen (∞^3 bezw. ∞^5) sich selbst reziproken Punkten der Grundform bestehen, falls solche überhaupt vorhanden sind. Aus diesen Gebilden lassen sich Büschel und höhere lineare Systeme zusammensetzen, deren Grundgebilde in einzelnen Fällen durch antiprojektive Büschel von Geraden oder Ebenen erzeugt werden: hierin liegt wieder eine Abweichung von der projektiven Geometrie. Dagegen schließt sich die Theorie der linearen Transformationen, welche einen Hyperkegelschnitt oder eine Hyperfläche 2. Grades, d. h. die betreffende Antipolarität, in sich überführen, an die projektive Geometrie der Kegelschnitte und Flächen 2. Grades (III C I, *Dingeldey*; 2, *Staude*, insb. IX: III A, B 4 b, Gruppentheorie, *Fano*, Nr. **9**) ziemlich eng an. Analytisch sind das die (später von *A. Loewy*[66b]) verfolgten) linearen automorphen Transformationen einer *Hermite'schen Form*, d. h. einer bilinearen Form $\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k$ mit konjugiert-komplexen Veränderlichen und konjugiert-komplexen Koeffizienten ($a_{ik} = \bar{a}_{ki}$); die daraus entstehenden Gruppen haben *G. Fubini*[66c]) und *E. Study*[66d]) angegeben. Als Anwendungen dieser Begriffe mögen die folgenden erwähnt werden:

1) *G. Fubini* und *E. Study* (a. a. O.) haben aus den *Hermite*'schen Formen, analog den quadratischen, eine Art projektiver Maßbestimmung (III A, B 4 b, Gruppentheorie, *Fano*, Nr. **9**, **31**) abgeleitet; insbesondere eine *elliptische* und eine *hyperbolische Hermitesche Maßbestimmung* durch Zugrundelegung einer definiten positiven *Hermite*schen Form ($x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$) oder einer indefiniten von der Gestalt $x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_{n-1}\bar{x}_{n-1} - x_n\bar{x}_n$, und eine parabolische als Grenzfall der vorhergehenden. In den beiden ersten Fällen werden

66a) Bidrag til den imaginäre Linies og den imaginäre Plans Geometri, Diss. Kjöbenhavn 1885; Über einige Grundgebilde der projektiven Geometrie, Acta math. 14 (1890) p. 1.

66b) Math. Ann. 50 (1898), p. 557; Nova Acta Leopold. 71 (1898), Nr. 8; Math. Ann. 52 (1899), p. 588.

66c) Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme (Catania, Gioenia Atti (4) 17 (1904), Nr. 4; insbes. p. 36 ff.); Sulle metriche definite da una forma Hermitiana (Veneto Ist. Atti (8) 6, 1903—1904; p. 501).

66d) Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, Math. Ann. 60 (1905), p. 321. S. auch Verh. des III. int. Math.-Kongr. zu Heidelberg (Leipzig 1905), p. 313.

die Kollineationen und Antikollineationen, welche das betreffende *Hermite*'sche Polarsystem in Ruhe lassen, als *Hermite'sche Bewegungen* und *Umlegungen* gedeutet; die geeignet definierte „Entfernung" zweier Punkte bleibt dabei ungeändert; aus diesen Transformationen ergeben sich als Grenzfall die parabolischen *Hermite*'schen Bewegungen und Umlegungen. Durch Spaltung der imaginären Veränderlichen in ihre reellen Bestandteile lassen sich diese Gruppen *Hermite*'scher Operationen als projektive Gruppen höherer Räume deuten.

2) *Anwendungen auf Funktionentheorie.* Die von *E. Picard*[67]) untersuchten „Hyperfuchs'schen" Funktionen von 2 Veränderlichen gestatten Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen, welche als Kollineationen der Ebene mit invariantem Hyperkegelschnitt gedeutet werden können. Und ebenso wie *F. Klein* und *R. Fricke*[67a]) für eigentlich-diskontinuierliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen, insbesondere für die Gruppen mit Hauptkreis, welche mit projektiven Gruppen eines komplexen einstufigen Gebildes mit invarianter Kette gleichbedeutend sind, die zugehörigen Fundamentalbereiche definiert haben, so hat *Fubini*[67b]), beiläufig auch *Study* (a. a. O. § 12), für diskontinuierliche Gruppen mit einer invarianten *Hermite*'schen Form denselben Begriff aufgestellt, und ersterer überdies die Existenz entsprechender Hyperfuchs'scher Funktionen bewiesen. Diese Gruppen (deren einige sich arithmetisch einfach charakterisieren lassen) werden auch, wie bei einer Veränderlichen, durch Hinzunahme von Operationen zweiter Art erweitert. Obgleich größtenteils nur der Fall von $n = 2$ Veränderlichen berücksichtigt wird, erstreckt sich die Schlußweise auf beliebiges n. Für eine gegebene Gruppe linearer Transformationen mehrerer Veränderlichen hat später *A. Hurwitz*[68]) die Herstellung eines Fundamentalbereiches allgemein behandelt. Die ebenfalls von *Fubini* betrachteten diskontinuierlichen Gruppen, welche ein System *Hermite*'scher Formen in Ruhe lassen, finden bei weiteren Funktionen Anwendung, welche

---

67) Acta math. 1 (1882), p. 297; 2 (1883), p. 114; 5 (1884), p. 121; Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 357. Ansatz für eine Verallgemeinerung auf n Veränderliche bei *W. Wirtinger,* Wien Ber. 108 (1899), p. 1239.

67a) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 2 Bde. (Leipzig 1890—92); Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 1 (Leipzig 1897), Bd. 2, 1. Lief. (Leipzig 1901). Ferner II B 4, Automorphe Funktionen, *Fricke.*

67b) a. a. O., Gioenia Atti (4) 17 (1904), Nr. 4. Applicazioni analitiche dei gruppi di proiettività trasformanti in sè una forma Hermitiana, ebenda Nr. 9.

68) Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln, Math. Ann. 61 (1905), p. 325.

lineare Transformationen einzelner Veränderlichen für sich oder einzelner Reihen von Veränderlichen zulassen[68b]).

3) *Anwendungen in der Zahlentheorie.* Die Äquivalenztheorie und die Reduktion der binären *Dirichlet*'schen Formen (I C 2, *Vahlen*, c 13) und *Hermite*schen Formen (ebenda c 15, e 11) mit ganzen komplexen Koeffizienten, wie sie von *Dirichlet, Hermite, Picard, Klein* und *Fricke, Bianchi* durchgeführt worden ist, läßt sich nach *Loewy* und *Fubini* (a. a. O.) auf *Hermite*'sche Formen mit mehreren Veränderlichen übertragen, durch Zugrundelegen der Betrachtung von ihren reproduzierenden Gruppen und deren Fundamentalbereichen.

V. Allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde von zwei und drei Dimensionen.

19. Analytische Theorie der algebraischen ebenen Kurven. Die Theorie der algebraischen ebenen Kurven höherer Ordnung (III C 4, *Berzolari*) ist bereits im 18. Jahrhundert verschiedentlich in Angriff genommen worden; von *Newton*, dessen (vielleicht schon 1678 verfaßte[69]) „*Enumeratio linearum tertii ordinis*" (London 1704) drei allgemeine Sätze über algebraische Kurven enthält; ferner von *MacLaurin, Euler, Cramer* (dessen Namen noch an das nach ihm benannte Paradoxon gebunden ist)[69a]). Einzelne Fragen haben später *Lamé* (*Lamé*'sches Prinzip), *Poncelet* (Klasse einer allgemeinen Kurve n^{ter} Ordnung und *Bobillier* (Polarentheorie) behandelt[69b]). Bis in die 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts war aber die Behandlung dieser Kurven eine überwiegend analytische, was nicht zu verwundern ist, da sich die Grundbegriffe der „algebraischen Kurve" und ihrer „Ordnung"

68a) Zuerst bei *E. Picard*, Sur les fonctions hyperabéliennes, J. de math. (4) 1 (1885), p. 87; *H. Bourget*, Toulouse Ann. 12 (1898), D, p. 1; Spezialfall, nach Veranlassung von *D. Hilbert*, bei *O. Blumenthal*, Math. Ann. 56 (1903), p. 509; ebenda 58 (1904), p. 497; Deutsche Math.-Ver. Jahresb. 13 (1904), p. 120. Ferner *G. Fubini*, Ann. di mat. (3) 10 (1904), p. 1; 11 (1905), p. 159, insbes. § 8.

69) *R. Ball*, A short account on the history of mathematics, Cambridge 1888, p. 321.

69a) *C. Mac Laurin*, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis (London 1720); De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus, Appendix zu „A treatise of algebra" (London 1748), französische Ausgabe von *E. de Jonquières* in „Mélanges de géometrie pure" (Paris 1856), p. 197—261; *L. Euler*, Introductio in analysin infinitorum, 2 (Lausanne 1748); *G. Cramer*, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (Genève 1750).

69b) *G. Lamé*, Examen des différentes méthodes . . . (Paris 1818); *Poncelet*, Gerg. Ann. 8 (1817—18), p. 213; *Bobillier*, ebenda 18 (1827—28), p. 89, 157, 253; 19 (1828—29), p. 106, 188, 302.

durch die Analysis einfach aufstellen lassen, während andererseits die Begriffsbestimmung des Algebraischen den Synthetikern überhaupt fehlte, und der Ordnungsbegriff erst durch die Einführung der imaginären Elemente (Nr. 14) der reinen Geometrie in Strenge zugänglich wurde.

A. F. Möbius[70]) hat diejenigen Kurven betrachtet, welche durch einen veränderlichen Punkt $fA + gB + hC$ beschrieben werden, unter f, g, h beliebige ganze Funktionen n^{ten} Grades eines Parameters verstanden. Diese sind aber (falls $n > 2$ ist) noch nicht die allgemeinsten ebenen Kurven n^{ter} Ordnung (wie *Möbius* selbst erkannte), sondern nur rationale Kurven (III C 5, Spezielle Kurven, *Kohn*).

Die allgemeine analytische Behandlung der algebraischen ebenen Kurven, wie wir sie heute durchzuführen pflegen, rührt hauptsächlich von *J. Plücker* her. Ihm verdanken wir den Begriff der Gleichung einer Kurve in Linienkoordinaten[35]). Im „*System der analytischen Geometrie*“[71]) lieferte er (im 3. Abschnitt) eine vollständige Untersuchung und Klassifikation der ebenen Kurven 3. Ordnung, mit Andeutungen über Kurven 3. Klasse; es liegt hierin schon der Typus für die Behandlung der Kurven höherer Ordnungen, für welche in § 6 einige allgemeine Sätze aufgestellt werden, darunter (p. 264) die Anzahl der Wendepunkte einer Kurve n^{ter} Ordnung. Aus der „*Theorie der algebraischen Kurven*“[72]) mögen noch hervorgehoben werden:

1) in den „Einleitenden Betrachtungen“ — die *Schnittpunkttheoreme*[73]), d. h. Relationen zwischen den $m \cdot n$ Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung, die schon durch *Euler*, *Cramer* und später durch *Jacobi*[74]) in Angriff genommen waren, und bei *Plücker* in erster Linie zur Untersuchung der „unendlichen Zweige“ ebener Kurven und ihrer Asymptoten dienen;

2) im 2. Abschnitt, § 4, die *Theorie der singulären Punkte*, insbesondere (Nr. 68) die Beziehungen zwischen den Singularitätsanzahlen einer beliebigen Kurve (d. h. die sogenannten „*Plücker'schen Formeln*“[75]);

---

70) Barycentrischer Calcul, §§ 66 ff.

71) Berlin 1835.

72) Theorie der algebraischen Kurven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie, Bonn 1839.

73) Vgl. auch Gerg. Ann. 19 (1828), p. 97.

74) De relationibus ..., J. f. Math. 15 (1836) p. 285 = Werke 3, p. 329.

75) Diese Beziehungen werden für den Fall aufgestellt, daß die betreffende Kurve nur Doppelpunkte und Spitzen, Doppel- und Wendetangenten besitzt; aber es liegen bereits Ansätze für den Fall höherer Singularitäten vor.

3) in dem darauffolgenden § 5, eine Diskussion und Aufzählung der verschiedenen ebenen Kurven 4. Ordnung (III C 5, Spezielle Kurven, *Kohn*).

In seinen Betrachtungen beschränkt sich *Plücker* überall auf den sogen. „allgemeinen Fall" und stützt sich oft auf bloßes Konstantenzählen: seine Beweise bedürfen folglich noch wesentlicher Ergänzungen[75a]).

Von 1844 an zeigte *O. Hesse* in mehreren, hauptsächlich im J. f. Math. veröffentlichten Aufsätzen[76]), wie sich die Theorie der algebraischen Gleichungen systematisch zur Aufstellung einer allgemeinen Theorie der Kurven und Flächen anwenden läßt. Das neue Instrument der Determinanten, welches nun der Algebra zur vollen Verfügung stand, benutzte er meisterhaft; seine sämtlichen Betrachtungen und Beweismethoden sind wegen ihrer bis dahin ungebräuchlichen Eleganz hervorzuheben. Es ergab sich dabei daß eine große Reihe geometrischer Wahrheiten als unmittelbare Übersetzung gewisser *algebraischer Identitäten* aufgestellt werden konnten; ein Prinzip, welches in der weiteren Entwicklung der analytischen Geometrie, und besonders in der Invariantentheorie vielfache Anwendung gefunden hat[76a]). Insbesondere verdanken wir *Hesse* eine eingehende Untersuchung der Wendepunkte und Doppeltangenten ebener Kurven, wobei die Wendepunkte zum ersten Male als Durchschnitte der vorgelegten Kurve mit der sogen. „*Hesse*schen Kurve" erscheinen, und die Gleichung letzterer in der bekannten Determinantenform auftritt[77]). Zur Verbreitung dieser Untersuchungen hat das 1852 erschienene Lehrbuch von *G. Salmon*[78]) wesentlich beigetragen. Einzelne Ausführungen über die Entwicklung

---

75a) Über derartige Ergänzungen zur Methode des Konstantenzählens s. *E. Lasker*, Math. Ann. 58 (1904), p. 434.

76) Vgl. auch Ges. Werke, München 1897.

76a) Darauf hat neuerdings *W. Fr. Meyer* hingewiesen (Ueber das Wesen mathematischer Beweise, Verh. d. III. int. Math.-Kongr. zu Heidelberg, Leipzig 1905, p. 667); und das „Identitätsprinzip" hat er in einer Reihe dort zitierter Arbeiten zu weiterer Geltung gebracht. Vgl. noch die seitdem erschienenen Arbeiten: Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 138; Wien Berichte, April 1907; Arch. Math. Phys. 12 (1907), p. 1 (Fortsetzung erscheint demnächst); Leipzig Ber., April 1907. Das Prinzip der Methode besteht darin, den geometrischen Inhalt grundlegender Konfigurationen auszuschöpfen durch Identitäten, d. h. genauer, durch identisch verschwindende Simultaninvarianten der gegeben gedachten Elemente. Der Vorzug der Methode, die insofern wesentlich über *Hesse* hinausgeht, besteht darin, daß sie zugleich allen besondern und Grenzfällen, soweit sie mit den Bedingungen der Figur überhaupt noch verträglich sind, gerecht wird.

77) J. f. Math. 41 (1851), p. 276—77 = Werke, p. 268—70.

78) A Treatise on higher plane curves, Dublin 1852, deutsch bearbeitet durch *W. Fiedler*, Leipzig 1873, 2. Aufl. 1882.

dieser Theorie gehören zu III C 4 (*Berzolari*); der Leistung von *A. Clebsch*, welcher weiter fortgeschrittene Gesichtspunkte verfolgte, gedenken wir in Nr. 22 und Nr. 31. Diese Leistungen wurden später durch *F. Lindemann* mit weiteren Ausführungen in einem Lehrbuche zusammengefaßt[78a]).

20. Oberflächen im Raume. Das Streben nach Verallgemeinerung, welches der Einfluß der Analysis auf die geometrischen Untersuchungen ausübte, mußte dazu führen, die Gebilde des Raumes zu untersuchen, welche Analogieen mit den ebenen Kurven darbieten. Das konnte nach zwei verschiedenen Richtungen geschehen. Indem man die Tatsache ins Auge faßte, daß diese Kurven durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten eines Punktes der Ebene dargestellt werden, ergab sich als Analogon im Raume die *Theorie der Oberflächen.* Wenn man hingegen eine ebene Kurve als eine Reihe von ∞^1 Punkten ansieht, so kann man die Theorie ausdehnen, indem man die Beschränkung aufhebt, daß diese in einer Ebene gelegen seien; dann entsteht die *Theorie der nicht ebenen Kurven* oder der *Kurven doppelter Krümmung.*

Die analytische Theorie der Oberflächen schließt sich zu Anfang ziemlich eng an die der ebenen Kurven an. Elementare Fragen werden für ebene Kurven und für Flächen gleichzeitig behandelt; in höheren Fragen bleibt aber die Flächentheorie öfters zurück, da die verfügbaren Mittel nicht ebenso vervollkommnet sind. — Für Oberflächen beliebiger Ordnung stellten bereits *Gergonne*[79]) und *Chasles*[80]) Eigenschaften auf; *Poncelet* bestimmte die Klasse der allgemeinen algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung[81]), während Durchschnittstheoreme von *Plücker*[82]) und *Jacobi*[74]) gegeben wurden. Wesentliche Beiträge brachten sodann *Salmon* und *Cayley*; insbesondere verdanken wir ersterem die Zusammenfassung der Flächentheorie in einem Lehrbuche[83]). Wegen Einzelheiten und weiterer Entwicklung verweisen wir auf III C 6, Flächentheorie (*Castelnuovo* und *Enriques*).

78a) Vorlesungen über Geometrie von *A. Clebsch*, bearbeitet und herausgegeben von *F. Lindemann.* Bd. 1, Leipzig 1876; Bd. 2 (Geometrie des Raumes) Teil 1, Leipzig 1891; 2. Aufl. von Bd. 1, Teil 1, 1. Lief., 1906.

79) Gerg. Ann. 17 (1826), p. 255.

80) Mémoire de géométrie, Anhang zum Aperçu historique (1, § 15; 2, § 10 ff.).

81) Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, J. f. Math. 4 (1829), p. 1 (Anm. 16). S. insb. p. 30.

82) Gerg. Ann. 19 (1828), p. 129; J. f. Math. 16 (1837), p. 47; System der Geometrie des Raumes (s. Anm. 36), 1. Abschn. § 3.

83) A Treatise on analytic geometry of three dimensions (Dublin 1862), deutsch bearbeitet durch *W. Fiedler* (1863—65), 3. Aufl. Leipzig 1879—80, 2 Bde.

21. Raumkurven. Raumkurven 4. Ordnung sind als Durchschnitte zweier Flächen 2. Ordnung, insbesondere von Kegeln oder Zylindern, zuerst durch *Monge's* Methoden der darstellenden Geometrie untersucht worden[83a]; *P. Hachette* gedenkt flüchtig auch des Falles, in welchem dieser Durchschnitt in eine Gerade und eine Kurve 3. Ordnung zerfällt[84]). Rationale Raumkurven beliebiger Ordnung hat *A. F. Möbius* durch baryzentrische Ausdrücke $pA + qB + rC + sD$ mit einem veränderlichen Parameter dargestellt[84a]), und darunter den einfachsten Fall der Raumkurve 3. Ordnung besonders hervorgehoben. Die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der algebraischen nicht ebenen Kurven hat aber große Schwierigkeiten dargeboten. Erst spät erkannte man, daß sich nicht jede Raumkurve als vollständiger Schnitt zweier Oberflächen herstellen läßt[84b]), und daß folglich zu ihrer analytischen Darstellung zwei (und selbst drei[85])) Gleichungen nicht immer ausreichen; daß die gleichzeitige Betrachtung der Ordnung und der eventuellen Doppelpunkte zur Einteilung dieser Kurven nicht hinreicht, da bereits zwei verschiedene Arten von Raumkurven 4. Ordnung ohne Doppelpunkte existieren[86]), und daß von der 9. Ordnung an auch das Heranziehen der Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte eine vollständige Klassifikation der Kurven noch nicht gestattet[86a]). Die allgemeine Theorie und Klassifikation der algebraischen Raumkurven konnte daher mit den vorangehenden Theorieen keine vollständige Ähnlichkeit darbieten. Wesentliche Resultate verdanken wir jedoch *A. Cayley*, welcher 1845 die Formeln aufstellte, die (analog denen von *Plücker*) die Zahlen der Singularitäten einer Raumkurve untereinander verbinden[87]); und für die analytische Darstellung einerseits die Raumkurven als Durchschnitte eines „Monoides"

83a) *Monge*, Géométrie descriptive (Anm. 7a), Chap. 3.

84) Corresp. de l'éc. polyt. 1 (1808), Nr. 9, p. 368.

84a) Barycentrischer Calcul, § 95 ff.

84b) *A. Cayley*, Note sur les hyperdéterminants, J. f. Math. 34 (1847), p. 148; insb. p. 152 = Coll. math. papers 1, p. 352.

85) *L. Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, J. f. Math. 92 (1882), p. 1, § 10; *K. Th. Vahlen*, Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumkurven, ebenda 108 (1891), p. 346.

86) *G. Salmon*, On the classification of curves of double curvature, Cambr. math. J. 5 (1850), p. 53; *Steiner*, Über die Flächen 3. Grades, J. f. Math. 53 (1857), p. 133, insb. p. 138.

86a) Die allgemeinste (von 36 Konstanten abhängige) C_{10}^{9} mit 18 scheinbaren Doppelpunkten kann von zwei verschiedenen Arten sein, eine (3,3), oder eine (2,6) mit drei 6-punktigen Sehnen als Restkurve. Man vgl. die Anm. [90]), [91]) zitierten Abhandlungen von *G. H. Halphen*, p. 166, und *M. Noether*, p. 101.

87) J. de math. 10 (1845), p. 245, englisch in Cambr. math. J. 5 (1850), p. 18.

(d. h. einer Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte) und eines Kegels herstellte, welche sich außerdem nur in einer gewissen Anzahl von Geraden treffen[88]), und andererseits die Gleichung des Linienkomplexes heranzog, welcher aus den sämtlichen Geraden besteht, die die vorgelegte Kurve treffen[89]). Einen bemerkenswerten Fortschritt machte diese Theorie durch die beiden von der Berliner Akademie 1882 preisgekrönten grundlegenden Abhandlungen von *G. Halphen*[90]) und *M. Noether*[91]). Den nicht ebenen algebraischen Kurven sind einzelne Kapitel in *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes 2, gewidmet[83]). Für weiteres verweisen wir auf III C 8, Raumkurven (*Rohn*).

22. Zusammenhang mit der projektiven Invariantentheorie. Der analytisch behandelten projektiven Geometrie der algebraischen Gebilde verdankt die „*Formentheorie*" oder *(lineare)* „*Invariantentheorie*" (I B 2, *Meyer*) einen bedeutenden Anstoß, sowie umgekehrt letztere durch ihre darauf folgende Entwicklung an der Ausbildung der analytischen Theorie der algebraischen Gebilde großen Anteil hatte. — Es lag die Bemerkung nahe, daß die geometrischen Eigenschaften eines Gebildes durch analytische Bildungen oder Gleichungen darstellbar sein mußten, welche in bezug auf die linearen Transformationen der Veränderlichen, die einer Koordinatentransformation entsprechen — und im Falle „projektiver" Eigenschaften, in bezug auf allgemeine lineare Transformationen der Koordinaten — invarianten Charakter aufweisen (wozu das Doppelverhältnis das einfachste Beispiel lieferte). Die Theorie der algebraischen ebenen Kurven hatte auch zu mehreren Gebilden (*Hesse*'sche Kurve, *Steiner*'sche Kurve; III C 4, *Berzolari*, Nr. 7) geführt, die zu einer vorgelegten Kurve eine invariante Beziehung haben. Es entstand nun die Frage, wie und was für invariante Bildungen sich allgemein aus einer vorgelegten algebraischen Gleichung oder Form ableiten ließen. Zur Beantwortung dieser Frage hatten, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, seit ca. 1845 die englischen Mathematiker, insbesondere *A. Cayley*, *G. Salmon*, *J. J. Sylvester*, wesentliche Beiträge geliefert, andererseits auch *Ch. Hermite* und

88) Paris C. R. 54 (1862), p. 55, 396, 672; ebenda 58 (1864) p. 994. Oder auch: Coll. math. papers 5, p. 7, 24.

89) Quart. J. 3 (1860), p. 225; ebenda 5 (1862), p. 81. Oder auch: Papers 4, p. 446, 490.

90) Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, J. éc. polyt. 52 (1882), p. 1.

91) Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven, Berlin Abhandl. 1883. Auszug in J. f. Math. 93 (1882), p. 271.

F. Brioschi (vgl. I B 2, *Meyer*, Nr. 2), als 1858 *S. Aronhold* an dem Beispiele der ternären kubischen Form[92]) den Zusammenhang dieses Gebietes mit der projektiven Geometrie entwickelte und etwas später[93]) seine prinzipiellen Ideen allgemein darlegte. Nach ihm nimmt *A. Clebsch* diese algebraisch-geometrischen Entwicklungen auf, knüpft an die Arbeiten der englischen Mathematiker an, bedient sich mit Vorliebe der Determinantentheorie und insbesondere des Multiplikationssatzes der Determinanten als algebraischen Hilfsmittels, und steigt in Anlehnung an die projektive Anschauungsweise zu allgemeinen invariantentheoretischen Problemen der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen auf[94]). *Die Invariantentheorie liefert ein allgemeines Prinzip* — welches bis dahin fehlte — *zur Entdeckung geometrischer Wahrheiten auf analytischem Wege;* sie gibt allgemeine Methoden (vgl. I B 2), um aus einer gegebenen Form f deren Invarianten und Kovarianten abzuleiten, und diese, gleich Null gesetzt, liefern ausschließlich und vollständig diejenigen Gleichungen, welche projektive Eigenschaften des Gebildes $f = 0$ ausdrücken oder weitere mit $f = 0$ projektiv zusammenhängende Gebilde darstellen (III A, B 4 b, Gruppentheorie, *Fano*, Nr. **34**, **35**).

23. Graßmann's lineale Erzeugung der Kurven und Flächen. Zum allgemeinen Begriff der algebraischen Kurve haben sich die Synthetiker nur schwer erheben können, und die sogenannten „geometrischen Theorieen“ der Kurven und Flächen waren lange Zeit hindurch nicht rein synthetisch, öfters auch unvollständig.

H. Graßmann hat 1846 bemerkt[95]), daß die gewöhnliche projektive Geometrie zur allgemeinen Behandlung der Kurven 2. Ordnung zwar ausreicht, nicht aber zu derjenigen der Kurven höherer Ordnung, da man durch projektive Erzeugung nur zu besonderen Kurvengattungen gelangt. Um allgemeine Kurven n^{ter} Ordnung zu erzeugen, stellte er folgenden (in der „Ausdehnungslehre“ von 1844 bereits ausgesprochenen[95a])) Hauptsatz auf (III C 4, Algebraische Kurven, *Berzolari*, Nr. **10**):

„Wenn die Lage eines beweglichen Punktes X in der Ebene dadurch beschränkt ist, daß ein Punkt und eine Gerade, welche durch

92) J. f. Math. 55 (1858), p. 79.

93) J. f. Math. 62 (1863), p. 281.

94) Man vgl. den Nachruf für *Clebsch* in Math. Ann. 7 (1874), p. 13 u. ff.

95) Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse, J. f. Math. 31 (1846), p. 111 = Ges. Werke 2¹ (Leipzig 1904), p. 49.

95a) § 145—48 = Ges. Werke 1¹, p. 245 ff.

Konstruktionen vermittelst des Lineals aus jenem Punkte X und aus einer Reihe fester Punkte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (d. h. der Punkt in der Geraden liegen soll), so beschreibt der Punkt X ein algebraisches Punktgebilde, und zwar vom n^{ten} Grade, wenn bei jenen Konstruktionen der bewegliche Punkt n-mal angewandt ist."

Darauf folgt der duale Satz über die lineale Erzeugung der Tangentenenveloppe einer Kurve n^{ter} Klasse. In einer weiteren Abhandlung[96]) wird der umgekehrte Satz aufgestellt, daß sich auch jedes Punkt- bezw. jedes Geradengebilde n^{ten} Grades in der angegebenen Weise erzeugen läßt. Der Beweis kommt darauf hinaus, daß die Gleichung $F(x, y) = 0$ des Gebildes in die Vorschrift für die Bauart des erzeugenden Mechanismus umgesetzt wird. Für Gebilde 3. und 4. Grades werden die verschiedenen Erzeugungen einzeln diskutiert[97]).

Für Oberflächen im Raume wird ein entsprechender Satz aufgestellt[98]), wobei das Zusammenliegen eines Punktes und einer geraden Linie durch die Bedingung ersetzt wird, daß zwei durch lineale Konstruktionen gewonnene gerade Linien in einer Ebene liegen sollen.

Das ist aber bloß eine geometrische „Erzeugung" von allgemeinen Punktgebilden gegebenen Grades; als „Definition" derselben und des Grades liegt immer noch die analytische zugrunde. Auch wenn *Graßmann* die Kurven $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung durch projektive Büschel von Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung erzeugt, und zugleich erkennt, daß diese Erzeugung stets möglich ist[99]), sind das nur einzelne Fragen, und von einer eigentlichen Kurventheorie ist bei ihm noch keineswegs die Rede.

J. Lüroth hat vermittelst seiner Wurftheorie bewiesen[100]), daß die *Graßmann*'schen Punktgebilde n^{ten} Grades von jeder geraden Linie in n Punkten getroffen werden, und daß zwei Punktgebilde m^{ten} und n^{ten} Grades sich in $m \cdot n$ Punkten schneiden. Es würde sich folglich eine geometrische Theorie der ebenen algebraischen

---

96) J. f. Math. 42 (1851), p. 187 = Werke 2¹, p. 80.

97) J. f. Math. 36 (1848), p. 177; 44 (1852), p. 1; 52 (1856), p. 254 = Werke 2¹, p. 73, 109, 218.

98) J. f. Math. 49 (1855), p. 1. und weitere Noten, ebenda bis p. 65 = Werke 2¹, p. 136—198.

99) Die höhere Projektivität und Perspektivität in der Ebene dargestellt durch geometrische Analyse, J. f. Math. 42 (1851), p. 193; Die höhere Projektivität in der Ebene dargestellt durch Funktionsverknüpfungen, ebenda p. 204 = Werke 2¹, p. 86, 99.

100) Vgl. die Anm. 52) zitierte Abhandlung in Math. Ann. 8 (1874), p. 145.

Kurven dadurch aufstellen lassen, daß man deren Erzeugung nach *Graßmann* als Definition zugrunde legt, und darauf die Schnittpunkttheoreme nach *v. Staudt* und *Lüroth* beweist. Diese Theorie ist aber nicht weiter verfolgt worden. Von Maßverhältnissen würde dabei gar nicht geredet werden; es fragt sich aber, ob eine Theorie, welche der Weiterführung des Rechnens mit Würfen bis zu Eliminationsproblemen bedarf, als rein synthetisch zu bezeichnen wäre. Auch *Lüroth* scheint die Sache in diesem Sinne als für noch nicht erledigt zu halten[101]).

24. Algebraisch-geometrische Theorieen. Cremona. In einer 1848 der Berliner Akademie eingereichten Mitteilung von *J. Steiner*[102]) werden einige Sätze aus der Polarentheorie der ebenen Kurven ohne Gebrauch der Koordinaten angeführt, und zugleich treten die bemerkenswerten zu einer gegebenen Kurve kovarianten Kurven auf, die heute *Steiner*'s, *Hesse*'s und *Cayley*'s Namen tragen. Bei *M. Chasles*[103]) und *E. de Jonquières*[104]) konzentriert sich das Hauptinteresse auf die (wahrscheinlich unabhängig von *Graßmann* erdachte) Erzeugung algebraischer Kurven durch projektive Büschel von Kurven niederer Ordnungen, welche auf die Konstruktion von Kurven durch vorgelegte Punkte vielfach angewandt wird. Es war das ein Mittel, um sich von der rein analytischen Behandlung dieser Kurven mindestens teilweise frei zu machen. In der *„Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane“*[105]) beweist *L. Cremona* in einheitlicher und vielfach geometrischer (wenn auch nicht immer einwandsfreier) Methode alle wichtigeren Sätze, die von den vorhergehenden analytischen Geometern erfunden worden waren, und fügt auch neue Resultate hinzu. Eine solche Darstellung lieferte er kurz nachher auch für Oberflächen[106]).

---

101) a. a. O. p. 148—49.

102) Berlin Ber. 1848, p. 310; unter dem Titel: Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Kurven in J. f. Math. 47 (1851), p. 1 abgedruckt = Ges. Werke, herausg. von *K. Weierstraß*, Berlin 1881—82, 2, p. 493. S. auch die darauffolgende Abhandlung: Über solche algebraische Kurven, welche einen Mittelpunkt haben usw., J. f. Math. 48 (1851), p. 7 = Werke 2, p. 501.

103) Paris C. R. (36) 1853, p. 943; 37 (1853), p. 272, 372, 437; 41 (1855), p. 1102, 1190; 45 (1857), p. 318, 1061; J. de math. (1) 19 (1854), p. 366.

104) Mélanges de géométrie pure, Paris 1856 (vgl. insbesond. chap. IV); Essai sur la génération des courbes géométriques..., Paris [Sav. étr.] Mém. prés. (2) 16 (1858), p. 159 (Bericht von *M. Chasles* in Paris C. R. 45 (1857), p. 318). Anwendungen auf Kurven 3. und 4. Ordnung in J. de math. (2) 1 (1856), p. 411; 2 (1857), p. 153, 249, 267.

105) Bologna Mem. 12 (1862), p. 305, in deutscher Übersetzung durch *M. Curtze*, Greifswald 1865. Im 2. Abschnitt (Polarentheorie) werden auch die von *Steiner* in obiger Mitteilung ausgesprochenen Sätze bewiesen.

Diesen Untersuchungen liegen aber, in mehr oder weniger sichtbarer Form, analytische Begriffe und Sätze zugrunde. Die beiden Sätze, die *Cremona* in seiner „Introduzione" Nr. 36—37 als „Porismi di *Chasles*" anführt[106a]), sind mit der Gleichung einer ebenen Kurve in Punkt- bezw. in Linienkoordinaten gleichbedeutend. Die Polarentheorie der ebenen Kurven und der Flächen stützt sich auf die Polarentheorie der einstufigen Gebilde, welche analytisch begründet wird. Der Satz, daß zwei projektive Büschel von Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung eine Kurve von der Ordnung $m + n$ erzeugen, beruht auf Involutionsbetrachtungen[107]), welche ebenfalls einer analytischen Begründung bedürfen. Die ganze Auseinandersetzung beruht wesentlich noch auf dem Fundamentalsatze der Algebra: wir haben es so zu sagen mit einer „algebraisch-geometrischen" Theorie der Kurven und Flächen zu tun; was als geometrisch erscheint, ist öfters nur eine geometrische Umformung von algebraischen Überlegungen.

F. Schur[108]) hat die Polarentheorie der ebenen Kurven geometrisch aufzubauen versucht, indem er von dem als bekannt vorausgesetzten Falle einer Kurve n^{ter} Ordnung auf denjenigen einer Kurve $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung schließt, wobei aber noch drei Fundamentalsätze der Algebra entlehnt werden müssen. Ob dadurch auch nur „die Anwendung der Algebra auf ein kleineres Feld eingeschränkt wird", ist zweifelhaft.

25. Ansatz von H. Thieme. Einen Ansatz zu einer eigentlichen rein geometrischen Theorie der algebraischen Gebilde von beliebiger Ordnung durch wirkliche Konstruktion der betreffenden Polarsysteme hat *H. Thieme* gegeben[109]) (III C 4, *Berzolari*, Nr. **5**, **11**).

Thieme stellt sich die Aufgabe, Systeme von Punktgruppen einer Geraden, von Kurven einer Ebene, und von Flächen zu konstruieren, welche für ein derselben Dimension angehöriges Gebilde der nächsten

---

106) Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologna Mem. (2) 6 (1866), p. 91; 7 (1866), p. 29; deutsch übertragen durch *Curtze*, Berlin 1870.

106a) *Chasles*, Aperçu historique, 2. Aufl., p. 280.

107) *Jonquières*, Mélanges . . ., p. 174; *Cremona*, Introduzione . . ., p. 346 u. 323. Diese Betrachtungen wurden später durch *Chasles*, Paris C. R. 58 (1864), p. 1175, zu dem nach ihm benannten „Korrespondenzprinzip" (III C 3, Abzählende Methoden, *Zeuthen*, Nr. **12** u. ff.) formuliert und zur allgemeinen Beweismethode gemacht. Vgl. auch *C. Segre*, Bibl. math. N. F. 6 (1892), p. 33.

108) Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften der ebenen Kurven, Zeitschr. Math. Phys. 22 (1876), p. 220.

109) Die Definition der geometrischen Gebilde durch Konstruktion ihrer Polarsysteme, Zeitschr. Math. Phys. 24 (1878), p. 221, 276. Vgl. auch Math. Ann. 20 (1882), p. 144.

Ordnung Systeme erster Polaren sind. Dadurch entsteht eben die Möglichkeit, diese Gebilde rein geometrisch zu definieren; nämlich als „Ordnungsgebilde“ ihrer Polarsysteme, wie es *v. Staudt* für die Gebilde 2. Grades gemacht hat. Und in der Tat konstruiert *Thieme* das (auf den Punktraum projektiv bezogene) Polarengebüsch einer Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sodann auch ein Büschel, ein Bündel und eine beliebige lineare Mannigfaltigkeit von Ordnungsflächen solcher Polarsysteme, unter der Voraussetzung, die ja für $n=2$ erfüllt ist, daß die entsprechenden Konstruktionen und Eigenschaften für Flächen n^{ter} Ordnung schon abgeleitet sind. *Dabei betrachtet er aber nur reelle Elemente*; und der Satz über die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einer ebenen Kurve oder Fläche tritt bei ihm nur in der einfachen Form auf: „Kurven und Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten von einer Geraden *höchstens* $n+1$ oder alle Punkte“[110]. Allerdings könnte seine Auseinandersetzung größtenteils auch für den Fall komplexer Elemente aufrecht erhalten werden, aber die Hauptschwierigkeit, der Beweis des präzis formulierten Schnittpunkttheorems, wäre noch zu überwinden.

In einem weiteren Aufsatze[111] wird diese Aufgabe speziell für Flächen 3. Ordnung behandelt, unter Zugrundelegung der Theorie der Flächen 2. Ordnung und ihrer linearen Systeme.

Trotz seiner unvollständigen Durchführung war *Thieme*'s Ansatz richtig. Wollte man die algebraischen Gebilde dritten und höheren Grades nach *v. Staudt*'s Muster ins Auge fassen und durchaus im Gebiete der reellen Elemente bleiben, so mußte man damit beginnen, von den gewöhnlichen Polarsystemen, d. h. von den bilinearen Verwandtschaften, zu den „trilinearen“ $\sum a_{ihk} x_i x_h' x_k'' = 0$ und weiter hinaufzusteigen, wozu eben die obigen höheren Polarsysteme ein erster Ansatz sind[112]. Ausführlicher und systematischer hat das *R. De Paolis* gemacht, leider ohne damit zu Ende zu kommen (vgl. Nr. 27).

---

110) a. a. O. Zeitschr. Math. Phys. 24, p. 284.

111) Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsflächen von Polarsystemen, Math. Ann. 28 (1886), p. 133.

112) Die n-linearen Verwandtschaften einstufiger Gebilde sind in neuerer Zeit und hauptsächlich für $n=3$ in mehreren Arbeiten untersucht worden. Andeutungen sind schon bei *F. August*, De superficiebus tertii ordinis, Diss. Berlin 1862, zu finden. Ausführlicher und systematischer bei *J. Rosanes*, Über linear-abhängige Punktsysteme, J. f. Math. 88 (1879), p. 241 § 9; *H. Schubert*, Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden, Math. Ann. 17 (1880), p. 457; *B. Klein*, Theorie der trilinear symmetrischen Elementargebilde, Marburg 1881; *C. Le Paige* et *F. Folie*, Bruxelles Mém. 42 (1879), 43 (1882), 45 (1884); Bruxelles Bull. (3) 5 (1883); *G. Castelnuovo*, Studio

26. Aufstellung der rein synthetischen Kurventheorie durch E. Kötter. Die zahlreichen Versuche, eine rein synthetische Theorie der algebraischen Gebilde zu begründen, hatten erst dann Erfolg, als die Berliner Akademie in den Jahren 1884 und 1886 eine darauf bezügliche Arbeit für die Verteilung des *Steiner*'schen Preises verlangte. In *E. Kötter*'s Preisarbeit von 1886 [113]) wird eine solche Theorie, wenn auch nicht vollständig durchgeführt, doch bis zu einem gewissen Punkte entwickelt (III C 4, *Berzolari*, Nr. **11**).

E. Kötter geht von der Bemerkung aus, daß der hohe Grad einfacher und sicherer Begründung der Tatsachen in der analytischen Geometrie erstens darauf beruht, daß in die Fundamente die imagiginären Größen vollständig aufgenommen sind, zweitens aber darauf, daß vor Eintritt in dieselbe die Theorie der ganzen Funktionen einer und mehrerer Variabeln erledigt ist. Insbesondere setzt man als bekannt voraus, daß eine ganze Funktion einer Variablen und n^{ten} Grades n im allgemeinen verschiedene Nullstellen besitzt, und daß zwei ganze Funktionen zweier Variabeln m^{ten} und n^{ten} Grades für $m \cdot n$ Wertepaare der Variabeln zugleich verschwinden (*Bézout*'s Theorem, I B 1 b, *Netto*, Nr. **6**).

Was den ersten Punkt anbelangt, so gibt *v. Staudt*'s Theorie der imaginären Elemente die geometrische Übersetzung der analytischen Theorie. Und vom 2. Kapitel an sind für *Kötter* reelle und imaginäre Elemente gleichwertig.

Das Ersatzmittel für die Theorie der ganzen Funktionen findet *E. Kötter* in der Theorie der *Involutionen*. Wie eine Punktgruppe analytisch durch eine Gleichung n^{ten} Grades dargestellt wird, so kann sie geometrisch als „Koinzidenzgruppe“ zweier projektiver Involutionen fixiert werden, d. h. als System derjenigen Elemente, deren jedes zwei entsprechenden Gruppen projektiver Involutionen I_m und I_{n-m} gemeinsam ist. Als allgemeine Beweismethode be-

---

sulle omografie di 2ª specie, Ist. Venet. Atti (6) 5 (1887); *F. London*, Zur Theorie der trilinearen Verwandschaft dreier einstufigen Grundgebilde, Math. Ann. 44 (1893), p. 345. Mit der Theorie der trilinearen Verwandschaften ebener Systeme hat sich lange Zeit hindurch *G. Hauck* beschäftigt (J. f. Math. 95 (1883), p. 1, insbes. § 3; ebenda 97 (1884), p. 261; 98 (1884), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207), welcher zu derselben zunächst dadurch gelangte, daß er vom Gesichtspunkte der darstellenden Geometrie aus die Beziehungen untersuchte, die zwischen drei Projektionen eines und desselben ebenen oder räumlichen Systems obwalten.

113) Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven, Berlin Abhandl. 1887.

nutzt er den Schluß von n auf $n+1$, indem der Fall $n=2$ aus der gewöhnlichen projektiven Geometrie wohlbekannt ist.

Auf die Lehre der Involutionen folgt diejenige der „Involutionsnetze" zweiter und höherer Stufe, die den linearen Systemen binärer Formen entsprechen; aus diesen werden gewisse ∞^1 Reihen von Punktgruppen herausgehoben, die sogen. „Involutionen μ^{ten} Ranges", welche sich zu ersteren gerade so verhalten, wie ein Kegelschnitt oder eine Raumkurve 3. Ordnung zur Ebene bezw. zum Raume. Zwei Involutionen m^{ter} Ordnung, μ^{ten} Ranges und n^{ter} Ordnung, ν^{ten} Ranges können projektiv aufeinander bezogen werden, und haben im allgemeinen $m\nu + n\mu$ gemeinsame Stellen.

Im 4. Kapitel werden (immer durch Schlüsse von n auf $n+1$) die Lehrsätze über die Erzeugung der algebraischen Kurven, ihre gemeinsamen Punkte und ihr Zusammenfließen zu Büscheln, Netzen usw. begründet. Zwei zueinander projektive Büschel von Kurven m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen eine Kurve n^{ter} Ordnung (d. h. ein Punktgebilde, welches von einer Geraden allgemeiner Lage in n Punkten getroffen wird). Zwei Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung, deren gemeinsame Punkte für beide einfach sind und voneinander verschiedene Tangenten besitzen, haben stets $m \cdot n$ Schnittpunkte. Darauf folgen weitere Schnittpunkttheoreme und Sätze über Polarentheorie; zuletzt wird die *Graßmann*'sche lineale Erzeugung der Kurven n^{ter} Ordnung auf die Betrachtung der allgemeinen n-linearen Verwandtschaft verallgemeinert, und von da aus eine Konstruktion der Kurve n^{ter} Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2}$ gegebene Punkte gewonnen[114].

27. Untersuchungen von R. De Paolis. Die *Kötter*'sche Theorie der ebenen Kurven darf vielleicht noch der *Steiner*'schen Richtung (Nr. **9**, **10**, **24**) zugerechnet werden, insofern der Verf. an der Idee festhält, Kurven beliebiger Ordnung durch projektive Büschel von Kurven niederer Ordnungen zu erzeugen. Dagegen kommt die gleichzeitig durch *R. De Paolis* erdachte Lösung desselben Problems der *v. Staudt*'schen Definition der Kegelschnitte durch Polarsysteme näher; aber die von ihm begonnenen Untersuchungen wurden leider durch seinen 1892 erfolgten Tod abgeschnitten.

De Paolis hatte seinen Ausgangspunkt noch weiter zurückverlegt, und

114) Ergänzungen (Erzeugung von Kurven mit vielfachen Punkten, Polarentheorie, *Jacobi*'sche Kurve eines Netzes, *Hesse*'sche Kurve) lieferte *Kötter* in der Abhandlung: Die *Hesse*'sche Kurve in rein geometrischer Behandlung, Math. Ann. 34 (1889), p. 123.

war von den eigentlichen Grundlagen der Geometrie ausgegangen (III C 4, *Berzolari*, Nr. **11**). Seine „*Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi*“ [115]) enthält Betrachtungen aus der Analysis situs (III A, B 3, *Dehn* und *Heegaard*), insbesondere aus der Zusammenhangstheorie der Flächen, mit rein geometrischen Beweisen von Sätzen über kontinuierliche Korrespondenzen, welche mit analytischen Sätzen von *Weierstraß* und *G. Cantor* gleichbedeutend sind. Dies kann als derjenige Teil der Geometrie angesehen werden, welcher der „allgemeinen Funktionentheorie“ entspricht. — Die zweite Abhandlung „*Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di* 1^a *specie*“ [116]) entspricht der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Die Grundlage zu dieser Theorie gibt eine rein geometrische Untersuchung der n-linearen Verwandtschaften zwischen n einstufigen Gebilden: dabei werden die Elemente dieser Gebilde zu ∞^{n-1}-Scharen von Gruppen aus n Elementen („aggruppamenti proiettivi di ordine n“) zusammengefaßt, welche dadurch charakterisiert sind, daß wenn man $n-2$ Elemente einer Gruppe (oder eines Punkt-n-tupels) auf den bez. Gebilden als fest annimmt, die beiden übrigen stets projektive Reihen beschreiben. Es ist das das geometrische Bild der n-linearen Gleichung $a_x a_y a_z \cdots = 0$, welche alle Polargleichungen in Gebilden erster Stufe, sowie auch die Gleichung der allgemeinen Korrespondenz (m, n) als Spezialfälle umfaßt. Bei zusammenfallenden Gebilden liefern die obigen „aggruppamenti proiettivi“ die *Involutionen* n^{ter} Ordnung und $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe, und als Durchschnitte letzterer erhält man diejenigen niedrigerer Stufe. Eine Involution n^{ter} Ordnung und $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe und eine (in dieser nicht enthaltene) 1. Stufe und ebenfalls n^{ter} Ordnung haben stets *eine* gemeinsame Punktgruppe; durch diesen Satz, welcher den Fundamentalsatz der Algebra ersetzt, wird die notwendige Grundlage zu den weiteren synthetischen Untersuchungen gewonnen. Ebenso wie sich der Fundamentalsatz der Algebra in rein algebraischer Weise nicht begründen läßt, so muß auch der Beweis dieses Satzes aus den allgemeinen Betrachtungen von Abh. [115]) über kontinuierliche Korrespondenzen gefolgert werden.

Diese beiden Abhandlungen waren Ausarbeitungen des 1. und 2. Teiles eines Manuskripts, welches der Verf. Ende 1887 der „Accademia dei Lincei“ zu einem Preisbewerb eingereicht hatte. Von den

---

115) Mem. Soc. it. sc. (3) 7 (1890), Nr. 6. Auszug, mit weiteren Untersuchungen, in Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 93.

116) Torino Mem. (2) 42 (1892), p. 495. Bericht von *C. Segre* in Torino Atti 27 (1892), p. 366.

weiter vorgenommenen Untersuchungen, welche die rein synthetische Theorie der algebraischen ebenen Kurven liefern sollten, lag im Manuskript als 3. Teil ein kurzer Entwurf vor, welcher nach dem Tode des Verf. durch *C. Segre* veröffentlicht wurde[117]). Dieser enthält bereits die geometrische Definition der Kurve n^{ter} Ordnung durch eine Art n-linearer Verwandtschaft, und den Satz über die Schnittpunkte zweier Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung[118]).

VI. Mehrdimensionale algebraische Geometrie.

28. Ansätze zur analytischen Auffassung mehrdimensionaler Räume. Es war nur eine durch unser Anschauungsvermögen veranlaßte Einschränkung, daß wir uns in der Geometrie lange Zeit auf Betrachtungen von höchstens drei Dimensionen bezogen. Aber nachdem die Anwendung der Algebra auf die Geometrie gezeigt hatte, wie die analytischen Tatsachen, welche mit der Theorie der Funktionen einer, zweier oder dreier Variabeln verknüpft sind, einer den Sinnen zugänglichen Darstellung fähig sind, lag es nahe, nach einer solchen Darstellung auch für den Fall einer größeren Anzahl von Variabeln zu fragen; und folglich, um auch die Analogie der Sprache zu behalten, nicht nur von „beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeiten", sondern von „mehrdimensionalen Räumen" (III A B 1, *Enriques*, Nr. 15; III C 9, *Segre*) zu reden. Das geschah zunächst, ohne daß man sich irgendwie um die Existenz solcher Räume kümmerte (die man als eine mehr metaphysische als mathematische Frage betrachtete); aber, mochte diese Darstellung eine sinnlich wahrnehmbare oder eine übersinnliche sein, man fand sie doch nützlich und machte davon wiederholten Gebrauch.

Die erste Andeutung über eine solche Auffassung hat vermutlich *A. Cayley* in seinen „*Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*"[119]) gegeben; aber erst 1869 führte er sie im „*Memoir on abstract geometry*"[120]) näher aus. *A. Cauchy* bemerkte, wie die mehrdimensionale Geometrie geeignet sei: „à éclaircir un grand nombre de questions délicates" et „à guider le calculateur au milieu des difficultés"[121]). Den

117) Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni, Roma Linc. Rend. (5) 3 (1894, 2. sem.), p. 225 (datiert vom 30. Dez. 1887).

118) Man vgl. auch *C. Segre*'s Nachruf für *De Paolis* in Palermo Rend. 6 (1892), p. 208.

119) Cambr. math. J. 4 (1843), p. 119 = Coll. math. papers 1, p. 55.

120) Lond. Trans. 160 (1869), p. 51 = Papers 6, p. 456.

Begriff einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit hat *H. Graßmann* in seiner Ausdehnungslehre von 1844 allgemein aufgestellt, indem er seine „Systeme n^{ter} Stufe“ aus einer beliebigen erzeugenden Figur durch „n verschiedene Gesetze der Änderung“ hervorgehen ließ. Diese Erzeugungsweise tritt auch in *B. Riemann*'s Habilitationsschrift von 1854[122]) auf, in welcher als wesentliches Kennzeichen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit verlangt wird, „daß sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Größenbestimmungen zurückführen läßt“[122a]). *Riemann* verfolgt dann speziell die „Maßverhältnisse“ einer solchen Mannigfaltigkeit, und dieser Gedanke hat sich nach vielen Richtungen entwickelt (III A, B 1, Prinzipien der Geometrie, *Enriques*, Abschn. V A; III D 10, Differentialgeometrie mehrdimens. Mannigf., *Stäckel*). Insbesondere tritt durch *Riemann* und *E. Beltrami*[123]) der Begriff der verschiedenen Krümmungen dieser Mannigfaltigkeit in den Vordergrund, und das Hauptinteresse konzentriert sich auf die Mannigfaltigkeiten „konstanter Krümmung“, welche eine $\frac{n(n+1)}{2}$-fache Schar von Bewegungen gestatten. *A. Helmholtz*[124]) versucht dagegen die Mannigfaltigkeit durch die Existenz dieser Schar von Bewegungen zu charakterisieren, und von hier aus auf ihre Maßverhältnisse zu schließen: ein Problem, dessen strenge Behandlung später *S. Lie* lieferte[124a]) (III A B 1, *Enriques*, Abschn. V B).

29. Mehrdimensionale Räume veranlaßt durch Betrachtung beliebiger Raumelemente. In *Graßmann*'s Erzeugung der „Systeme

---

121) Mémoire sur les lieux analytiques, Paris C. R. 24 (1847), p. 885 = Oeuvres 10, p. 292—295.

122) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Gött. Abh. 13, oder auch Ges. Werke (Leipzig 1876), 2. Aufl. 1892, p. 272 u. ff. Man vgl. auch die Commentatio mathematica, ebenda p. 403.

122a) Das ist aber heute als unzureichend erkannt worden; die Zuordnung muß dazu noch umkehrbar eindeutig und stetig sein (I A 5, Mengenlehre, *Schoenflies*, Nr. 2, Anm. 16)).

123) Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante, Ann. di mat. (2) 2 (1868—1869), p. 232 = Opere matem. 1 (Milano 1902), p. 406.

124) Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen, Gött. Nachr. 3. Juni 1868 = Wiss. Abh. 2 (Leipzig 1883), p. 618. Vgl. auch Verhandl. d. naturh.-med. Ver. zu Heidelberg 4 (1866), p. 197; 5 (1869), p. 31 = Wiss. Abh. 2, p. 613. Geometrische Erläuterungen zum *Helmholtz*'schen Problem lieferte *F. Klein* (Nicht-Euklidische Geometrie, autogr. Vorl., Göttingen 1889—90, 2. Aufl. 1894, Bd. 1, p. 261 ff.).

124a) Theorie der Transformationsgruppen 3 (Leipzig 1893), Abt. 5. Man vgl. auch die früheren dort zitierten Aufsätze, insbesondere *H. Poincaré*, Paris Bull. Soc. math. de France 15 (1887), p. 203.

n^{ter} Stufe" war auch ein geometrischer — aber noch unbestimmter — Ansatz enthalten. Diesen Ansatz hat *J. Plücker* in bestimmter Weise formuliert, indem er bemerkte, daß man unserem Raume eine beliebige Anzahl von Dimensionen zuerteilen kann, durch eine passende Wahl des geometrischen Gebildes, welches man als erzeugendes Element auffaßt. Diesen Gedanken wendete er in seiner „*Neuen Geometrie des Raumes*"[125]), obwohl vielfach in analytischer Form, auf den Fall der geraden Linie im Raume an. Ebenso hat *Cayley*[126]) die Kegelschnitte einer Ebene als Punkte eines 5-dimensionalen Raumes aufgefaßt; und *H. Halphen*[127]) hat einige Sätze über Systeme von ebenen Kurven aufgestellt, welche mit wohlbekannten Sätzen über Mannigfaltigkeiten 2. und 3. Grades gleichbedeutend sind. Diese Idee hat in immer breiteren Kreisen Erfolg und Anwendung gefunden; die Kugelgeometrie, die Geometrie der Kreise oder der Kegelschnitte im Raume u. a. sind daraus erwachsen (vgl. III A, B 8, Koordinatensysteme, *Müller*; III C 10, Höhere Raumelemente, *Waelsch*). Insbesondere läßt sich jedes lineare System n^{ter} Stufe von algebraischen Formen (Punktgruppen auf der geraden Linie, ebenen Kurven, Flächen, bilinearen Formen, Konnexen usw.) als ein (linearer) R_n auffassen, was zu einer großen Reihe von Spezialfällen und Anwendungen Anlaß gibt.

30. Weitere Ausbildung der projektiven Auffassung. Den größten Antrieb haben die n-dimensionalen Untersuchungen erst dann erhalten, als sich die Geometer, durch obige Betrachtungen veranlaßt, die Aufgabe stellten, die elementare und projektive Geometrie der Ebene und des Raumes auf den n-dimensionalen Fall zu übertragen. Das war damit gleichbedeutend, daß man in der gewöhnlichen Raumgeometrie das Postulat der dreifachen Ausdehnung des Raumes fallen ließ (und dementsprechend auch die Grundsätze über das gegenseitige Treffen von geraden Linien und Ebenen abänderte). Die 3 Dimensionen des Raumes betrachtete übrigens schon *Gauß* als eine „Eigentümlichkeit der menschlichen Seele"[128]). Und 1846 hat *Cayley*[129]) darauf hingewiesen, daß

125) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1868—1869. Eine Andeutung über den obigen Gedanken ist bereits 1846 im „System der Geometrie des Raumes" Nr. 258 zu finden (vgl. Nr. 12). Man vgl. auch die im 1. Bande von *Plücker*'s Ges. wiss. Abhandl. (Leipzig 1895) unter Nr. 33—38 abgedruckten Schriften.

126) On the curves which satisfy given conditions, London Trans. 158 (1867), p. 75 = Papers 6, p. 191.

127) Recherches de géométrie à n dimensions, Paris Bull. soc. math. de Fr. 2 (1874), p. 34.

128) *Sartorius v. Walterhausen,* Gauß zum Gedächtnis, Leipzig 1856, p. 81.

durch mehrdimensionale Betrachtungen gewisse Untersuchungen über Konfigurationen vereinfacht werden können, insofern letztere sich aus anderen höherer Räume, welche einfacher sind, durch ebene Schnitte ableiten lassen. Dieser Gedanke hatte aber erst später Erfolg, obwohl dabei keine prinzipielle Schwierigkeit vorlag[130]).

Die Entwicklung der mehrdimensionalen Geometrie zu einer selbständigen Disziplin beginnt ungefähr 1870 mit einer Reihe von Aufsätzen, welche anfangs noch einen wesentlich analytischen Charakter besitzen, während nach und nach der geometrische Standpunkt immer mehr in den Vordergrund tritt. Hier mag nur an die bahnbrechenden Arbeiten erinnert werden, während für die anderen auf III C 9, Mehrdimensionale Räume (*Segre*) verwiesen wird. *M. Noether* nimmt in seinen Untersuchungen über das eindeutige Entsprechen algebraischer Gebilde[131]) bereits auf den n-dimensionalen Fall Bezug. *A. Clebsch* zieht den invariantentheoretischen Gesichtspunkt heran und lehrt dadurch in einem R_n lineare Räume niedrigerer Dimension durch Koordinaten zu bestimmen[132]). *H. Halphen*[127]) betrachtet den allgemeinen Schnitt zweier algebraischer Gebilde im R_n, zugleich mit dem Falle vielfacher Punkte oder Teile; Ergänzungen zu seinen Beweisen hat später *M. Noether* gebracht[133]). *C. Jordan* entwickelt die metrische Geometrie des R_n in Cartesischen Koordinaten[134]), während *E. d'Ovidio*[135]) die allgemeine projektive Maßbestimmung im R_n ausführt. In den Arbeiten *F. Klein*'s, welche 1868—1872 in den Gött. Nachr. und in den Math. Ann. publiziert wurden, treten mehrdimensionale Betrachtungen fortwährend auf, und werden besonders auf Mannigfaltigkeiten 2. Grades und damit zusammenhängende Probleme (Liniengeometrie[136]), stereographische Projektion, allgemeine projektive

---

129) Sur quelques théorèmes de la géométrie de position, J. f. Math. 31 (1845), p. 217 = Papers 1, p. 321.

130) Wesentliche metrische Eigenschaften des R_n sind in einer 1852 der Wiener Akademie vorgelegten, aber erst neulich publizierten Abhandlung von *L. Schläfli* enthalten (Theorie der vielfachen Kontinuität, Zürich Naturf. Ges. Neue Denkschriften 38, 1901).

131) Math. Ann. 2 (1870), p. 293.

132) Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Gött. Abh. 17 (1872); Math. Ann. 5 (1872), p. 427. Eine Andeutung über die Koordinaten niedrigerer Räume im R_n ist bereits in *Graßmann*'s Ausdehnungslehre von 1844 enthalten.

133) Erlangen Ber., 4. Dez. 1876; Math. Ann. 11 (1877), p. 571.

134) Paris C. R. 75 (1872), p. 1614; Paris Bull. soc. math. de Fr. 3 (1875), p. 103.

135) Le funzioni metriche fondamentali..., Roma Linc. Mem. (3) 1 (1877).

136) „Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5", Math. Ann. 5 (1871), p. 261 u. ff.

Maßbestimmung) angewandt. In *Klein*'s Erlanger Programmschrift[137]) wird ebenfalls der n-dimensionale Fall berücksichtigt.

In der grundlegenden Abhandlung von *W. K. Clifford* „On the classification of loci"[138]), wird das allgemeine Studium der Kurven in beliebigen Räumen in Angriff genommen, und synthetische Betrachtungen treten abwechselnd mit analytischen auf. Die rein synthetische projektive Geometrie des R_n beginnt mit der Arbeit von *G. Veronese* „Behandlung der projektivischen Verhältnisse . . ."[139]), in welcher der R_n durch Projektion eines R_{n-1} von einem außerhalb gelegenen Punkte geometrisch erzeugt wird, und die Fundamentaloperationen des Projizierens und des Schneidens systematisch angewandt werden, um Gebilde irgend eines Raumes, insbesondere auch eines R_3, aus anderen eines höheren Raumes durch Projektion abzuleiten, und Eigenschaften der ersteren aus denen der letzteren zu folgern. Einzelne Abschnitte dieser Abhandlung sind den projektiven Beziehungen zweier R_n, der Erzeugung algebraischer Gebilde durch projektive Grundformen, und den M^2_{n-1} eines R_n gewidmet; im 4. Abschnitt werden auch die *Plücker-Cayley*'schen Formeln für die Singularitäten einer ebenen Kurve oder einer Raumkurve auf Kurven des R_n ausgedehnt. Diese Arbeit eröffnete für Italien eine Periode lebhafter Tätigkeit in der mehrdimensionalen projektiven und algebraischen Geometrie, bei welcher *C. Segre* im Mittelpunkte steht, und in welcher synthetische und analytische Betrachtungen abwechselnd angewandt werden. Für die „Geometrie auf einem algebraischen Gebilde" (III C 4, Algebraische Kurven, *Berzolari*, Nr 23—34; III C 6, Algebraische Flächen, *Castelnuovo* und *Enriques*; vgl. auch unten Nr. 31—32) haben sich diese Untersuchungen als besonders nützlich erwiesen. Durch Anregung von *C. Segre*[140]) wurde auch die Aufgabe: „einen R_n durch ein System von unabhängigen Postulaten derartig zu definieren, daß die Bestimmung seiner Punkte durch Koordinaten daraus gefolgert werden könne" in vielfacher Weise behandelt.

Erst durch diese Entwicklung der n-dimensionalen Geometrie ist die synthetische Behandlung der analytischen wieder gleichwertig geworden.

---

137) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. Abgedruckt in Math. Ann. 43 (1893), p. 63.

138) London Trans. 169 (1878), p. 663; oder auch Math. papers (London 1882), p. 303.

139) Math. Ann. 19 (1881), p. 161.

140) Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche, Riv. di mat. 1 (1891), p. 42.

VII. Geometrie auf einem algebraischen Gebilde.

31. Heranziehen transzendenter Funktionen. Die Stellung von Clebsch. Die Theorie der algebraischen Kurven und Flächen, welche bis ca. 1860 eine rein projektive war, hat sich von jener Zeit an auch nach einer anderen Richtung entwickelt, wozu die neueren analytischen und geometrischen Gesichtspunkte beigetragen haben.

Einerseits hat *A. Clebsch*[140a]) die in den letzten Jahrzehnten bedeutend fortgeschrittene Funktionentheorie, insbesondere die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (II B), in Kontakt mit der Geometrie gesetzt, und gezeigt, wie sich die Theorie der elliptischen und *Abel*'schen Funktionen auf die Geometrie der algebraischen Kurven anwenden läßt. Seiner Abhandlung „Über die Anwendung der *Abel*'schen Funktionen in der Geometrie“[141]) liegt der Gedanke zugrunde, daß man die Gleichung, welche *Abel* zur Definition der „Klasse“ (d. h. der Irrationalität) in den nach ihm benannten Integralen ansetzt, als Gleichung einer algebraischen ebenen Kurve betrachten kann; und von hier aus erkennt er in den seit lange bekannten Schnittpunktsätzen eine unmittelbare Folge des *Abel*'schen Theorems, welches zugleich nicht nur die Anzahl der Bedingungen zwischen den Schnittpunkten algebraischer Kurven angibt, sondern auch diese Bedingungen selbst in möglichst durchsichtiger Form. Die auf die „Klasse“ bezügliche Zahl p der unabhängigen, überall endlich bleibenden Integrale setzte *Clebsch* mit der Anzahl der Doppelpunkte der entsprechenden ebenen Kurve in Verbindung, und stellte somit den Begriff des *„Geschlechtes“* einer algebraischen Kurve auf, welches für alle ebenen und nicht ebenen Kurven, die auseinander durch „eindeutige Transformation“ (mit Berücksichtigung der betreffenden komplexen Elemente!) abgeleitet werden können, denselben Wert hat[142]). Wenn auch dieser Begriff nicht neu und das Invariantztheorem in anderer Fassung bereits von *Riemann* gegeben worden war[143]), so hat doch *Clebsch* seine geometrische Interpretation allgemein ausgesprochen und dessen Tragweite erkannt. Dieser Satz gehörte einem bis dahin noch wenig durchforschten Gebiet an, welches von den *bleibenden Eigenschaften algebraischer Be-*

140a) Man vgl. den Nachruf für *Clebsch*, Math. Ann. 7 (1874), p. 20 ff. S. auch für diesen Abschnitt: *Brill* und *Noether*, Bericht, Abschn. V C. D.

141) J. f. Math. 63 (1863), p. 189.

142) J. f. Math. 64 (1864), p. 98.

143) Theorie der Abel'schen Funktionen, J. f. Math. 54 (1857), p. 115, insb. p. 133; oder Ges. Werke, 2. Aufl. 1892, p. 88 u. ff.

ziehungen bei beliebigen eindeutigen Transformationen handelt, und zu demselben gehörte ebenfalls die Frage nach den „Moduln" einer Klasse algebraischer Funktionen, deren Anzahl für den allgemeinen Fall bereits *Riemann* bestimmt hatte[144]). Dieses Gebiet, in welchem Funktionentheorie und Theorie der algebraischen Kurven miteinander verschmolzen erscheinen, haben die Arbeiten von *Clebsch* eröffnet und durchdrungen. Und als natürliche Erweiterung auf Gebilde 2. Stufe wurde der Begriff des Geschlechtes einer Fläche aufgestellt, und allgemein nach den Eigenschaften einer Fläche gefragt, welche durch eindeutige Transformation (oder Abbildung) der Fläche nicht zerstört werden[145]) (I B 1c, *Landsberg*, Nr. 23).

Andererseits waren zu jener Zeit auch in der geometrischen Forschung — durch Ausbildung der Lehre der Transformationen (III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*) — die Begriffe genügend vorgerückt. Hatte man sich vorher auf die projektiven und quadratischen Transformationen beschränkt, so war seit 1863 durch *Cremona*[146]) der allgemeine Begriff der eindeutig-umkehrbaren Punkttransformation einer Ebene aufgestellt, und 1869—71 durch *Cayley*[147]), *Cremona*[148]) und *Noether*[149]) auf den Raum ausgedehnt worden. Die Untersuchung der auf speziellen Flächen liegenden Kurven und Kurvensysteme hatte zu bemerkenswerten „Flächenabbildungen" geführt: darunter zu der vielfach behandelten ebenen Abbildung der Flächen 2. Grades und der durch *Clebsch*[150]) und *Cremona*[151]) geleisteten ebenen Abbildung der

144) a. a. O. p. 136.

145) Die Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen aufeinander hängt allerdings von einer ganzen Reihe von Fragen ab, von welchen man zu jener Zeit keine Vorstellung hatte und die auch heute nicht ganz erledigt sind. Aber *Clebsch* hat auch hier den ersten Schritt getan, und den Begriff des „Geschlechtes" einer Fläche aufgestellt (Paris C. R. 67 (1868), p. 1238), dessen Invarianz bei eindeutigen Transformationen durch *M. Noether* (Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens..., Math. Ann. 2 (1870), p. 293; 8 (1875), p. 495, § 3—6) bewiesen wurde. Den Begriff des „numerischen" Geschlechtes (p_n) einer Fläche verdanken wir *Cayley*, London Trans. 159 (1869), p. 227; Math. Ann. 3 (1871), p. 526 = Papers 6, p. 355; 8, p. 394; und seine Invarianz haben *Zeuthen*, Math. Ann. 4 (1871), p. 21, und *Noether*, ebenda 8 (1875), p. 495, § 9 bewiesen.

146) Bologna Mem. (2) 2 (1863); ebenda 5 (1865), abgedruckt in Giorn. di mat. 1 (1863), p. 305; 3 (1865), p. 269, 363.

147) On the rational transformations between two spaces, London math. Soc. Proceed. 3 (1869—71), p. 127 = Papers 7, p. 189.

148) Gött. Nachr. 1871, abgedruckt in Math. Ann. 4 (1871), p. 213; Milano Rend. 4 (1871), p. 269, 315; Ann. di mat. 5 (1871), p. 131.

149) Math. Ann. 3 (1871), p. 547.

150) J. f. Math. 65 (1865), p. 359.

Flächen 3. Ordnung. In diesen Beispielen von eindeutigen Transformationen, deren letztere sich nicht auf den ganzen Raum, sondern nur auf einzelne Gebilde bezogen, lag auch das notwendige geometrische Material vor, um zu einer *Geometrie auf einem algebraischen Gebilde* (Kurve, Fläche usw.) aufzusteigen.

32. Geometrie auf einer algebraischen Kurve oder Fläche. In der *Geometrie auf einem algebraischen einfach ausgedehnten Gebilde*, d. h. auf einer *algebraischen Kurve* (I B 1 c, *Landsberg*; III C 4, *Berzolari*, Nr. **23**—**34**), werden die „rationalen Funktionen des Gebildes", d. h. die linearen Scharen (oder Involutionen) von Punktgruppen der Kurve verfolgt; das System der Niveaupunkte einer rationalen Funktion des Gebildes ist nämlich die allgemeinste rationale ∞^1-Involution. Diese Theorie hat sich nach verschiedenen Richtungen entwickelt:

1) die *funktionale Richtung*, nach *Riemann*'s „Theorie der Abelschen Funktionen", welche die rationalen Funktionen des Gebildes, d. h. die zu einer gewissen „Klasse" angehörigen algebraischen Funktionen und deren Integrale, d. h. die *Abel*'schen Integrale, funktionentheoretisch untersucht;

2) die *algebraisch-geometrische Richtung* nach einer grundlegenden Arbeit von *A. Brill* und *M. Noether*[152]), welche das algebraische Gebilde durch eine ebene Kurve versinnlicht, und auf dieser die rationalen Involutionen allgemein durch „adjungierte" Kurven ausschneidet. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Untersuchungen lieferte *E. Bertini*[153]);

3) die *algebraisch-arithmetische Richtung* nach *L. Kronecker*[154]) und *Dedekind-Weber*[155]), welche auf die Untersuchung der einzelnen „Klassen" algebraischer Funktionen die arithmetischen Methoden der Theorie der algebraischen Zahlenkörper (I C 4 a, *Hilbert*) anwendet;

4) die *rein geometrische Richtung*, welche mehrdimensionale Betrachtungen heranzieht, und die Involutionen g_n^k durch Kurven n^{ter}

---

151) In seiner 1866 von der Berliner Akademie preisgekrönten Schrift; J. f. Math. 68 (1868), p. 1.

152) Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann. 7 (1873), p. 269.

153) Ann. di mat. (2) 22 (1894), p. 1.

154) Zuerst in Vorlesungen dargelegt. S. die Abh.: Über die Diskriminante algebraischer Funktionen einer Variabeln, J. f. Math. 91 (1881), p. 301, und vor allem: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, J. f. Math. 92 (1882), p. 1. Man vgl. das Lehrbuch von *K. Hensel* und *G. Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902.

155) Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. f. Math. 92 (1882), p. 181.

Ordnung des R_k „darstellt", auf denen die Punktgruppen G_n der Involution durch die R_{k-1} ausgeschnitten werden. Dazu haben die italienischen Geometer, insbesondere *C. Segre* und *G. Castelnuovo* die wesentlichsten Beiträge geliefert; ersterem verdanken wir auch eine zusammenfassende Darstellung[156]).

Für *zweifach ausgedehnte Gebilde*, d. h. *algebraische Flächen*, kann man ebenfalls eine *analytische* oder *transzendente* (entsprechend der *Riemann*'schen) und eine *algebraisch-geometrische* Richtung unterscheiden. Der ersten ist *M. Noether*[157]) zuzurechnen, welcher Doppelintegrale algebraischer Differentiale einführte, die auf der Fläche überall endlich bleiben und das Analogon der *Abel*'schen Integrale 1. Gattung bei algebraischen Kurven sind; später auch *E. Picard*[158]), welcher auf den Flächen, deren „lineare Konnexion" > 1 ist, einfache Integrale von totalen Differentialen betrachtete, und *G. Humbert*[159]), welcher spezielle Flächen, darunter die sogen. „hyperelliptischen Flächen", untersuchte[160]). Dagegen haben die italienischen Geometer, insbesondere *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, die linearen Systeme von Kurven auf den Flächen untersucht, wofür durch das Studium der linearen Systeme ebener Kurven, d. h. von Kurven auf rationalen Flächen, bereits der Ansatz vorlag; und auf diesem Wege sind sie dazu gekommen, eine große Anzahl von invarianten Charakteren einer Fläche geometrisch zu definieren und zu beherrschen. In beiden Richtungen herrscht heutzutage in Italien eine große Aktivität. Eine zusammenfassende Darstellung der erhaltenen Resultate bis 1896 lieferten *Castelnuovo* und *Enriques* in Math. Ann. 48 (1897), p. 241; weiterer bis 1901 in Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 165; und neuerdings noch im Anhang (Note V) des Lehrbuches von *Picard* und *Simart*[160]). Übrigens vgl. man III C 6, Algebraische Flächen (*Castelnuovo* und *Enriques*); III C 9, Mehrdimensionale Räume (*Segre*); III C 11, Korrespondenzen (*Castelnuovo* und *Enriques*).

---

156) Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, Ann. di mat. (2) 22 (1894), p. 41.

157) a. a. O.; Math. Ann. 2 (1870), p. 293; 8 (1875), p. 495.

158) J. de math. (4) 1 (1885), p. 281; 2 (1886), p. 329; 5 (1889), p. 35 (in letzterer Abhandlung p. 135 Einführung des Begriffes der linearen Komplexion); sowie auch mehrere Aufsätze in Paris C. R.

159) J. de math. (4) 9 (1893), p. 29, 351; 10 (1894), p. 190; Paris C. R. 117 (1893), p. 361; 120 (1895), p. 365, 425.

160) Man vgl. die zusammenfassende Darstellung von *E. Picard* und *G. Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, 2 Bde., Paris 1897—1906, welche auch die neuesten Resultate einbegreift, und beiden Untersuchungsrichtungen gerecht wird.

VIII. Abzählende Geometrie.

33. Zweck und allgemeine Prinzipien. In einem algebraischen System von ∞^r geometrischen Gebilden gibt es eine endliche Anzahl von Gebilden, welche r einfache unabhängige Bedingungen erfüllen. Es kann nun der Fall eintreten, daß es, bei vorgelegten Bedingungen, zunächst darauf ankommt, *jene Anzahl* zu kennen, auch ohne die einzelnen Lösungen zu bestimmen. So ist es beispielsweise, wenn man vorläufig nur den Grad einer irgendwie erzeugten Kurve oder Fläche sucht. Die Bestimmung jener Anzahl kann öfters durch allgemeine Methoden ausgeführt werden, deren Inbegriff die sogenannte *abzählende Geometrie* III C 3 (*Zeuthen*) bildet. Diese abzählenden Probleme können auch algebraisch formuliert werden; es handelt sich nämlich um die Anzahl der Lösungen eines Systems algebraischer Gleichungen, unter der Voraussetzung, daß diese Anzahl überhaupt eine endliche sei. Das kommt zuletzt darauf hinaus, indem wir alle Unbekannten bis auf eine eliminiert denken, den Grad der resultierenden Gleichung mit der einzigen letzten Unbekannten zu bestimmen. Der Grad dieser Gleichung ist mit der Anzahl ihrer Wurzeln identisch, unter der Voraussetzung, daß die Aufzählung sowohl imaginäre als reelle Wurzeln umfaßt, und jede k-fache Wurzel k-mal mitgerechnet wird; hat sich der Grad infolge der den gegebenen Größen erteilten Werte um h erniedrigt, so ist dazu auch ∞ als h-fache Wurzel zu betrachten.

Ihren ersten Ausgangspunkt hat also die abzählende Geometrie in der algebraischen Darstellung, insbesondere im Fundamentalsatze der Algebra (I B 1 a, *Netto*, Nr. 7) und in dem daraus fließenden *Bézout*'schen Theorem (I B 1 b, *Netto*, Nr. **6**; III C 4, *Berzolari*, Nr. **2**). Auf ersterem beruht das Anm.[107]) erwähnte „Korrespondenzprinzip" (III C 3, *Zeuthen*, Nr. **13**), von dem vermutlich schon *Steiner* in einer Reihe unbewiesener Sätze[102]) Gebrauch machte, und welches durch *Chasles, de Jonquières, Cremona* (Nr. **24**) vielfache Anwendung fand. Bei den weitergehenden Anwendungen dieses Prinzips entstehen aber wegen der Multiplizität der einzelnen Lösungen und des eventuellen Auftretens von Lösungen anderer Aufgaben, die in derselben Gleichung einbegriffen sind, erhebliche Schwierigkeiten. Immerhin ist das eine Hauptmethode der abzählenden Untersuchungen und hat zu weiteren Korrespondenzprinzipien, nämlich auf einer algebraischen Kurve (*Cayley-Brill*'sche Formel) oder auch in der Ebene und im Raume von drei oder mehr Dimensionen Anlaß gegeben (III C 3, *Zeuthen*, Nr. **16**, **17**).

Eine große Tragweite hatte während mehrerer Jahrzehnte

Poncelet's „Kontinuitätsprinzip“ (Nr. 7), welches besonders bei Problemen über algebraische Kurven und Flächen angewandt wurde, indem man letztere in kontinuierlicher Weise in Gebilde niedrigerer Ordnungen, speziell in lauter Geraden und Ebenen zerfallen ließ. *H. Schubert* sprach es 1876 als „Prinzip der Erhaltung der Anzahl“[161]) in folgender Weise aus: „Eine Anzahl wird unendlich oder bleibt erhalten, wenn die gegebenen Gebilde spezielle Lagen im Raume oder zueinander einnehmen, oder wenn anstelle der zunächst allgemein gedachten gegebenen Gebilde speziellere Gebilde treten, welche die Definition erfüllen.“ Er wies zugleich auf seine algebraische Begründung hin, welche erst in neuerer Zeit präziser aufgefaßt und wieder erörtert wurde (III C 3, *Zeuthen*, Nr. **33**, wo insbesondere auch auf die von *E. Study*, Arch. Math. Phys. (3) 8 (1905), p. 271 erhobenen Einwände eingegangen wird).

Bei *Chasles* und *de Jonquières* gilt es öfters, gewisse Anzahlen, hauptsächlich über Systeme von Kurven und Flächen, aus anderen, elementaren (den sog. „Charakteristiken“) abzuleiten. Diese Ableitung stellte *G. H. Halphen*[161a]) in einigen Fällen durch eine Art symbolischer Multiplikation dar, und daraus hat *H. Schubert* ein allgemeines Mittel geschaffen zur sukzessiven anzahl-geometrischen Einführung neuer Bedingungen, die sich aus einfacheren zusammensetzen lassen, und deren sogen. „Moduln“ aus den Moduln letzterer durch jene Multiplikation entstehen[162]). In diesem Bedingungskalkül fand er das Mittel zu einem systematischen Aufbau der abzählenden Geometrie, welchen sein „Kalkül der abzählenden Geometrie“[161]) enthält. Die Bildung der dazu notwendigen elementaren Moduln beruht auf den beiden von der Algebra herrührenden Hauptmethoden, das Prinzip der Erhaltung der Anzahl und das Korrespondenzprinzip, welche bzw. die sogen. „Inzidenzformeln“ und „Koinzidenzformeln“ liefern: auf diese wird dann die symbolische Rechnung angewandt. Formeln und Rechnung sind später auf mehrdimensionale Räume erweitert worden (III C 3, *Zeuthen*, Nr. **26**).

IX. Differentialgeometrie.

34. Exkurs über Funktionentheorie. Die Untersuchungen der Differentialgeometrie unterscheiden sich von den vorhergehenden

---

161) Math. Ann. 10 (1876), p. 23; Kalkül der abzählenden Geometrie (Leipzig 1879), p. 12.

161a) Paris C. R. 76 (1873), p. 1074.

162) Math. Ann. 10 (1876), p. 1, 318; vorläufige Mitteilungen in Gött. Nachr. 1874—75.

hauptsächlich dadurch, daß ihnen, allgemein zu reden, nicht die Betrachtung eines ganzen Gebildes (Kurve, Fläche usw.) zugrunde liegt, sondern bloß diejenige einer gewissen „Umgebung" eines Elementes, außerhalb welcher die Verhältnisse gewöhnlich unerörtert bleiben. Es kommt also oft gar nicht darauf an, ob das zu untersuchende Gebilde ein algebraisches oder ein analytisches oder auch kein solches ist.

Von diesem Standpunkte aus läßt sich die geometrische Wissenschaft in zwei Teile spalten, entsprechend einer Teilung der Funktionentheorie.

Bekanntlich heißt $w = f(z)$ eine *Funktion* der reellen Variablen z,[163]) wenn in einem gewissen Intervalle zu jedem (reellen) Werte von z ein bestimmter Wert oder auch mehrere getrennte Werte von w gehören. Diese *Zusammengehörigkeit* ist das einzige Charakteristische am Funktionsbegriff, während alle übrigen Eigenschaften, von denen man gewöhnlich bei Funktionen redet, nur bestimmten Funktionsklassen zukommen.

Will man aber die Variabilität von z nicht auf reelle Werte einschränken, sondern auch komplexe Werte (II B) zulassen, so empfiehlt es sich, den Funktionsbegriff dahin einzuschränken, daß man nur *analytische Funktionen* betrachtet, diejenigen nämlich, welche sich innerhalb eines gewissen Gebietes in eine gleichmäßig konvergierende *Taylor*'sche (Potenz-)Reihe entwickeln lassen. Das ist aber auch, wenn wir komplexe Koeffizienten in der Potenzreihe zulassen, der allgemeinste Begriff der *Funktion einer komplexen Veränderlichen*, wie derselbe von *K. Weierstraß* eingeführt worden ist[164]). Durch die innerhalb eines bestimmten Kreises konvergierende Potenzreihe:

$$w = a + b(z - z_0) + c(z - z_0)^2 + \cdots$$

wird nämlich ein *Funktionselement* definiert, aus welchem die entsprechende *Gesamtfunktion* durch den *Prozeß der analytischen Fortsetzung* (II B 1, Analytische Funktionen, *Osgood*, Nr. **13**) herzustellen ist.

---

163) Nach *G. Lejeune-Dirichlet*; vgl. II A 1, Funktionenlehre, *Pringsheim*, Nr. 3.

164) *Weierstraß*, Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen (handschr. Vorl.) § 122. Die *Cauchy-Riemann*'sche Definition einer Funktion einer komplexen Veränderlichen $u + iv = f(x + iy)$ (nach *Cauchy*: „fonction monogène", Exerc. d'an. et de phys. math., Paris 1839, 4, p. 346; *Riemann*, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, Diss. Göttingen 1851, oder Ges. Werke, 2. Aufl., p. 3—4) legt dagegen für die reellen Bestandteile u, v die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

zugrunde (II B 1, *Osgood*, Nr. 2).

Entsprechend der obigen Definition sind unter den Funktionen einer reellen Variablen 1) unstetige, 2) stetige aber nicht differentiierbare, 3) stetige, ein- oder mehrmal oder auch unendlich oft differentiierbare, aber noch nicht analytische, 4) analytische Funktionen einbegriffen. Dagegen sind die Funktionen einer komplexen Variablen von Hause aus analytische Funktionen. Und entsprechendes gilt auch für Funktionen mehrerer Variablen. — Sehen wir von den unstetigen, sowie auch von den stetigen aber nicht differentiierbaren Funktionen reeller Variabeln ab, deren Auftreten in der Geometrie im folgenden Kapitel kurz angedeutet und in III A, B 2 „Linie und Fläche" (*v. Mangoldt*) ausführlich besprochen wird, so lassen sich die Funktionen reeller und komplexer Variablen in folgender Weise zusammenfassen:

1) Die *Funktionselemente*, worunter wir einerseits die stetigen ein- oder mehrmal differentiierbaren Funktionen reeller Variablen verstehen, insoweit für dieselben innerhalb der bez. Definitionsbereiche die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe noch nicht verlangt wird; und andererseits die analytischen Funktionen reeller oder komplexer Variablen, so lange man deren Betrachtungen auf einzelne Potenzreihen einschränkt;

2) die *Gesamtfunktionen*, welche innerhalb ihrer eventuellen „natürlichen Grenzen" (II B 1, *Osgood*, Nr. **13**, Anm. [65]); III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. 8) für alle komplexen Werte der Variablen definiert sind, und mit Ausnahme der singulären Stellen stetig, unbeschränkt differentiierbar und durch Potenzreihen darstellbar sind.

35. Gegensatz zwischen Geometrie eines begrenzten Raumstückes und Geometrie des Gesamtraumes. Diesen beiden Funktionsklassen entsprechend läßt sich die Geometrie in zwei Teile spalten[165]), nämlich:

1) *Geometrie im begrenzten Raumstück* oder *Infinitesimalgeometrie* oder auch *Differentialgeometrie* (in engerem Sinne[166])), entsprechend der Verwendung von Funktionselementen;

2) *Geometrie des Gesamtraumes*, entsprechend der Verwendung von Gesamtfunktionen;

auf jeden Zweig der Geometrie (III A, B 4b, Gruppentheorie, *Fano*, Nr. 3) ist diese Spaltung anwendbar.

Zu 1) gehört der größte Teil der Anwendungen der Differential-

---

165) *F. Klein*, Höhere Geometrie 1, p. 6 u. ff.

166) D. h. als Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie, und nicht als Gegensatz zur „algebraischen Geometrie".

und Integralrechnung auf die Geometrie; vgl. III D 1, 2, Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Kurven, Flächen und den Raum (*v. Mangoldt*); III D 3, Flächenkurven (*v. Lilienthal*), teilweise auch III D 6. 7. 8. 9. 10. Dabei hat man gewöhnlich mit Funktionen reeller Variabeln zu tun, welche nur für allgemeine Werte der Variabeln eine gewisse (endliche) Anzahl von Malen differentiierbar sein müssen[167]). Die Einführung komplexer Veränderlichen gestattet manchmal, der Behandlung, durch den so ermöglichten Algorithmus (vgl. Anm.[64a])), eine bequemere und elegantere Form zu erteilen, z. B. in der *Theorie der konformen Abbildung von Flächen* (II B 1; Analytische Funktionen (*Osgood*), Nr. **5**, **19** u. ff.; III D 6a, Flächenabbildung (*Voß*), Nr. **3**—**5**) und in der *Theorie der Minimalflächen* (III D 5, Transzendente Flächen (*v. Lilienthal*), Nr. **19** u. ff.; III D 6a, Flächenabbildung (*Voß*), Nr. **27**); speziell bei letzteren in den sog. *Weierstraß*'schen Formeln (III D 5, Nr. **21**). — Zu diesem Zweige der Geometrie gehört auch der größte Teil der Untersuchungen von *S. Lie* über Transformationsgruppen (II A 6, *Maurer* und *Burkhardt*) und Berührungstransformationen (III D 7, *Scheffers*), insofern *Lie* bei seinen Transformationen gewöhnlich nur Funktionen mit einem beschränkten Gültigkeitsbereiche, ohne analytische Fortsetzung — und manchmal auch nur einen ganz unbestimmten Funktionsbegriff — im Auge hatte[168]).

In der Geometrie des Gesamtraumes kommen dagegen die Fragen zur Sprache, in deren Besprechung die geometrischen Gebilde als Ganzes betrachtet werden. Die dabei auftretenden Funktionen müssen sich also, aus ihren einzelnen Elementen, zu wohlbestimmten Gesamtfunktionen fortsetzen lassen, wozu der analytische Charakter erforderlich ist. Die Geometrie des Gesamtraumes kann folglich auch als *Geometrie der analytischen Gebilde* bezeichnet werden, d. h. der Gebilde, die durch analytische Funktionen (oder Gleichungen) definiert sind[168a]). Bei kom-

---

167) Vgl. z. B. *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1894, p. 1, 60 (2. Aufl., 1902—03, 2 Bde).

168) Die Differentialgeometrie hat bemerkenswerte Beziehungen 1) zur höheren *Geodäsie* (VI 3, *Pizzetti*), wegen der auf einen begrenzten Teil der Erdoberfläche bezüglichen Untersuchungen, mit welchen sich letztere beschäftigt; 2) zur *mathematischen Physik*, insbesondere zur Potentialtheorie (II A 7 b, *Burkhardt* und *Meyer*), wo man mit Abbildungen und Randwertaufgaben fortwährend zu tun hat; 3) zur *analytischen Mechanik*, insofern mehrere mechanische Probleme ihre Bedeutung in der Differentialgeometrie haben. So führt z. B. das *Jacobi*'sche „Prinzip der kleinsten Wirkung" (IV I 1, Rationelle Mechanik, *Voß*, Nr. **43**—**44**) auf die Bestimmung der geodätischen Linien in demjenigen Raume, in welchem die *Lagrange*'schen Variablen Koordinaten sind.

168a) Präzise Formulierung in II B 1, *Osgood*, Nr. **13**.

plexer Variabilität der Veränderlichen kommt diesen Gebilden die charakteristische Eigenschaft zu, durch ein irgendwie beschränktes (aber endliches!) ihnen angehöriges Stück bereits vollständig und eindeutig definiert zu sein: das ist eine unmittelbare Folge des Prinzips der Darstellung analytischer Funktionen durch Potenzreihen und ihrer analytischen Fortsetzung. In der Geometrie des Gesamtraumes empfiehlt es sich folglich, den Variabeln von Anfang an komplexe Veränderlichkeit zu erteilen, d. h. in den Gebilden reelle und imaginäre Elemente als gleichwertig anzusehen.

Unter den analytischen Funktionen haben die „algebraischen" (II B 2, *Wirtinger*) eine besondere Stellung, und kommen in der „Theorie der algebraischen Gebilde" zur Geltung, d. h. der Gebilde, welche durch ein System algebraischer Gleichungen zwischen den Koordinaten eines veränderlichen Elementes dargestellt werden; in diesen Gleichungen dürfen auch, was aber unwesentlich ist, eine beliebige endliche Zahl willkürlicher Parameter auftreten[169]). In den meisten Untersuchungen über algebraische Gebilde, z. B. in deren Bestimmung durch eine genügende Anzahl von Punkten, oder in der Aufsuchung der Schnittpunkte zweier Gebilde, haben wir diese Gebilde als Ganzes im Auge.

Über die algebraische Geometrie wird in III C berichtet, während in III D 4, 5 (Transzendente Kurven und Flächen: *Scheffers*; *v. Lilienthal*) analytische aber doch nicht algebraische Kurven und Flächen besprochen werden.

Bis Nr. 33 hatten wir Fragen aus der Geometrie des Gesamtraumes im Auge; in diesem Kapitel darf ein allgemeiner Blick auf die Differentialgeometrie geworfen werden.

36. Monge's „Application". Dupin. Die älteren Untersuchungen über Differentialgeometrie der Kurven und Flächen (III D 1, 2 (*v. Mangoldt*), 3 (*v. Lilienthal*)) stammen (vgl. Nr. 5) aus dem 18. Jahrhundert. Hinsichtlich der Kurven treten von Anfang an die Begriffe der Tangente, der Oskulationsebene (im Raume), des Krümmungskreises, der Evolute, der Bogenlänge, auf. Für Oberflächen haben *Euler*[170]) und *Meusnier*[171]) die Krümmungsverhältnisse untersucht. Ihren Aufschwung erhielt aber die Differentialgeometrie durch *Monge*'s „Appli-

---

169) *C. Segre,* Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, Ann. di mat. (2), 22 (1894), p. 41; Nr. 3.

170) Recherches sur la courbure des surfaces, Berlin Abh., 16 (1760).

171) Recherches sur la courbure des surfaces, Paris Mém. sav. étr. 10, 1785.

cation de l'analyse à la géométrie"[4]) und durch die „Disquisitiones generales circa superficies curvas" von *C. F. Gauß*[172]).

Aus *Monge*'s Werk sind folgende Punkte hervorzuheben:

1) Die weiteren Untersuchungen über die Krümmungsverhältnisse einer Oberfläche in der Umgebung eines beliebigen Punktes und die Behandlung mehrerer damit zusammenhängender Fragen, insbesondere die Bestimmung der Flächen, für welche die beiden Hauptkrümmungsradien irgend einer Bedingung genügen (Minimalflächen; Flächen bei denen einer der Krümmungsradien überall gleich groß ist, . . .).

2) Die *Theorie der Enveloppen* mit ihren Charakteristiken und Rückkehrkurven, darunter Developpabele, Röhrenflächen, Flächen konstanter Neigung.

3) Die Anwendung der Flächentheorie und insbesondere der Theorie der Enveloppen auf das geometrische Verständnis der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit drei Variabeln. Dabei zeigt *Monge*, wie es manchmal für die Bestimmung einer Familie von Oberflächen bequemer und nützlicher ist, eine Differentialgleichung zu haben, als eine Gleichung in endlichen Ausdrücken, und wie man nicht nur von der zweiten zur ersten übergehen kann, sondern auch umgekehrt. Dieser letzte Übergang ist mit der Integration der vorgelegten Differentialgleichung gleichbedeutend.

Als Nachfolger *Monge*'s in seiner differential-geometrischen Leistung möge *Ch. Dupin* erwähnt werden, in dessen „*Développements de géométrie*"[173]) die Begriffe der *konjugierten Tangenten* in einem Punkte einer Oberfläche, der *Haupttangentenlinien* („lignes asymptotiques") und der *Indikatrix*, welche seinen Namen trägt, eingeführt werden. Dazu kommt noch der Satz, daß die Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems sich in ihren Krümmungslinien schneiden.

37. Gauß' „Disquisitiones". Bei *Gauß* sind zwei Begriffe grundlegend, und an seinen Namen gebunden:

1) die „*krummlinigen Koordinaten*" auf einer Oberfläche;

2) die Betrachtung des „*Krümmungsmaßes*" einer Oberfläche in einem Punkte allgemeiner Lage, welches er gleich dem inversen Produkt der Hauptkrümmungsradien setzt.

Bei der Bestimmung des Ausdruckes des Kurvenelementes auf der Fläche durch die krummlinigen Koordinaten bieten sich die Koeffizienten

---

172) Der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1827 eingereicht, im 6. Bde. der „Commentationes recentiores" veröffentlicht, und in *Gauß*' Werken Bd. 4 (Göttingen 1873), p. 217 u. ff. abgedruckt (*Ostwald*'s Klassiker Nr. 5, hrsg. von *A. Wangerin*).

173) Paris 1813.

E, F, G dar, deren grundlegende Bedeutung für die Theorie der aufeinander abwickelbaren Flächen (III D 6a, *Voß*) *Gauß* hervorgehoben hat; durch diese Koeffizienten und deren Ableitungen nach den einzelnen Koordinaten läßt sich die *Gauß*'sche Krümmung ausdrücken. Zugleich führt *Gauß* die neue Betrachtung der Flächen ein als unendlich dünner biegsamer und unausdehnbarer Körper; bei ihren Biegungen bleibt das Krümmungsmaß an irgend einer Stelle invariant, und es ist folglich die Gleichheit des Krümmungsmaßes in entsprechenden Punkten eine notwendige Bedingung dazu, daß zwei Oberflächen aufeinander abwickelbar seien. Diese Bedingung ist aber nur für Flächen konstanten Krümmungsmaßes hinreichend; andernfalls sind noch weitere Bedingungen erforderlich, wie *Minding* hervorgehoben hat[174]) (III D 6a, *Voß*, Nr. 15). Die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf einer Fläche ist ebenfalls durch *Gauß* aufgestellt und für weitere Probleme (Polarkoordinaten, geodätische Kreise, Parallellinien) verwertet worden (III D 3, *v. Lilienthal*, Abschn. IV).

38. Fortschreiten der infinitesimalen Kurven- und Flächentheorie. Die von *Monge* und *Gauß* gegebenen Ansätze waren für mehrere Jahrzehnte und sind teilweise auch jetzt in der Differentialgeometrie maßgebend (III D 1, 2 (*v. Mangoldt*), 3 (*v. Lilienthal*)). — Die *Gauß*'sche Theorie der krummlinigen Koordinaten auf einer Oberfläche ließ den Wunsch entstehen, eine derartige Theorie für den Raum (als dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit) aufzustellen. Das hat zuerst *Lamé*[175]) durch elliptische Koordinaten geleistet; später erhob er sich zu einer allgemeinen Theorie, die er, zugleich mit Anwendungen auf die Elastizitätslehre (IV 2 C III), in einem Lehrbuch zusammenfaßte[176]). Ebenso ist *Riemann*'s Habilitationsschrift: „Über die Hypothesen . . .“ (vgl. Nr. 28) als erster Ansatz für die Erweiterung der *Gauß*'schen Theorie auf den n-dimensionalen Fall anzusehen (III D 10, *Stäckel*).

Für die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen liegen mehrere zusammenfassende Darstellungen und Lehrbücher vor (vgl. III D. 1, 2, 3, *v. Mangoldt, v. Lilienthal*) — auch wenn man von den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung (II A 2, *Voß*) absieht, welche mehr oder weniger die geometrischen Anwendungen berücksichtigen. Diese Darstellungen sind alle in analytischer Fassung:

---

174) Wie sich entscheiden läßt . . ., J. f. Math. 19 (1839), p. 370.

175) Paris Mém. div. sav. 5 (1833); J. de math. 2 (1837), p. 147.

176) Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859.

die synthetische Behandlung der Differentialgeometrie ist bis jetzt nur in geringerem Maße berücksichtigt worden[176a]).

39. Allgemeiner Überblick über die Untersuchungen von S. Lie. In seinen Bestrebungen ist *S. Lie* von der Auffassung ausgegangen, daß es wünschenswert sei (nach dem Vorbilde von *Monge*) die geometrischen Begriffe für die Analysis zu verwerten. Geometrische Untersuchungen veranlaßten ihn 1869—71 zur Betrachtung einiger endlicher kontinuierlicher Gruppen. Ferner bemerkte er, daß die meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Integration sich durch die älteren Methoden ausführen ließ, bei gewissen leicht angebbaren Scharen (und zwar „Gruppen") von Transformationen invariant bleiben, und daß jene Integrationsmethoden wesentlich in der Verwertung dieser Eigenschaft bestehen; sowie auch daß die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sich als eine „Geometrie der Flächenelemente" auffassen läßt, in welcher der Begriff der „Berührungstransformation" die fundamentale Rolle spielt. Von hier aus sind als selbständige Disziplinen 1) die allgemeine Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen (II A 6, *Maurer* und *Burkhardt*); 2) die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen (III D 7, *Scheffers*); 3) die geometrische Theorie der Differentialgleichungen (III D 8, *Liebmann*) entstanden. Diese Theorieen dürfen der Differentialgeometrie zugerechnet werden, da man bei ihnen, allgemein zu reden, mit Funktionen von beschränktem Gültigkeitsbereiche zu tun hat.

Die allgemeine Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen stammt aus den Jahren 1873—74 und wurde später in den drei Bänden „Theorie der Transformationsgruppen"[176b]) dargelegt, unter welchen insbesondere der erste Band die allgemeine Theorie der kontinuierlichen Gruppen behandelt. Grundlegende Begriffe sind diejenigen der *infinitesimalen Transformation*, der *Zusammensetzung* der Gruppe, und ihrer *Definition durch Differentialgleichungen.*

Den Begriff der Berührungstransformation hat *Lie* — indem er *Plücker*'s Ideen über Transformationen mit Wechsel des Raumelementes weiter verfolgte[177]) — zuerst allgemein geometrisch

176a) *W. Schell,* Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung, Leipzig 1859; zweite, wesentlich umgearbeitete und erweiterte Auflage 1898.

176b) Herausgegeben durch *F. Engel,* Leipzig 1888—93. S. auch: *Lie,* Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, herausgegeben durch *G. Scheffers,* Leipzig 1893.

177) Over en Classe geometriske Transformationer, Christ. Forh. 1871, p. 67;

gefaßt. Im dreidimensionalen Raume sind das diejenigen Transformationen der fünf Variabeln $x, y, z, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$, welche die Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ in sich selbst überführen (d. h. die Gleichung $dz' - p'dx' - q'dy' = \varrho(dz - pdx - qdy)$ identisch erfüllen). Bei diesen Umformungen gehen Flächen im allgemeinen in Flächen — ausnahmsweise in Linien oder Punkte — und Flächen, die sich berühren, in ebensolche über. Der 2. Band der „Theorie der Transformationsgruppen" enthält die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen in n Veränderlichen, zugleich mit deren Invariantentheorie und der Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen. Für $n = 2$ und $n = 3$ werden die Berührungstransformationen in dem Anm. [5a]) erwähnten Lehrbuche „Geometrie der Berührungstransformationen" geometrisch vielfach behandelt.

Die geometrische Theorie der Differentialgleichungen geht von *Monges* Auffassung aus[4])[5a]). Die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ ordnet jedem Punkte (x, y) der Ebene eine oder mehrere bestimmte Fortschreitungsrichtungen $y' = \frac{dy}{dx}$ zu; die Gleichung „integrieren" bedeutet „Kurven zu bestimmen, die in jedem ihrer Punkte eine der zugehörigen Fortschreitungsrichtungen zur Tangente haben", oder „die ∞^2 Linienelemente (x, y, y'), welche die Gleichung $f = 0$ erfüllen, zu lauter kontinuierlichen Kurven zusammenzufassen": diese Kurven (bis auf das sogen. „singuläre Integral") werden durch die integrierte Gleichung $F(x, y, k) = 0$ dargestellt. Diese Betrachtungsweise hängt mit *Clebsch*'s Theorie der Konnexe[8]) zusammen; denn jeder Konnex $\varphi(x, y, u, v) = 0$ einer Ebene zieht eine solche Differentialgleichung nach sich, die seinen Durchschnitt („Koincidenz") mit dem Hauptkonnexe $ux + vy + 1 = 0$ darstellt, d. h. deren Integralkurven dadurch definiert sind, daß überall Punkt und zugehörige Tangente die Konnexgleichung $\varphi = 0$ erfüllen[177a]). Geht bei einer Transformationsgruppe die vorgelegte Differentialgleichung in sich über, so ist auch die ∞^1-Schar der Integralkurven invariant, und diese Eigenschaft kann für die Integration der Differentialgleichung verwertet werden[177b]).

Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe . . ., Math. Ann. 5 (1872), p. 145, insb. Abschn. 1.

177a) *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie 1, Abt. 7; *Klein*, Höhere Geometrie 1, p. 244 u. ff.

177b) Diese Auffassung stammt aus den Jahren 1871—74, und wurde später in einem Lehrbuche ausführlich behandelt: *S. Lie*, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, herausgegeben von *G. Scheffers*, Leipzig 1891.

— Entsprechendes gilt *mutatis mutandis* für die gewöhnliche Differentialgleichung $f(x, y, z, y', z') = 0$, und für die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $f(x, y, z, p, q) = 0$ $\left(\text{wo } p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, welche jedem Punkte (x, y, z) den durch die Ebenen:

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

eingehüllten Kegel zuordnet (im Falle einer linearen Gleichung also einen Ebenenbüschel); die Aufgabe ist dann, die ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q), welche die Gleichung $f = 0$ erfüllen, zu Flächen zusammenfassen.

X. Weitere Verallgemeinerungen des analytischen Ansatzes.

40. Der allgemeine Kurvenbegriff in analytischer Fassung (III A, B 2, Linie und Fläche, *v. Mangoldt*). Der analytische Ansatz hat in neuerer Zeit auch in weitere Gebiete der Geometrie eingegriffen und besonders in die „Analysis situs", welche sich mit solchen Eigenschaften der geometrischen Gebilde (Kurven, Flächen, . . .) beschäftigt, die bei stetiger Deformation ungeändert bleiben (III A, B 3, Analysis situs, *Dehn* und *Heegaard*).

Hier steht zunächst der Begriff der *allgemeinen Kurve und Fläche* im Vordergrunde. Die Definition der Kurven und Flächen liegt jenseits der Raumanschauung, insofern letztere nur eine begrenzte Genauigkeit hat. Um die Definition exakt zu machen, muß man die Raumanschauung durch präzise Axiome stützen (vgl. Nr. 1), und das geschieht einerseits durch Vermittlung der analytischen Geometrie, andererseits durch die neuesten Entwicklungen der Mengenlehre (I A 5, *Schoenflies*). Die zwischen den analytischen und den mengentheoretisch-geometrischen Ausdrucksweisen derselben Begriffe und Sätze obwaltenden Beziehungen klar zu stellen ist eines der wichtigsten Probleme der Analysis situs.

Die augenscheinliche analytische Definition der ebenen Kurve durch die in einem bestimmten reellen Intervalle $a < t < b$ stetigen Funktionen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

hat sich im Laufe der Zeit als zu umfassend erwiesen. Wir brauchen nur auf das Beispiel der *Peano*schen Kurve[178]) hinzuweisen, welche ein ganzes Flächenstück bedeckt, wie *Hilbert*[179]) und *Klein*[180]) geo-

---

178) Sur une courbe qui remplit une aire carrée, Math. Ann. 36 (1890), p. 157.

179) Math. Ann. 38 (1891), p. 459.

metrisch erläutert haben (I A 5, *Schoenflies*, Nr. **16**; III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **8**), und auf den anderen (wesentlich verschiedenen!) Fall der Epicykloide (III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **4**; III D 4, Transzendente Kurven, *Scheffers*, Nr. **5**), welche, wenn die beiden Kreisradien in einem irrationalen Verhältnisse stehen, einen Kreisring überall dicht erfüllt, ohne daß jeder Punkt des Kreisringes ihr angehört. Wollen wir also an dem Begriff der „empirischen Kurve" festhalten, so empfiehlt es sich, die Definition einzuschränken.

Die Unterscheidung der verschiedenen überhaupt möglichen Kurvenarten auf Grund der analytischen Definition wurde von *Weierstraß* in seinen Vorlesungen zur Geltung gebracht, und in neuerer Zeit durch *C. Jordan*[181]) wieder aufgenommen und ausführlich behandelt. Letzterer verlangt, daß die durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definierte Kurve im Intervalle $a < t < b$ keinen Doppelpunkt besitzt — d. h. daß für keine zwei Werte $t_1 \neq t_2$, für welche $a < t_1 < b$, $a < t_2 < b$ ist, zugleich $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ wird — und nimmt dazu noch an, daß die Kurve „geschlossen" sei, d. h. daß $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$. Von der so definierten Kurve zeigt er, daß ihr eine der wichtigsten Eigenschaften der geschlossenen empirischen Kurven zukommt; daß sie nämlich *die Ebene in zwei Teile spaltet*, einen „inneren" und einen „äußeren" Teil, nach der gewöhnlichen Auffassung (III A B 1, *Enriques*, Nr. **13**; III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **8**).

Dieser Satz bewirkt einen Zusammenhang zwischen der analytischen Kurvendefinition und den geometrischen Begriffen, welche aus der Mengenlehre hervorgehen (vgl. oben). Der *Jordan*'sche Satz ist aber nicht ohne weiteres umkehrbar; es erweist sich nicht jedes Punktgebilde, welches die Ebene in ein äußeres und ein inneres Gebiet teilt, als eine stetige Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Der geometrische Begriff der Gebietsgrenze wird auf den der (analytisch definierten) Kurve erst durch weitere Bedingungen eingeschränkt, wie *A. Schoenflies*[182]) hervorgehoben hat (III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. 9).

Bei der *Jordan*schen Kurve kann von den weiteren Eigenschaften der empirischen Kurve im allgemeinen noch nicht die Rede sein. Der Begriff der „Bogenlänge" auf dieser kommt erst dann heraus, wenn $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ „bornierte Funktionen" sind[183]), d. h. wenn in dem zu

---

180) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (autogr. Vorles.), Göttingen 1902, p. 241 u. ff.

181) Cours d'analyse de l'école polytechnique 1 (2me éd., 1893), p. 90 u. ff.

182) Gött. Nachr. 1902, p. 185; Math. Ann. 58 (1903), p. 195 (vgl. insbesondere § 7 u. ff.); ebenda 59 (1904), p. 129; 62 (1906), p. 286; Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 15 (1906), p. 557; Gött. Nachr. 1907, p. 28.

betrachtenden Intervalle die Summen ihrer positiven Zuwächse und die Summen der negativen Zuwächse je für sich genommen endlich sind. Und damit die Kurve eine Tangente, bezw. eine Krümmung besitzt, sind noch weitere Bedingungen erforderlich; so ist es hinreichend (aber nicht notwendig), daß φ und ψ im betreffenden Intervalle einmal, bezw. zweimal differentiierbar sind, wodurch wir zu den Funktionselementen (Nr. **34**)[184]), d. h. zur Differentialgeometrie zurückkommen.

In den letzten Jahren gibt es Weiterentwicklungen nach verschiedenen Seiten (III A, B 2, Linie und Fläche, *v. Mangoldt*), die wir aber nicht verfolgen, da es sich hier nur um einen allgemeinen Überblick handeln soll. Für die axiomatische Behandlung der Geometrie nach *D. Hilbert*[185]) durch Zugrundelegung des Gruppenbegriffes, ebenso wie bei *Helmholtz* (Nr. **28**), aber ohne die Differentiierbarkeit der die Bewegung vermittelnden Funktionen vorauszusetzen, verweisen wir auf III A B 1, Prinzipien der Geometrie, *Enriques*, Abschnitt V B.

---

183) *C. Jordan*, a. a. O. p. 100 u. ff.

184) Besser, nach *F. Klein*, „reguläre Funktionselemente" (a. a. O. p. 255).

185) Math. Ann. 56 (1903), p. 381.

(Abgeschlossen im Mai 1907.)

III A B 4b. KONTINUIERLICHE GEOMETRISCHE GRUPPEN. DIE GRUPPENTHEORIE ALS GEOMETRISCHES EINTEILUNGSPRINZIP.

Von

G. FANO

IN TURIN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät, Erlangen 1872; abgedruckt (mit Zusätzen) in Math. Ann. 43 (1893), p. 63. Italienisch übertragen durch *G. Fano,* Ann. di matem. (2) 17 (1889—90), p. 307; französisch durch *H. Padé,* Ann. éc. norm. (3) 8 (1891), p. 87, 173; englisch durch *M. W. Haskell,* New York M. S. Bull. 2 (1893), p. 215 [„Erlanger Programm"].

— Einleitung in die höhere Geometrie, autogr. Vorlesung, ausgearbeitet von *F. Schilling,* 2 Bde; Göttingen, 1892—93 [„Höhere Geometrie"].

S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen (unter Mitwirkung von *F. Engel*), 3 Bde, Leipzig 1888—93 [„Th. d. Transfgr."].

— Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, bearbeitet und herausgegeben von *G. Scheffers,* Leipzig 1893 [„Kontin. Gruppen"].

S. Lie, Untersuchungen über unendliche kontinuierliche Gruppen, zum Teil von *F. Engel* redigiert, Leipzig Abhandl. 21 (1895), p. 41 [„Unendliche Gruppen"]. — Geometrie der Berührungstransformationen (unter Mitwirkung von *G. Scheffers*), Bd. 1, Leipzig 1896 [„Geom. d. BT"]. Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen, aus dem Nachlasse von *Lie* herausgegeben von *F. Engel* (Math. Ann. 59 (1904), p. 193).

I. Transformationen. Transformationsgruppen und zugehörige Geometrien.

1. Transformationen. Spuren von speziellen geometrischen Transformationen sind schon bei den griechischen Geometern, namentlich bei *Apollonius* zu finden[1]). In der Analysis wurden in den letzten Jahrhunderten Transformationen der auftretenden Veränderlichen fortwährend herangezogen, um Gleichungen aufzulösen und Differentialgleichungen zu integrieren. Aber erst am Anfang des 19. Jahrhunderts wurde der heutige Begriff einer Transformation für die Geometrie erworben; einerseits indem das systematische Studium der Projektionen den Weg zu den projektiven Transformationen eröffnete (III A B 4a, *Fano*, Nr. 5—7)[2]); anderseits indem man lernte, die in der Analysis üblichen Transformationen nicht bloß als Wechsel der Variablen zu betrachten, sondern als Umänderung eines Gebildes geometrisch zu deuten. Dadurch ist der allgemeine Begriff einer *Korrespondenz* zwischen zwei Gebilden, ihrer *Abbildung* aufeinander, ihrer *Transformation* ineinander, ihrer *Identität* vom Standpunkte einer solchen Transformation aus allmählich entstanden.

Sind die Variabeln $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch irgend welche Gleichungen bestimmt:

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo die f_i innerhalb gewisser Bereiche definierte Funktionen bedeuten, so sagt man, daß diese Gleichungen eine *Transformation* zwischen den Variabeln x und x' darstellen. Lassen sich die obigen Gleichungen nach den x_i aufzulösen, so erhält man dadurch die *inverse Transformation*. — Deuten wir die x und x' als Koordinaten in zwei eventuell auch zusammenfallenden Gebilden (nach Bedarf, auf bestimmte

---

1) Vgl. *G. Loria,* Le scienze esatte nell'antica Grecia, Modena Mem. (2) 11 (1895); insb. p. 231 ff.

2) Vgl. *M. Chasles,* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (Bruxelles 1837; 2. Aufl. Paris 1875), chap. 5, 6.

Teile derselben eingeschränkt), so wird durch obige Gleichungen eine Transformation oder Korrespondenz der beiden Gebilde oder ihrer betrachteten Teile dargestellt. Die bei der Deutung der x und x' zugrunde gelegten Raumelemente dürfen ganz beliebig sein, und brauchen auch nicht beidemal von derselben Art zu sein; wir erhalten dadurch, je nach den verschiedenen Möglichkeiten, *Punkttransformationen*, *Berührungstransformationen* (falls beide Reihen von Variabeln als Koordinaten von Linienelementen in der Ebene, oder von Flächenelementen im Raume gedeutet werden können), *Transformationen mit Wechsel des Raumelementes*, usw.

Sind die f_i analytische Funktionen, so nennen wir die Transformation ebenfalls analytisch. Darunter sind insbesondere die algebraischen, rationalen, birationalen, linearen Transformationen, die (Euklidischen und Nicht-Euklidischen) Bewegungen, usw. einbegriffen.

Geht aus einem geometrischen Gebilde durch eine bestimmte Transformation ein anderes hervor, so lassen sich aus den Eigenschaften des ersten, vermöge der Transformation, entsprechende Eigenschaften des zweiten folgern. Allgemein zu reden, werden einige dieser Eigenschaften bei der genannten Transformation erhalten bleiben; diese sind dann als *invariant* in bezug auf die Transformation aufzufassen. Liegt eine Klasse von Gebilden vor, die auseinander durch Transformationen einer bestimmten Art hervorgehen, so wird die Untersuchung ihrer gemeinsamen, durch diese Transformationen nicht zerstörbaren Eigenschaften auf diejenige der Eigenschaften eines einzigen Repräsentanten der Klasse zurückgeführt. Nach neuerer Auffassung wird das einzelne Gebilde nicht mehr als starr gegeben angesehen, sondern als veränderlich, als transformierbar, und seine Eigenschaften werden nur so weit betrachtet, als sie gegenüber gewissen Änderungen invariant sind.

2. Transformationsgruppen und deren Einteilung. Eine endliche oder unendliche Mannigfaltigkeit von Transformationen kann die Eigenschaft haben, daß je zwei dieser Transformationen, sofern sie zusammengesetzt (d. h. nach einander ausgeführt) werden können, immer wieder eine Transformation derselben Mannigfaltigkeit ergeben (die ihr „Produkt" — in der betreffenden Reihenfolge — heißt). Man sagt dann, daß diese Transformationen eine *„Gruppe"* bilden.

Die Transformationen können dabei auch nur für eine diskrete Menge von Wertsystemen der Veränderlichen definiert sein. Auch können unter Umständen geometrische oder andere Operationen in ähnlicher Weise zu „Gruppen" zusammengesetzt werden. In dieser

Weise kam die Gruppendefinition zunächst in der *Substitutionentheorie* (I A 6, *Burkhardt,* Nr. 5) zur Geltung, insbesondere in der *Galois*schen Theorie der algebraischen Gleichungen (I B 3 c, d, *Hölder),* wo die zusammenzusetzenden Operationen Versetzungen einer endlichen Anzahl von Elementen sind. Andererseits trat der Gruppenbegriff auf in der *Invariantentheorie linearer Substitutionen* (I B 2, *Meyer*) und in ihren zahlentheoretischen und geometrischen Anwendungen (I C 2, Arithmetische Theorie der Formen, *Vahlen;* III A, B 6, Projektive Geometrie, *Schönflies*).

Die umfassende Bedeutung des Gruppenbegriffes, weit über die ersten Anwendungen hinaus, trat in den Arbeiten von *C. Jordan* hervor[3]). Hieran reihen sich die geometrischen Arbeiten von *F. Klein*[4]) und *S. Lie*[5]), welche den Gruppenbegriff zu einem speziellen Untersuchungsgegenstande machen und in den Mittelpunkt der mathematischen Forschung rücken. Während aber *Klein* im weiteren Verfolg insbesondere diskontinuierliche geometrische Gruppen untersuchte und deren Bedeutung für die verschiedenen Gebiete der Mathematik darlegte (Gleichungstheorie, Zahlentheorie, Funktionentheorie)[6]), ist *S. Lie*

---

3) Vgl. die im 3. Abschnitt des „Traité des substitutions et des équations algébriques" (Paris, 1870) enthaltenen Anwendungen der Gruppentheorie auf geometrische Probleme und transzendente Funktionen, sowie auch die Abhandlung „Mémoire sur les groupes de mouvements", Ann. di mat. (2) 2 (1868—69), p. 167, 322.

4) Vgl. die zahlreichen Aufsätze in den Gött. Nachr. und in den Math. Ann., sowie auch die Lehrbücher: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom 5. Grade (Leipzig 1884); Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen (herausgeg. von *R. Fricke,* 2 Bde., Leipzig 1890—92), und die Göttinger autographierten Vorlesungshefte: Höhere Geometrie (1, 2; 1892—93; bereits unter „Literatur" angeführt, da insb. Bd. 2 einer allgemeinen Würdigung der geometrischen Gruppen gewidmet ist); Über die hypergeometrische Funktion (1894); Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung (1894); Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (1, 2; 1896). Zuletzt noch: *Klein-Fricke,* Vorlesungen über automorphe Funktionen (Bd. 1, Leipzig 1897; Bd. 2, 1. Lief. 1901).

5) Größtenteils in den Christiania Forhandl., Archiv for math. og naturvidenskab, Gött. Nachr., Math. Ann., Leipzig Ber. enthalten; Verzeichnis von *F. Engel* in Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 174. Man vergleiche ferner die unter „Literatur" angeführten Lehrbücher, in denen die hauptsächlichen Theorien zusammengefaßt sind.

6) Einen wesentlichen Aufschwung hat die Theorie der diskontinuierlichen Gruppen und ihre Anwendung auf die Funktionentheorie auch durch *H. Poincarés* Arbeiten erhalten (Théorie des groupes fuchsiens, Acta math. 1 (1882), p. 1; Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, ebenda, p. 193; Mémoire sur les groupes kleinéens, ebenda 3 (1883), p. 49. S. auch die verschiedenen früheren Mitteilungen in Paris C. R. 92, 93, 94 (1881—82)), in welchen die eigentlich-diskonti-

Schöpfer einer Theorie der *kontinuierlichen geometrischen Gruppen* (II A 6, *Maurer* und *Burkhardt*) geworden, die im vorliegenden Artikel fortwährend zu benutzen sein wird.

Als „endliche" (insbesondere „r-gliedrige") kontinuierliche Gruppe bezeichnet *Lie* jede r-fach unendliche (d. h. von r wesentlichen [komplexen] Parametern abhängige) Schar von Transformationen, welche die Gruppeneigenschaft besitzt und die identische Transformation enthält (II A 6, Nr. 2). Seine Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen ist mit der Substitutionentheorie in dem Sinne verwandt, daß viele Begriffe (Vertauschbarkeit, Ähnlichkeit, Untergruppe, invariante Untergruppe) und Sätze sich auf erstere übertragen lassen. Es kommen aber auch neue und wichtige Begriffe hinzu; insbesondere die Begriffe der *infinitesimalen Transformation* und der *Zusammensetzung* einer Gruppe. Für die infinitesimale Transformation $\delta x_i = \xi_i \cdot \delta t$ führt *Lie* das Symbol $Xf \equiv \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ein, welches anzeigt, daß f in $f + \delta t \cdot Xf$ übergeht. Eine r-gliedrige Gruppe enthält r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f, \ldots, X_r f$, durch die sich jede andere linear mit konstanten Koeffizienten ausdrücken läßt; wiederholt man letztere unendlich oft, so erhält man die endlichen Transformationen der Gruppe (in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation). Die „Klammerausdrücke" $(X_i X_k) \equiv X_i(X_k f) - X_k(X_i f)$ sind wiederum lineare Funktionen der X_l mit konstanten Koeffizienten c_{ikl}; diese Koeffizienten bestimmen die „Zusammensetzung" der Gruppe. Jedem System von Konstanten c_{ikl}, welche bestimmten Gleichungen genügen (II A 6, Nr. 5), entsprechen unendlich viele gleichzusammengesetzte r-gliedrige Gruppen.

Den Begriff einer „unendlichen" (d. h. von willkürlichen Funktionen abhängenden) kontinuierlichen Gruppe hat *Lie* seit 1883[7]) dahin begrenzt, daß die in ihren infinitesimalen Transformationen auftretenden Funktionen ξ_i einem System von einer endlichen Anzahl linearer partieller Differentialgleichungen genügen sollen. Später[8]) definierte er als solche die Gesamtheit der Transformationen

$$x_i' = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

---

nuierlichen Gruppen von linearen Substitutionen einer komplexen Veränderlichen durch Polygon- und Polyedereinteilungen der Ebene und des Raumes verfolgt und die zugehörigen „Fuchsschen" und „Kleinschen" Funktionen konstruiert werden.

7) Über unendliche kontinuierliche Gruppen, Christiania Forhandl. 1883, Nr. 12.

8) Th. d. Transfgr. 1, p. 5—6; Christiania Forhandl. 1889, Nr. 7. S. auch II A 6, Nr. 22.

bei denen die Funktionen F_i die allgemeinsten Lösungen eines gewissen Systems von einer endlichen Anzahl partieller Differentialgleichungen sind; eine solche Gruppe läßt sich durch infinitesimale Transformationen erzeugen, die der obigen Bedingung genügen. Auch für diese Gruppen hat *Lie* eine Theorie aufgebaut[9]), welche zur Theorie der endlichen Gruppen parallel läuft.

Es gibt auch Gruppen, die aus getrennten kontinuierlichen Scharen bestehen, von denen *eine* eine (endliche oder unendliche) kontinuierliche Gruppe ist. Diese bezeichnet man als „gemischte" Gruppen[10]).

3. Kleins gruppentheoretische Auffassung der Geometrie. Die einer Gruppe zugehörige Invariantentheorie. *F. Klein* hat 1872 gezeigt[11]), wie die Transformationsgruppen, insbesondere die kontinuierlichen und gemischten Gruppen, in der Geometrie zur Geltung kommen, und wie die geometrischen Gruppen eine Systematik der verschiedenen Behandlungsweisen der Geometrie liefern.

„Geometrische" Eigenschaften eines Gebildes sind nach *F. Klein* unabhängig von der Lage, welche dieses Gebilde im Raume einnimmt, von seiner absoluten Größe, und von dem „Sinne", in welchem seine Teile geordnet sind (d. h. von der Anordnung, die den Unterschied von seinem Spiegelbilde begründet)[12]). Sie bleiben also ungeändert bei allen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen, bei den Spiegelungen, sowie auch bei allen Transformationen, die sich aus diesen zusammensetzen. Diese Transformationen bilden eine Gruppe, die sogen. „Hauptgruppe" (Nr. 4): *Geometrische Eigenschaften werden durch die Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert,* und umgekehrt: *Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe charakterisiert.* Die „Geometrie" erscheint also als *ein Studium der zu der Hauptgruppe räumlicher Transformationen gehörigen Invariantentheorie* (welche öfters als „Elementargeometrie" (Nr. 4) bezeichnet wird). Nun gibt es viele Arten, diese Betrachtungsweise zu erweitern, indem man an Stelle *aller* geometrischer Eigenschaften nur diejenigen ins Auge faßt, die bei einer umfassenderen Gruppe von Transformationen

---

9) Leipzig Ber. 43 (1891), p. 316, 353; sowie auch: „Unendliche Gruppen".

10) Th. d. Transfgr. 1, Kap. 18; II A 6, Nr. 21. Beispiele: die Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen; die Gruppe der linearen Transformationen, deren Determinante eine ganze Zahl, oder eine n^{te} Einheitswurzel ist.

11) Erlanger Programm. S. auch: Höhere Geometrie 2, p. 27 ff.

12) Ist das bei irgend einer Eigenschaft nicht der Fall, so heißt diese Eigenschaft nach *F. Klein* auch nicht „geometrisch"; dagegen kann sie eventuell eine „topographische" Eigenschaft sein (*Klein:* Höhere Geometrie 2, p. 29).

ungeändert bleiben; dazu liefern die „projektiven“ Eigenschaften (Nr. 5) das einfachste Beispiel. Wir können auch, allgemeiner, beliebige mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten (III A B 4a, *Fano*, Nr. 28—30; III C 9, *Segre*) heranziehen, Transformationsgruppen in diesen Mannigfaltigkeiten betrachten, und folgende umfassendere Aufgabe stellen: *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in dieser eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht zerstört werden.* Diese Untersuchung bildet einen besonderen Zweig der (im allgemeinsten Sinne aufgefaßten) Geometrie, welcher durch das „Zugrundelegen“ oder durch „Adjunktion“ jener Gruppe charakterisiert wird. Diese verschiedenen Zweige, den verschiedenen überhaupt möglichen Gruppen entsprechend, lassen sich so alle systematisch auffassen und beherrschen.

In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise kann man eine entsprechende Forderung der Analysis formulieren: *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in dieser eine Transformationsgruppe gegeben; man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.* In dieser Invariantentheorie fragt man nach solchen Verbindungen aus den Variabeln, eventuell auch ihren Differentialquotienten, und den auf ein Gebilde bezüglichen Konstanten, welche sich bei den Transformationen der Gruppe invariant verhalten, und zwar entweder „absolut“ invariant, oder auch nur „relativ“ invariant, d. h. invariant bis auf eine Potenz eines von den Transformationskoeffizienten abhängigen Ausdruckes[12a]). Zu der Aufstellung der Invarianten einer Gruppe hat *S. Lie* in seiner Theorie der Transformationsgruppen wesentliche Ansätze und Beiträge geliefert (vgl. unten, Abschn. III).

Als Element der zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann jedes in dieser enthaltene Gebilde (Punkt, Punktgruppe, Kurve, Fläche usw.) aufgefaßt werden. Wollen wir aber, insbesondere bei der Koordinatenbestimmung, bestimmte Gebilde als Raumelemente auszeichnen, ohne daß Gleichberechtigtes ungleichartig dargestellt werde, so müssen wir die Raumelemente so wählen, daß bei jeder Operation der Gruppe ihre Gesamtheit, nicht aber jedes einzelne von ihnen in sich übergeht. Ein derartiges System von Gebilden, die vermöge der Gruppe auseinander hervorgehen, nennt man einen „Körper“. *Die Gesamtheit der Raumelemente muß also einen Körper bilden, oder in Körper zerlegt werden können;* diese Elemente dürfen aber nicht die Eigenschaft

12a) Bei den Differentialinvarianten kann auch noch ein in gewisser Weise von den Variabeln abhängiger Faktor hinzutreten.

haben, schon bei einer invarianten Untergruppe (II A 6, *Maurer* und *Burkhardt*, Nr. 6) der gerade betrachteten Gruppe in Ruhe zu bleiben.

Ein solcher Körper läßt sich, bei vorgelegter Gruppe, noch auf unendlich viele Weisen auswählen. Aber so lange wir der Untersuchung dieselbe Gruppe zugrunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert; jeder Satz, der bei einer Annahme des Raumelementes sich ergibt, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert.

Die gruppentheoretische Auffassung der Geometrie hat auch das eigentliche Wesen der „Differentialgeometrie“ ans Licht gestellt und gezeigt, daß letztere kein Gegensatz zur „projektiven Geometrie“ oder zur „algebraischen Geometrie“ ist, sondern nur zur „Geometrie des Gesamtraumes“ (III A B 4 a, *Fano*, Nr. 35), und daß man innerhalb beider eine elementare (oder metrische), eine projektive, eine birationale usw. Auffassung unterscheiden kann.

In *F. Kleins* Programmschrift werden mehrere geometrische Gruppen aufgezählt, deren Invariantentheorien sich teilweise erst später entwickelt haben. Weitere Gruppen sind dann hinzugetreten, und einige Untergruppen von diesen sind zu einer selbständigen Bedeutung erwachsen. In der folgenden Aufzählung beschränken wir uns darauf, die wichtigeren Fälle zu besprechen.

4. Hauptgruppe. Elementargeometrie. Wir erwähnen in erster Linie die bereits genannte „*Hauptgruppe*“, den Inbegriff aller Ähnlichkeitstransformationen, unter welchen auch die Bewegungen und die „Umlegungen“ oder „Operationen 2. Art“, d. h. die Produkte der Bewegungen mit irgend einer Spiegelung, einbegriffen sind. Analytisch setzten sich diese Transformationen (z. B. im R_3) bei Zugrundelegung cartesischer Koordinaten aus den Parallelverschiebungen:

$$x_1 = x + A, \quad y_1 = y + B, \quad z_1 = z + C,$$

aus den Drehungen um den Anfangspunkt:

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + cz, \\ y_1 = a'x + b'y + c'z, \qquad [a b' c''] = 1, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

deren Koeffizienten nur von drei wesentlichen Parametern abhängen, so daß insbesondere jeder von ihnen gleich der zugehörigen Unterdeterminante in der Determinante $[a b' c'']$ ist, und aus den perspektiven Ähnlichkeitstransformationen, die den Anfangspunkt in Ruhe lassen:

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \lambda y, \quad z_1 = \lambda z$$

zusammen. Im ganzen enthält die Hauptgruppe des Raumes 7 Parameter; die der Ebene enthält deren 4; die des R_n deren $\binom{n+1}{2}+1$. Die bei dieser Gruppe invarianten Eigenschaften der Figuren pflegt man als „*metrische*“ Eigenschaften, die zugehörige Invariantentheorie als „*Elementargeometrie*“ (oder auch „ähnliche“ oder „äquiforme“ Geometrie), zu bezeichnen. Entfernungen sind relative, Winkelgrößen absolute Invarianten. Bei dieser Gruppe wird gewöhnlich die Betrachtung auf reelle Elemente und Transformationen eingeschränkt, obgleich die obigen Formeln auch im komplexen Gebiet ihre volle Bedeutung behalten.

In Anschluß an die Hauptgruppe von R_3 hat *F. Klein* ein „Prinzip für eine rationelle Klassifikation geometrischer Größen“ aufgestellt[13]), welches, seinem Gedanken nach, aus den ersten Arbeiten von *Cayley* und *Sylvester* über lineare Invariantentheorie (I B 2, *Meyer*, Nr. 2) herstammt, und auf jede Transformationsgruppe anwendbar ist. Nachdem wir die Raumelemente, etwa die Punkte, durch Koordinaten bestimmt haben, können wir uns beliebige andere Gebilde durch Punkte definiert und dementsprechend durch Koordinaten festgelegt denken, die Verbindungen verschiedener Reihen von Punktkoordinaten sind. Als „geometrische Größe“ bezeichnet man den Inbegriff der solcherweise zur Festlegung eines Gebildes dienenden Koordinaten; und die gemeinte Klassifikation kommt darauf hinaus, daß solche geometrischen Größen als gleichartig angesehen werden, deren Koordinaten bei den Operationen der Gruppe die gleichen Änderungen erleiden. Auch die geometrische Beziehung ungleichartiger Größen ergibt sich aus dem Vergleich der beiderlei Änderungen dieser Größen.

Dieses Klassifikationsprinzip wendet *Klein* a. a. O. auf die „Schraubengrößen“ (unendlich kleine Bewegungen, Kräftesysteme, *Ball*sche Schrauben) an. Eine *Ball*sche Schraube, d. h. der Inbegriff der um eine feste Achse herumgelegten Schraubenlinien von gegebenem Windungssinn und bestimmter Ganghöhe (also von Zentralachse und „Parameter“, nach *R. Ball* „pitch“), ist mit dem linearen Komplex, der von den Normalen jener Schraubenlinien gebildet wird, ein-eindeutig zusammengeordnet. Und die *Ball*sche Schraubentheorie ist mit der *elementaren* oder *konkreten Liniengeometrie*, welche die Haupt-

13) Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 237; abgedruckt in Math. Ann. 62 (1906), p. 419. Betreffend *R. Ball* s. seine zusammenfassende Darstellung: A Treatise on the theory of screws, Cambridge 1900.

gruppe zugrunde legt und den linearen Komplex als Raumelement benutzt, identisch.

In seinen Vorlesungen hat *F. Klein* auch die Klassifikation der geometrischen Größen der Mechanik und Physik gegenüber der Hauptgruppe wiederholt vorgetragen; man vergleiche hierüber IV 14, Geometrische Grundbegriffe der Mechanik deformierbarer Körper (*Abraham*).

5. Allgemeine projektive Gruppe. Projektive Geometrie. Die „*allgemeine projektive Gruppe*" ist die Gruppe aller kollinearen Umformungen, d. h. aller Punkttransformationen des R_n, bei welchen Punkte eines (ebenen) R_{n-1} in ebensolche übergehen. Die dabei invarianten Eigenschaften der Figuren heißen „projektive" Eigenschaften und lassen sich auf logische Kombinationen der beiden Begriffe der „Inzidenz" verschiedenartiger Elemente und der „Anordnung der Elemente eines Gebildes erster Stufe" zurückführen[14]. Ihre Untersuchung ist Gegenstand der „*projektiven Geometrie*"; die zugehörige Invariantentheorie wird öfters als „*Neuere Algebra*" oder „*Algebra der linearen Transformationen*" oder auch „*Theorie der algebraischen Formen*" (I B 2, *Meyer*) bezeichnet, insofern, bei Zugrundelegung homogener projektiver Punktkoordinaten, die Kollineationen durch lineare Substitutionen dieser Koordinaten analytisch dargestellt werden. Im R_n enthält die allgemeine projektive Gruppe $n(n+2)$ Parameter. Durch Hinzunahme der (ebenfalls $n(n+2)$-gliedrigen) Schar der dualistischen Umformungen, bei welchen die Punkte in die R_{n-1} übergehen und umgekehrt, geht aus ihr eine gemischte Gruppe hervor, die Fundamentalgruppe der „*erweiterten projektiven Geometrie*".

Bei Zugrundelegung der Gesamtgruppe der kollinearen und dualistischen Umformungen bilden die Punkte keinen Körper mehr; man muß also entweder den Inbegriff „aller Punkte und aller R_{n-1}" als Raumelemente betrachten, oder andere Raumelemente einführen, die einen Körper bilden. Einen solchen bilden im R_3 die „geraden Linien"; und durch Einführung dieser gestaltet sich die Theorie als „*projektive Liniengeometrie*" (III C 10, *Wälsch*; s. auch unten, Nr. **10**). Entsprechendes gilt für jeden R_n mit ungerader Anzahl n von Dimensionen, bei Einführung der $R_{\frac{n-1}{2}}$ als Raumelemente. Ein anderes System geeigneter Raumelemente wird in jedem R_n durch die Gebilde geliefert, welche aus einem Punkte und einem ihn enthaltenden R_{n-1} bestehen; in der Ebene also durch die *Linienelemente*, im R_3 durch die *Flächenelemente* usw.

---

14) *F. Enriques,* Lezioni di geometria proiettiva, Bologna 1898; 2. Aufl. 1905. Deutsche Ausgabe von *H. Fleischer,* Leipzig 1903 (s. insbes. §§ 5—6).

In beiden Fällen, in der gewöhnlichen und der erweiterten projektiven Geometrie, dürfen wir imaginäre Elemente (III A B 4a, *Fano*, Nr. **14** ff.) und Transformationen entweder ausschließen, oder aber zulassen. Im ersten Falle ergibt sich die *„reelle projektive Geometrie"* (III A B 6, *Schönflies*), welche beispw. hyperbolische und elliptische Involutionen in Gebilden 1. Stufe, sowie auch (reelle) geradlinige und nicht geradlinige Flächen 2. Grades im Raume unterscheidet; im zweiten Falle die *„komplexe projektive Geometrie"*, bei welcher jede Involution zwei Doppelelemente hat, und sämtliche Involutionen, sowie auch sämtliche Kegelschnitte wie Flächen 2. Grades von nicht verschwindender Determinante untereinander gleichberechtigt sind. Diese Art von Geometrie im komplexen Gebiet hat *v. Staudt* in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage"[15]) begründet.

Eine andere Erweiterung der projektiven Gruppe ergibt sich bei Gebrauch imaginärer Elemente, indem man die Vertauschung der konjugiert-komplexen Gebilde, d. h. von $+i$ und $-i$, also die sog. „antiprojektiven Umformungen" (III A B 4a, *Fano*, Nr. **16**—**18**) hinzunimmt[16]).

Über die Möglichkeit einer *„bikomplexen projektiven Geometrie"* und anderer Erweiterungen in derselben Richtung sei auf III A B 4a, Nr. **16** verwiesen.

6. Kontinuierliche Untergruppen der allgemeinen projektiven Gruppe. Auch einige Untergruppen der allgemeinen projektiven Gruppe des R_n bieten Interesse dar. Die hierauf bezüglichen Resultate setzen größtenteils voraus, daß alle auftretenden Transformationen und Parameter als komplex betrachtet werden. Über reelle Gruppen ist nur weniges näher ausgeführt[17]).

---

15) 3 Hefte, Nürnberg 1856—60.

16) Daß diese Vertauschungen über die komplexe projektive Geometrie hinausgehen, hat bereits *v. Staudt* bemerkt (Beiträge, Nr. 225). Für $n = 1$, d. h. in einem Gebilde 1. Stufe, sind das die in der komplexen Funktionentheorie (II B) seit *Riemann* wohlbekannten Spiegelungen und Operationen 2. Art (*F. Klein*, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882; insb. p. 70 ff.). Als geometrische Korrespondenzen für $n \geqq 1$ treten diese Umformungen bei *C. Juel* auf (Bidrag til den imaginære Linies og Plans Geometri, Diss. Kjöbenhavn 1885; Acta math. 14 (1890), p. 1); aber ausführlicher und unabhängig von ihm werden sie bei *C. Segre* behandelt (Torino Atti 25 (1889—90), p. 276, 430, 592; 26 (1890—91), p. 35; Math. Ann. 40 (1892), p. 413).

17) S. *Lie*, Theorie d. Transfgr. 3, Kap. 19, § 83. Für die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ und für spezielle Gruppen bei $n = 3$ s. die sofort anzuführenden Arbeiten von *H. B. Newson*.

a) Die allgemeine projektive Gruppe der geraden Linie ($n = 1$) ist dreigliedrig. Jede in ihr enthaltene zweigliedrige (bezw. eingliedrige) Untergruppe besteht aus dem Inbegriffe aller projektiven Transformationen, die einen festen Punkt (bezw. zwei, eventuell auch zusammenfallende Punkte) in Ruhe lassen[18]).

Lie hat auch den Satz aufgestellt: „Jede endliche kontinuierliche Gruppe in einer (komplexen) einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist mit einer projektiven Gruppe ähnlich und enthält somit höchstens drei (komplexe) Parameter.“ [19])

Dieser Satz ist auch im reellen Gebiet gültig[20])[21]).

b) Die kontinuierlichen projektiven Gruppen der Ebene ($n = 2$) hat *Lie* vollständig bestimmt. Er hat nämlich eine Reihe von Typen angegeben, aus denen alle übrigen Gruppen durch Ausführung einer projektiven Transformation abgeleitet werden können[22]).

Insbesondere ergibt sich der Satz: „Jede kontinuierliche Untergruppe der achtgliedrigen Kollineationsgruppe der Ebene läßt entweder einen Punkt oder eine Gerade in Ruhe, oder sie ist die dreigliedrige projektive Gruppe eines nicht ausgearteten Kegelschnittes.“

Die endlichen Gleichungen der Typen von projektiven Gruppen der Ebene, in nicht homogenen sowie auch in homogenen Koordinaten hat *W. Fr. Meyer* aufgestellt[23]). Diese Typen werden durch die bei ihnen invariant bleibenden geometrischen Gebilde einzeln charakterisiert, und für jeden Typus wird eine charakteristische invariante Differentialgleichung angegeben.

---

18) *Lie-Scheffers,* Kontinuierliche Gruppen, p. 129; *Lie,* Th. d. Transfgr. 3, p. 17.

19) Gött. Nachr., Dezember 1874, p. 529; Math. Ann. 16 (1880), p. 455; Th. d. Transfgr. 3, p. 6.

20) Th. d. Transfgr. 3, p. 369.

21) Synthetische Untersuchungen über reelle kontinuierliche projektive Gruppen auf der geraden Linie hat *H. B. Newson* angestellt. S. die Aufsätze: Continuous groups of projective transformations treated synthetically, Kansas Univ. Quart. (A) 4 (1895—96), p. 71; Supplementary notes, ebenda p. 169; On singular transformations in real projective groups, Amer. M. S. Bull. (2) 6 (1900), p. 431. Die projektiven Gruppen auf der komplexen Geraden werden in Kansas Univ. Bull. 1 (1902), p. 115 als reelle konforme Gruppen der Ebene (Nr. **11**—**12**) gedeutet.

22) Math. Ann. 16 (1880), p. 522 u. ff.; Arch. for math. 10 (1884), p. 74; *Lie-Scheffers,* Kontinuierliche Gruppen, p. 288; Th. d. Transfgr. 3, p. 106.

23) Tabellen von endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, Chicago Congress Papers (New York 1896), p. 187. Auch für die endlichen kontinuierlichen Gruppen der Ebene werden aus den *Lie*schen infinitesimalen Transformationen durch Integration die endlichen Gleichungen gewonnen.

Auf synthetischem Wege wurden die projektiven Gruppen der Ebene von *H. B. Newson* behandelt[24]). Seinen Ausgangspunkt bilden die perspektiven Kollineationen und ihre Gruppen[25]); aus diesen sucht er umfassendere Gruppen zusammenzusetzen. Dadurch gelangt er zur *Lie*schen Tabelle der projektiven Gruppen der Ebene, die er auch in endlicher Gestalt anführt[26]).

c) Im Raume R_3 gilt der Hauptsatz: „Jede kontinuierliche Untergruppe der 15-gliedrigen Kollineationsgruppe des R_3 läßt mindestens einen Punkt, eine Linie oder eine Fläche invariant, mit Ausnahme der zehngliedrigen Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Komplexes"[27]). Diese Untergruppen lassen auch alle eine „ebene Punktfigur", d. h. mindestens einen Punkt, eine gerade Linie oder eine Ebene in Ruhe, ausgenommen die drei folgenden:

1. die zehngliedrige Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Komplexes;

2. die sechsgliedrige Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche 2. Grades (Nr. 9);

3. die dreigliedrige Gruppe einer Raumkurve 3. Ordnung (Nr. 8, 28)[28]).

d) Für $n > 3$ sind derartige allgemeine Sätze nicht bekannt. Die $n(n+2)$-gliedrige Kollineationsgruppe des R_n ist aber stets „einfach" (d. h. sie besitzt keine invariante Untergruppe); ihre größten Untergruppen enthalten $n(n+1)$ Parameter, und bestehen aus allen Transformationen, welche entweder einen Punkt oder einen R_{n-1} in Ruhe lassen[29]).

7. Fortsetzung. Affine Gruppe. Affine Geometrie. Die $n(n+1)$-gliedrige projektive Gruppe des R_n mit invariantem R_{n-1} kann ein-

24) Continuous groups of projective transformations treated synthetically, Kansas Univ. Quart. (A) 4 (1895—96), p. 243; ebenda 5 (1896), p. 81. Eine zusammenfassende Darstellung enthält die Abhandlung: A new theory of collineations and their Lie groups, Amer. J. 24 (1902), p. 109. Vgl. auch: Report on the theory of collineations (Proc. Amer. Ass. adv. sc. 51 (1902), p. 305).

25) S. auch: *A. Emch,* Continuous groups of perspective collineations in the plane treated synthetically, Kansas Univ. Quart. (A) 5 (1896), p. 1.

26) Daß durch die erhaltenen Gruppen die Gesamtheit der projektiven Gruppen der Ebene erschöpft wird, ergibt sich aber bei *Newson* erst aus dem Vergleich mit *Lie*'s Resultaten.

27) *Lie,* Archiv for math. 10 (1884), p. 113 u. ff.; Th. d. Transfgr. 3, p. 235.

28) Spezielle projektive Gruppen im R_3 in Anschluß an die invariant bleibenden Elemente hat *H. B. Newson* in einer Reihe von kurzen Aufsätzen untersucht (A new theory of collineations in space, Kansas Univ. Quart. (A) 10 (1901), p. 33, 87, 99).

29) *Lie,* Math. Ann. 25 (1885), p. 130; Th. d. Transfgr. 1, p. 560, 569.

facher aufgefaßt werden, wenn man in dem (als Euklidisch vorausgesetzten) R_n den festen R_{n-1} ins Unendliche wirft. Man erhält dann die *„affine Gruppe“*[30]), welche aus allen projektiven Umformungen besteht, die eigentliche Elemente immer wieder in eigentliche und daher auch uneigentliche Elemente in ebensolche überführen. Diese Transformationen werden gewöhnlich auf das reelle Gebiet eingeschränkt. Analytisch werden sie durch lineare, ganze, im allgemeinen nicht homogene Substitutionen der cartesischen Punktkoordinaten dargestellt. In der affinen Geometrie kommt es auf solche Beziehungen zwischen den Elementen an, die sich auf Inzidenz (in elementarem Sinne), Parallelismus, und Anordnung innerhalb Gebilden 1. Stufe zurückführen lassen; weitere metrische Eigenschaften bleiben ausgeschlossen. Legt man den affinen Transformationen die weitere Beschränkung auf, daß je zwei orthogonale (uneigentliche) Elemente wieder in solche übergehen sollen, so bleiben alle Winkelgrößen ungeändert, und man kommt zur Elementargeometrie zurück.

Die Bedeutung der affinen Geometrie als einer mittleren Abstufung zwischen Elementargeometrie und projektiver Geometrie ist bereits von *A. F. Möbius* gestreift worden[31]). *F. Klein* hat sie in seinen zahlentheoretischen Vorlesungen[32]) besonders zur Geltung gebracht; *E. Study* hat auch darauf hingewiesen (s. Anm. [235])), und *L. Heffter* hat sie neuerdings ausführlich besprochen[33]). Aus der Hauptgruppe (Nr. 4) ergibt sich die affine Gruppe durch Hinzunahme der perspektivischen Kollineationen mit unendlich fernem Zentrum, die projektive Gruppe erst durch Hinzunahme beliebiger zentraler Kollineationen. Von den drei invarianten Beziehungen mit denen sich die Elementargeometrie befaßt: *Inzidenz, Parallelismus, Orthogonalität,* bleiben bei affinen Transformationen nur die beiden ersten, bei projektiven nur die erste erhalten. Die projektive Geometrie kennt zwei Klassen von reellen Polarsystemen in der Ebene, und entsprechend zwei Klassen von reellen nicht ausgearteten Kegelschnitten: die „nullteiligen“ und die „einteiligen“; die affine Geometrie spaltet die ein-

---

30) Nach *S. Lie* „allgemeine lineare Gruppe“; Th. d. Transfgr. 1, p. 556—57.

31) Der Barycentrische Calcül, Leipzig 1827, § 144 ff., § 248 = Ges. Werke 1 (Leipzig 1885), p. 177 ff., 316—18. S. auch III A B 4a, *Fano,* Nr. 8.

32) Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (autogr. Vorlesung, Göttingen 1895—96) 1, p. 51 u. ff.

33) Über das Lehrgebäude der Geometrie, insbesondere bei analytischer Behandlung, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 12 (1903), p. 490. *L. Heffter* und *C. Koehler,* Lehrbuch der analytischen Geometrie 1 (Leipzig-Berlin 1905), insbes. Nr. 9, 10, 28, 83 u. ff., 147 u. ff.

teiligen Kegelschnitte in Ellipse, Parabel, Hyperbel, und zieht Mittelpunkt, Durchmesser, Asymptoten heran; die Elementargeometrie redet von Achsen und Brennpunkten, und erkennt im Kreise und in der gleichseitigen Hyperbel ausgezeichnete Spezialfälle. Für die projektive Geometrie ist das Doppelverhältnis die charakteristische absolute Invariante; für die affine Geometrie das Abstandsverhältnis von drei auf einer Geraden liegenden Punkten; für die Elementargeometrie bilden das Abstandsverhältnis und das sog. „Richtungsverhältnis" von drei Geraden ein charakteristisches System von absoluten Invarianten. Diese Invarianten liefern für jede Abstufung der Geometrie ein naturgemäßes und charakteristisches Koordinatensystem: für die projektive Geometrie die allgemeinen Doppelverhältnis- oder projektiven Koordinaten; für die affine Geometrie die allgemeinsten cartesischen Punktkoordinaten[34]); für die Elementargeometrie die orthogonalen gleichseitigen Koordinaten.

Für die affine Geometrie ist bei $n = 2$ auch das Flächenverhältnis von zwei Dreiecken, oder allgemeiner von zwei geschlossenen ebenen Figuren, bei $n = 3$ das Volumenverhältnis usw. eine charakteristische absolute Invariante. Verlangt man, daß die Flächeninhalte bei $n = 2$, bezw. die Volumina bei $n = 3$ usw. ungeändert bleiben, so sondert sich aus der affinen Gruppe eine $n(n+1) - 1$-gliedrige invariante Untergruppe ab: die *speziell-affine* oder *äqui-affine* Gruppe[35]).

Weitere Untergruppen der allgemeinen projektiven und zugleich auch der affinen Gruppe mit n^2 und $n^2 - 1$ Parametern sind die *allgemeine* und die *speziell-affine Gruppe mit festem eigentlichem Punkte.* Analytisch wird die erste durch die sämtlichen linearen homogenen Transformationen der n cartesischen Punktkoordinaten dargestellt, die zweite durch alle solche Transformationen, deren Determinante $= 1$ ist. *S. Lie* nennt diese Gruppen *allgemeine* und *spezielle* lineare homogene Gruppe[36]). Diese beiden Gruppen stehen zu der projektiven Gruppe des R_{n-1} in einfacher Beziehung, da sie die ∞^{n-1} vom festen Punkte auslaufenden geraden Linien auch projektiv, auf alle überhaupt möglichen Arten, vertauschen. Sie können gewissermaßen als Projektionen der allgemeinen projektiven Gruppe eines R_{n-1}

34) Die *Möbius*schen „barycentrischen Koordinaten" $p:q:r$ (III A B 4a, *Fano,* Nr. 12; III A B 8, Koordinatensysteme, *Müller*, s. Barycentrischer Calcül, §§ 28ff., 144ff.) sind auch Abstandsverhältnisse, und folglich für die affine Geometrie geeignet. Dabei wird, an Stelle einer Seite des Fundamentaldreiecks, die Einheitsgerade ins Unendliche geworfen.

35) *Heffter* und *Koehler,* a. a. O. p. 220.

36) Th. d. Transfgr. 1, p. 557—58.

von einem festen außerhalb des R_{n-1} gelegenen Punkte angesehen werden.

Die allgemeine lineare homogene Gruppe des R_n ist zur allgemeinen projektiven Gruppe des R_{n-1} meroedrisch isomorph; die spezielle lineare homogene Gruppe des R_n ist mit der eben genannten Gruppe des R_{n-1} gleichzusammengesetzt, und $(n, 1)$-deutig isomorph auf sie bezogen.

8. Fortsetzung. Projektive Gruppen mit invarianten Kurven und Flächen. Es gibt eine Reihe kontinuierlicher und gemischter projektiver Gruppen, welche durch die Invarianz irgend einer Punktfigur (Kurve, Fläche usw.) charakterisiert werden (und, in bezug auf diese Figuren, als „automorphe" projektive Gruppen bezeichnet werden können). Diese Punktfiguren sind also Gebilde, die *unendlich viele* (notwendigerweise eine Gruppe bildende) *projektive Transformationen* gestatten[37]).

a) *F. Klein* und *S. Lie* haben 1870 die Frage nach den sogenannten W-Kurven (III D 4, *Scheffers*, Nr. **13** u. ff.), d. h. Kurven mit einer kontinuierlichen Schar von projektiven Transformationen in sich, aufgestellt und für ebene Kurven und Raumkurven gelöst[38]). Vom modernen Standpunkte aus sind das die *Bahnkurven eingliedriger projektiver Gruppen.* Bei getrennt liegenden Fixpunkten und unter Annahme projektiver nicht homogener Punktkoordinaten läßt sich eine W-Kurve des R_n durch die Gleichungen:

$$x_1 = x_2^{\alpha_2} = x_3^{\alpha_3} = \cdots = x_n^{\alpha_n}$$

darstellen, wobei $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ geeignete Konstanten bezeichnen.

Analytisch lassen sich die W-Kurven als Integralkurven gewisser Differentialsysteme 1. Ordnung auffassen. Insbesondere sind die W-Kurven der Ebene Integralkurven von *Jacobi*schen gewöhnlichen Differentialgleichungen (II A 4b, *Vessiot,* Nr. 8).

Ist eine W-Kurve algebraisch, so ist sie zugleich auch rational (d. h. vom Geschlecht Null)[39]).

Gestattet eine im R_n, aber in keinem R_{n-1} enthaltene irreduzible Kurve eine mindestens zweigliedrige projektive Gruppe, so gestattet

---

37) Allgemeine Problemstellung in Bezug auf eine beliebige Gruppe bei *F. Klein,* Erlanger Programm, Schlußbemerkungen. S. auch die Anm. [38]) angeführte Arbeit in Math. Ann. 4, §§ 6, 7.

38) Paris C. R. 70 (1870), p. 1222, 1275; Math. Ann. 4 (1872), p. 50.

39) *G. Loria,* Giorn. di mat. 26 (1888), p. 334. S. auch die dort angeführten Arbeiten von *A. Cayley, L. Cremona, E. Bertini.*

sie auch eine dreigliedrige (aber keine umfassendere) und ist eine algebraische rationale Normalkurve n^{ter} Ordnung[40]).

Die dreigliedrige projektive Gruppe einer rationalen Normalkurve n^{ter} Ordnung im R_n ist mit der allgemeinen projektiven Gruppe der geraden Linie holoedrisch isomorph (Nr. 28); sie ist auch die einzige dreigliedrige projektive Gruppe des R_n, welche diese Eigenschaft hat und keine ebene Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension im R_n in Ruhe läßt[41]).

b) Von Flächen des R_3 mit ∞^2 vertauschbaren projektiven Transformationen (sogenannten W-Flächen; III D 5, *v. Lilienthal,* Nr. 6) ist bereits in der ersten *Klein-Lie*schen Mitteilung aus dem Jahre 1870[42]) die Rede. Bei getrennt liegenden Doppelpunkten lassen sich deren Gleichungen in der allgemeinen Form:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = \text{const.}$$

mit verschwindender Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ schreiben.

Einzelne Kurven und Flächen 3. Ordnung mit unendlich vielen projektiven Transformationen in sich hat *H. Poincaré* bestimmt[43]).

Im Jahre 1882 stellte sich *Lie*[44]) die Aufgabe, alle Flächen des R_3 zu bestimmen, welche eine kontinuierliche mindestens dreigliedrige projektive Gruppe gestatten. Als solche ergaben sich, von den Ebenen und Kegelflächen[45]) abgesehen:

1. die nicht ausgearteten Flächen 2. Grades, deren jede eine sechsgliedrige projektive Gruppe zuläßt;

2. die abwickelbare Fläche einer Raumkurve 3. Ordnung, welche dieselbe dreigliedrige Gruppe gestattet, wie diese Raumkurve.

Dazu mußte später[46]) die damals übersehene *Cayley*'sche Linien-

---

40) *Lie,* Th. d. Transfgr. 3, p. 187.

41) Th. d. Transfgr. 3, p. 758, 785.

42) Paris C. R. 70 (1870), p. 1222. S. Anm [38]).

43) Sur les formes cubiques, ternaires et quaternaires (Journ. éc. polyt. 31 (cah. 50) (1881), p. 199). In Paris C. R. 97 (1883), p. 949 gab *Poincaré* auch einen Ansatz zur Bestimmung der M_{n-1} des R_n, welche mindestens zwei nicht vertauschbare infinitesimale projektive Transformationen gestatten.

44) Archiv for math. og naturw. 7 (1882), p. 179.

45) Eine Kegelfläche des R_3 geht bei den ∞^4 perspektivischen Kollineationen in sich über, welche ihren Mittelpunkt als Kollineationszentrum haben. Dazu kommen noch weitere Kollineationen, und zwar wird die Gesamtanzahl ∞^5 bezw. ∞^7, wenn die ebenen Schnitte der Kegelflächen W-Kurven bezw. Kegelschnitte sind. Im letzten Falle ist die Gruppe im komplexen Gebiet korrelativ zur Gruppe der ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen.

46) Christiania Forhandl. 1884, no. 9; vgl. auch Th. d. Transfgr. 3, p. 190 bis 196.

fläche 3. Ordnung (III C 7, *Meyer*, Nr. **14**) hinzugefügt werden, welche ebenfalls eine dreigliedrige projektive Gruppe zuläßt.

Seine (wesentlich analytischen) Untersuchungen verfolgte *Lie* 1895 weiter[47]), indem er alle Flächen bestimmte, die nur eine zweigliedrige projektive Gruppe gestatten. Dabei ging er stets von der Betrachtung der zur Gruppe gehörigen infinitesimalen Transformationen aus.

Inzwischen hatten italienische Geometer, insbesondere *F. Enriques*[48]) und *G. Fano*[49]), die Frage nach den Flächen mit unendlich vielen projektiven Transformationen in sich geometrisch (mit den Methoden der projektiven Geometrie) angegriffen. *Fano* gelangte zu folgenden Resultaten:

1. Jede algebraische Fläche mit unendlich vielen projektiven Transformationen in sich läßt sich eindeutig-umkehrbar auf eine Regelfläche abbilden;

2. gestattet eine algebraische Fläche eine *transitive* projektive Gruppe (d. h. eine Gruppe, bei welcher zwei ihr angehörige Punkte allgemeiner Lage stets ineinander überführbar sind), so ist sie *rational*, d. h. eindeutig-umkehrbar auf die Ebene abbildbar[50]).

Diese beiden Sätze sind auch im R_n gültig.

c) Für algebraische Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension, welche eine kontinuierliche und „nicht integrable“[51]) projektive Gruppe gestatten, hat *G. Fano*[52]) einen bemerkenswerten Zusammenhang mit der Invariantentheorie der binären Formen hervorgehoben. Die Gleichungen einer solchen Mannigfaltigkeit ergeben sich durch Nullsetzen von Invarianten, oder auch durch das identische Nullsetzen von Ko-

47) Leipzig Ber. 47 (1895), p. 209.

48) Ist. Veneto Atti (7) 4 (1892—93), p. 1590; ebenda 5 (1893—94), p. 638.

49) Roma Lincei Rend. (5) 4 (1895), 1. sem., p. 149; Palermo Rend. 10 (1896), p. 16.

50) Bei dieser ebenen Abbildung geht die projektive Gruppe der betrachteten Fläche in eine Gruppe von *Cremona*schen Transformationen der Ebene über. Aus den später zu besprechenden Sätzen über endliche kontinuierliche Gruppen von *Cremona*schen Transformationen (Nr. 22) läßt sich noch folgern, daß obige Fläche entweder auf eine Ebene, oder auf eine nicht ausgeartete Fläche 2. Grades, oder endlich auf eine rationale normale Kegelfläche m^{ter} Ordnung des R_{m+1} so abgebildet werden kann, daß der vorgelegten projektiven Gruppe eine ebenfalls projektive Gruppe auf der neuen Fläche entspricht. Dadurch lassen sich auch die überhaupt möglichen Zusammensetzungen dieser automorphen Gruppen leicht übersehen. (Vgl. *G. Fano*, Roma Lincei Rend. (5) 4 (1895), 1. sem., p. 325; Palermo Rend. 10 (1896), p. 1.)

51) *Lie*, Th. d. Transfgr. 1, p. 265; 3, p. 679.

52) Torino Mem. (2) 46 (1895—96). Vgl. auch Anm. [187]).

varianten einer binären Form oder eines Systems binärer Formen, wenn man die Koeffizienten dieser Formen als Punktkoordinaten deutet. Für $n \leqq 4$ hat *Fano* alle überhaupt möglichen Fälle aufgezählt.

Für $n = 4$ hat *G. Fano* auch die dreidimensionalen Gebilde bestimmt, welche eine kontinuierliche und nicht integrable projektive Gruppe gestatten[53]).

Die algebraischen M_3 des R_n $(n > 3)$, welche eine kontinuierliche transitive projektive Gruppe gestatten, sind alle rational, d. h. auf den R_3 abbildbar[54]).

9. Fortsetzung. Projektive Gruppe mit invarianter M_{n-1}^2. Die Nicht-Euklidischen Geometrien. Unter den automorphen projektiven Gruppen des R_n möge noch die von *S. Lie* vielfach untersuchte[55]) projektive Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades $[M_{n-1}^2]$ besonders erwähnt werden. Diese Gruppe enthält $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter. Für ungerades n besteht sie aus zwei kontinuierlichen Transformationsscharen, deren eine die beiden auf M_{n-1}^2 befindlichen Systeme von $R_{\frac{n-1}{2}}$ in Ruhe läßt, während die andere sie vertauscht; die erste Schar ist für sich eine Gruppe, und zwar, falls $n > 3$ ist, eine einfache Gruppe. Bei geradem n ist die Gesamtgruppe selbst kontinuierlich und einfach.

Die analytische Invariantentheorie dieser Gruppe ist die wohlbekannte *Theorie der quadratischen Formen* von beliebig vielen Variabeln mit nicht verschwindender Determinante (sofern Formen mit einander proportionalen Koeffizienten als äquivalent betrachtet werden).

Bei Zulassung imaginärer Elemente und Transformationen sind die sämtlichen nicht ausgearteten M_{n-1}^2 des R_n (und folglich die zugehörigen Kollineationsgruppen) projektiv untereinander gleichberechtigt. Beschränken wir uns aber auf reelle Gleichungen und reelle lineare Substitutionen, so kommt das „Trägheitsgesetz“ der quadratischen Formen (I B 2, *Meyer*, Nr. 3) in Betracht, und es sind danach $\frac{n+2}{2}$ oder $\frac{n+3}{2}$ verschiedene Arten von M_{n-1}^2 und von zugehörigen Gruppen zu unterscheiden, je nach der Anzahl der positiven und nega-

---

53) Ist. Veneto Atti (7) 7 (1895—96), p. 1069.

54) *G. Fano*, Roma Lincei Rend. (5) 8^1 (1899), p. 562.

55) Th. d. Transfgr. 3, Kap. 17, 18; Kap. 29, p. 809. Betreffend reelle Gruppen, s. Kap. 19, § 84.

tiven Glieder der auf die „kanonische“ Form $\sum_0^n a_i x_i^2 = 0$ reduzierten Gleichung der M_{n-1}^2.

Die projektive Behandlung eines R_n mit invarianter M_{n-1}^2 kann man nach einer von *A. Cayley*[56]) herstammenden und von *F. Klein*[57]) weiter entwickelten Auffassung als eine „allgemeine Metrik des R_n“ deuten (Nr. **31**), in welcher als „Entfernung“ zweier Punkte der mit einer Konstanten multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser beiden Punkte und der Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der M_{n-1}^2 definiert wird, also die M_{n-1}^2 — die sogenannte „Fundamentalfläche“ oder „absolute Fläche“ — als Ort der unendlich fernen Punkte erscheint. Die so definierten Entfernungen sind nämlich invariant bei allen projektiven Umformungen des R_n, welche die M_{n-1}^2 in Ruhe lassen. Insbesondere ergeben sich in einem reellen R_n bei Auswahl einer nullteiligen oder einer einteiligen und nicht geradlinigen M_{n-1}^2,[58]) die beiden „Nicht-Euklidischen“ Maßgeometrien, und zwar bzw. die elliptische und die hyperbolische Geometrie (während die parabolische Geometrie erst durch Ausartung der M_{n-1}^2 entsteht[59])). Bei diesen Maßgeometrien erscheint der R_n als eine Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße nach *Riemanns* Vorstellung[60])[61]).

---

56) A Sixth Memoir on Quantics, London Trans. 149 (1859), p. 61 = Coll. math. papers 2 (Cambridge 1889), p. 561.

57) Gött. Nachr. 1871, p. 419; Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. 4 (1871), p. 573; ebenda 6 (1873), p. 112.

58) D. h. einer M_{n-1}^2, deren homogene Gleichung durch eine reelle lineare Substitution auf die Form $\sum_0^n x_i^2 = 0$ im ersten Falle, im zweiten Falle aber auf die Form $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$ reduzierbar ist.

59) Vgl. III A B 1, *Enriques*, Abschn. IV. Das axiomatische Interesse welches in dem soeben zitierten Referat voransteht, tritt aber hier gänzlich zurück. Die Nicht-Euklidische Ausdrucksweise hat einfach den Zweck, die geometrische Forschung zu erleichtern.

60) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Habilitationsschrift 1854, Gött. Abh. 13 (1867) = Ges. Werke (Leipzig 1876), p. 254 (2. Aufl. 1892, p. 272).

61) Über elliptische und hyperbolische Geometrie hat neuerdings *E. Study* Untersuchungen angestellt, in welchen der R_3 von vornherein als eine Mannigfaltigkeit von *drei komplexen Dimensionen*, also als eine reelle 6-dimensionale Mannigfaltigkeit betrachtet wird (Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 15 (1906), p. 476; Amer. J. 29 (1907), p. 116 ff.). Als Raumelement führt er die die Fundamentalfläche nicht berührende gerade Linie ein, welche er durch Unterscheidung ihrer beiden Schnittpunkte mit jener Fläche als „Anfangspunkt“ und „Endpunkt“ gewissermaßen „orientiert“, und als *Speer* oder

10. Beispiele projektiver Geometrien mit invarianter M_{n-1}^2. Projektive Liniengeometrie. Es gibt eine ganze Reihe von Geometrien, deren Fundamentalgruppen, bei geeigneter Auswahl der Raumelemente und bei Einführung eines geeigneten Koordinatensystems, durch die linearen Transformationen dieser Koordinaten dargestellt werden, welche eine quadratische Gleichung von nicht verschwindender Diskriminante in sich überführen. Diese Geometrien dürfen demnach als projektive Behandlungen einer nicht ausgearteten M_{n-1}^2 eines R_n (nach Nr. 9 also auch als allgemeine Maßgeometrien) aufgefaßt werden.

Je nach den einzelnen Fällen kann es sich empfehlen, bei dieser Behandlung imaginäre Elemente und Transformationen auszuschließen oder aber zuzulassen. Bei Einschränkung auf Realität ist zur Festlegung der Geometrie auch die Angabe der Klasse erforderlich, zu welcher die M_{n-1}^2 im Sinne des Trägheitsgesetzes gehört (Nr. 9).

Ein erstes Beispiel liefert die *projektive Liniengeometrie* (Nr. 5, s. III C 10, Geometrie höherer Raumelemente, *Wälsch*). Als Koordinaten der geraden Linie im Raume betrachtet man die relativen Werte der aus den projektiven Koordinaten zweier ihr angehöriger Punkte oder Ebenen gebildeten sechs zweigliedrigen Determinanten p_{ik}; zwischen diesen besteht identisch die Relation 2. Grades:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Ausführlichen Gebrauch von diesen Koordinaten hat zuerst *J. Plücker* gemacht[62]); er hält aber noch an der älteren „metrischen" Auffassung

---

Pfeil bezeichnet. Diese Mannigfaltigkeit wird dann in zwei verschiedenen Weisen durch Hinzunahme uneigentlicher Elemente zu einem abgeschlossenen *Speerkontinuum* und zu einem *Pfeilkontinuum* ergänzt. Unter den ∞^8 Speeren oder Pfeilen sind ∞^4, geeignet definierte, als *reell* zu bezeichnen. Das Kontinuum der reellen (und komplexen) Pfeile des elliptischen Raumes läßt sich in einfacher Weise auf das Kontinuum der reellen (und komplexen) Pfeile des elliptischen Raumes birational, überall eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden, indem man die beiden zum elliptischen Raume gehörenden Bildkugeln (vgl. Nr. 30, a''')) auf die absolute Fläche des hyperbolischen Raumes legt, und dann das linke und rechte Bild des ersten Pfeiles mit dem Anfangs- und Endpunkt des zweiten identifiziert.

62) Koordinaten der geraden Linie im Raume treten, allerdings in von der heutigen ganz verschiedener Form, in *H. Graßmanns* Ausdehnungslehre von 1844 bereits auf. Im „System der Geometrie des Raumes" (Düsseldorf 1846) hat *Plücker* (Nr. 258) die Gerade im Raume durch vier unabhängige Koordinaten bestimmt; auf diese Art kann man aber nicht alle Geraden des projektiven Kontinuums ausnahmslos darstellen. Die sechs zweigliedrigen Determinanten mit der quadratischen Bedingungsgleichung treten bei *A. Cayley* auf [Quart. J. 3 (1860), p. 225; ebenda

fest, indem er in seiner Theorie der Linienkomplexe 1. und 2. Grades besonders auf deren metrische Beziehungen achtet. Sodann hat *F. Klein* hervorgehoben, daß bei kollinearen und reziproken Umformungen des R_3 die p_{ik} eine lineare Transformation erleiden, welche die Gleichung $P = 0$ in sich überführt, während umgekehrt jede solche Transformation eine räumliche Kollineation oder Reziprozität ergibt[63]). Von hier aus gelangt die *projektive Liniengeometrie*, d. h. die (erweiterte) projektive Geometrie des R_3 (Nr. 5) mit der geraden Linie als Raumelement, zunächst also die projektive Theorie der Linienkomplexe 1. und 2. Grades[64]), zur konsequenten Entwicklung. *Projektive Liniengeometrie ist mit der projektiven Behandlung der durch die Gleichung $P = 0$ dargestellten M_4^2 des R_5 gleichbedeutend.* Insbesondere deckt sich die reelle projektive Geometrie mit der reellen Behandlung dieser M_4^2; auf kanonische Form reduziert lautet ihre Gleichung: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 = 0$.

Die Polarbeziehung $\sum p'_{ik} \frac{dP}{\partial p_{ik}} = 0$ bedeutet, daß die geraden Linien (p) und (p') einander schneiden, was eben eine projektive Beziehung ist.

Die projektive Liniengeometrie läßt sich zu einer *projektiven Geometrie der linearen Komplexe* (oder *Gewinde*) weiterbilden, indem man den Koordinaten p_{ik} auch solche relative Werte beilegt, welche die Bedingungsgleichung $P = 0$ nicht erfüllen[65]). Diese Werte (α_{ik})

---

5 (1862), p. 81 = Coll. math. papers 4, p. 446, 490; s. auch III A B 4a, *Fano*, Nr. 21]. Und von 1865 an hat *Plücker* in mehreren Aufsätzen (Ges. Werke 1, herausgegeben von *A. Schoenflies*, Leipzig 1895, p. 462 ff.) und in der „Neuen Geometrie des Raumes" (1, Leipzig 1868; 2, herausgeg. von *F. Klein*, 1869) diese Koordinaten auf die Untersuchung der Liniengebilde im Raume, insbesondere der Komplexe 1. und 2. Grades systematisch angewandt. Wegen Einführung der Linienkoordinaten als selbständiger Veränderlicher, und zwar als der mit gewissen Konstanten multiplizierten Momente der zu bestimmenden Geraden in bezug auf die sechs Kanten des Koordinatentetraeders s. *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 1 (1869), p. 432; *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 366.

63) Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des 2. Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form (Diss. Bonn, 1868; abgedruckt in Math. Ann. 23 (1884), p. 539), insb. II; Über Liniengeometrie und metrische Geometrie (Math. Ann. 5 (1872), p. 257) insb. § 1 (s. auch Math. Ann. 4 (1871), p. 356); Erlanger Programm, § 5.

64) S. die erwähnte *Klein*sche Dissertation. Weiter: Zur Theorie der Linienkomplexe 1. und 2. Grades, Math. Ann. 2 (1870), p. 198 (Auszug in Gött. Nachr. 1869, p. 258).

65) Dagegen können wir die absoluten Werte der sechs Veränderlichen als Koordinaten einer „Dyname" betrachten. S. *Plücker*, Neue Geometrie des Raumes 1, p. 24—25.

lassen sich nämlich als Koordinaten des linearen Komplexes:

$$\sum \alpha_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0$$

betrachten; wenn $\alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0$ ist, so besteht dieser Komplex aus den Geraden, welche die feste Gerade (α) schneiden, er kann also mit letzterer identifiziert werden. Die Polarenbeziehung in bezug auf $P = 0$ ist dann der analytische Ausdruck der „involutorischen Lage“[66]) zweier Komplexe. Diese Weiterbildung, die schon *Plücker* in Aussicht genommen hatte[67]), tritt bei *F. Klein* deutlich hervor, indem die linearen Komplexe als Punkte eines R_5 aufgefaßt werden und dieser R_5 projektiv behandelt wird unter Auszeichnung der M_4^2 der „speziellen“ linearen Komplexe (d. h. der Geraden)[68]).

Die Schraubentheorie von *R. Ball* (Nr. 4) und die „Geometrie der Dynamen“ von *E. Study* (Nr. **17—19**) sind ebenfalls Geometrien, welche den linearen Komplex, letztere auch (in der Hauptsache) die gerade Linie als Raumelement benutzen, aber zu anderen Fundamentalgruppen gehören.

11. Fortsetzung. Gruppe der reziproken Radien. Niedere Kugelgeometrie. Die *Gruppe der reziproken Radien* ergibt sich aus der Hauptgruppe (Nr. 4) durch Hinzunahme der *Inversionen* (in bezug auf Kreise, bezw. Kugeln usw.)[69]) und der Produkte aus Inversionen und Ähnlichkeitstransformationen. Nach einem Satze von *Liouville*[70]) ist diese Gruppe, mit Einschränkung auf Realität, im Raume R_3 zugleich auch die *Gruppe aller konformen Transformationen* (d. h. aller Transformationen, welche die Winkelgrößen nicht ändern); und dasselbe gilt für jeden Euklidischen R_n, so lange $n \geqq 3$ ist[71]), während

---

66) *Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 201.

67) *Plücker,* Neue Geometrie des Raumes 1, p. 25.

68) Weitere Ausführungen bei *Th. Reye,* J. f. Math. 95 (1883), p. 330; *R. De Paolis,* Roma Lincei Mem. (4) 1 (1884), p. 205. Diese Geometrie hat *C. Segre* als eine „allgemeine Metrik“ der linearen Komplexe behandelt (Torino Atti 19 (1883—84), p. 159).

69) Die Inversionen haben in der mathematischen Physik durch die Theorie der elektrischen Bilder von *W. Thompson* eine bemerkenswerte Anwendung gefunden (*W. Thompson,* J. de math. 10 (1845), p. 364; Papers on electrostatics and magnetism, London 1872; 2. Aufl. 1884, p. 144ff.).

70) Extension au cas de trois dimensions de la question du tracé géographique, Note VI im Anhang zu *G. Monges* „Application de l'analyse à la géométrie“ (Paris 1850), p. 609.

71) *Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 186; Th. d. Transfgr. 3, p. 347. Weitere analytische Beweise bei *R. Beez,* Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 253; *G. Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 7 (1878), p. 282. Teilweise synthetischer Beweis für $n = 3$ bei *A. Capelli,* Ann. di mat. (2) 14 (1886—87), p. 227.

durch die entsprechende 6-gliedrige Gruppe der Ebene deren konforme Transformationen bei weitem noch nicht erschöpft sind (vgl. Nr. **23**, a). Die Operationen dieser 6-gliedrigen Gruppe der Ebene heißen „Kreisverwandtschaften“[72]). Wegen dieser Bedeutung wird die *Geometrie der reziproken Radien* gewöhnlich als *konforme Geometrie* auf das reelle Gebiet eingeschränkt; ihre Formeln behalten aber auch im komplexen Gebiet ihre volle Gültigkeit (und in diesem Sinne wird sie Nr. **13** nochmals zur Sprache kommen).

Die einfachste analytische Darstellung der *Geometrie der reziproken Radien* ergibt sich (wenn wir uns auf den R_3 beschränken dürfen) bei Zugrundelegung homogener, pentasphärischer Punktkoordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$, mit einer quadratischen Bedingungsgleichung $\Omega(x) = 0$ von nicht verschwindender Diskriminante (III A B 8, *Müller*)[73]). Ihre Fundamentalgruppe besteht dann aus den linearen Substitutionen der x_i, welche die Gleichung $\Omega(x) = 0$ in sich überführen; die obige Geometrie ist also in der Tat mit der projektiven Geometrie auf einer

72) Diese Transformationen hat zuerst *L. J. Magnus* als Spezialfälle von quadratischen Transformationen gestreift (J. f. Math. 8 (1831), p. 51, insb. p. 60; Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen usw., 2 Bde., Berlin 1833—37, insb. 1, p. 236, 290). *A. F. Möbius* hat sie ausführlich untersucht und als „Kreisverwandtschaften“ bezeichnet; sie zerfallen in zwei getrennte Scharen („direkte“ und „inverse“), je nachdem entsprechende Figuren denselben oder umgekehrten Sinn aufweisen (was darauf hinauskommt, daß die beiden Kreispunkte in Ruhe bleiben, oder aber vertauscht werden). S. die Abh.: Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren (Leipzig Ber. 5 (1853), p. 14 = J. f. Math. 52 (1856), p. 218 = Ges. Werke 2 (Leipzig 1886), p. 206); Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung (Leipzig Abh. 2 (1855), p. 529 = Werke 2, p. 243). In der zweiten Abh. §§ 27—31 wird die Theorie der Kreisverwandtschaft auf sphärische Figuren ausgedehnt, indem solche Figuren „kreisverwandt“ genannt werden, wenn ihre stereographischen ebenen Projektionen in derselben Beziehung stehen. § 32 ff. enthalten eine Erweiterung auf die Kreisverwandtschaft zwischen Figuren im Raume, wobei jeder Kugelfläche des einen Raumes eine Kugelfläche im andern entspricht.

73) Die pentasphärischen Koordinaten sind lineare Verbindungen der Größen $x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z, 1, unter x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten verstanden. Geometrisch drücken sie die „Potenzen“ des betreffenden Punktes in bezug auf fünf feste linear-unabhängige Kugeln aus. Diese Koordinaten sind hauptsächlich von *G. Darboux* in seiner Schrift: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires“ (Paris 1873) eingeführt worden (vgl. insbes. Note X, p. 256). Seine Untersuchungen gehen jedoch bis auf die Jahre 1869—70 zurück, wo er mit *F. Klein* und *S. Lie* in vielfacher Beziehung stand. Demgemäß tritt auch bei Untersuchungen letzterer öfters eine Bezugnahme auf pentasphärische Koordinaten auf (vgl. Math. Ann. 5 (1872), p. 252 ff. u. 264 ff.). S. auch: *Klein,* Höhere Geometrie 1, p. 98 ff., 198 ff., 373 ff.

nicht ausgearteten M_3^2 des R_4 gleichbedeutend. Die Gleichung dieser M_3^2 läßt sich durch eine reelle lineare Substitution auf die Form $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - z_5^2 = 0$ bringen.

Die Polarenbeziehung $\sum x_i' \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0$ bedeutet, daß die beiden Punkte (x) und (x') eine verschwindende Entfernung haben. Es gibt aber keine derartigen reellen Punkte, welche beide auf der Mannigfaltigkeit $\Omega(x) = 0$ liegen.

Durch eine allgemeine lineare Gleichung $\sum u_i x_i = 0$ wird eine Kugel dargestellt; und bei jeder Operation der Gruppe geht diese Kugel wieder in eine Kugel über. Punkt, Kreis, Kugel, sind in der Geometrie der reziproken Radien die Grundbegriffe, weil sie ebensoviele „Körper" bilden[73a]); Gerade und Ebenen sind spezielle Kreise und Kugeln, dadurch charakterisiert, daß sie einen im Sinne dieser Geometrie nicht ausgezeichneten „unendlich fernen" Punkt enthalten. Indem die ∞^4 Kugeln den ebenen Schnitten von $\Omega(x) = 0$ entsprechen, läßt sich der R_3 der pentasphärischen Koordinaten x_i als stereographische Projektion (III C 2, *Staude*, Nr. 88) dieser Mannigfaltigkeit auffassen. *Die Geometrie der reziproken Radien des R_3 kommt also darauf hinaus, diesen Raum als stereographische Projektion der Mannigfaltigkeit $\Omega(x) = 0$ zu betrachten, und letztere mit projektiven Mitteln zu untersuchen.* Dieser Satz läßt sich auf jeden R_n übertragen $(n > 2)$.[74])

Zur Darstellung der Gruppe der reziproken Radien dürfen wir auch die Kugeln als Raumelemente zugrunde legen, und sie durch die (als Koordinaten aufgefaßten) Koeffizienten u_i der obigen Kugelgleichung bestimmen. Bei linearen Substitutionen der x_i erleiden die u_i die kontragrediente lineare Substitution, und die quadratische Gleichung $\Phi(u) = 0$, unter Φ die zu Ω adjungierte Form verstanden, geht in sich über. Diese Gleichung bedeutet, daß die Kugel (u) sich auf einen Punkt zusammenzieht (d. h. in einen Minimalkegel ausartet), und die Polargleichung $\sum u_i' \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0$, daß die Kugeln (u) und (u') einander senkrecht schneiden, was eben invariante Beziehungen sind.

In dieser Weise erscheint die *Geometrie der reziproken Radien* als eine Kugelgeometrie, und zwar als die von *F. Klein* sogenannte

---

73a) Die invarianten Eigenschaften der Figur zweier Kreise im R_3 gegenüber der konformen Gruppe des R_3 hat *E. v. Weber* verfolgt (Zur Geometrie der Kreise im Raume, Arch. Math. Phys. (3) 7 (1904), p. 286).

74) *F. Klein*, Erlanger Programm, § 6; Über Liniengeometrie und metrische Geometrie (Math. Ann. 5 (1872), p. 257 insb. § 2); Höhere Geometrie 1, p. 373 ff

„*niedere*“ *Kugelgeometrie*[75]). Die ∞^4 Kugeln des R_3 werden als Punkte eines R_4 aufgefaßt; die Punkte und Ebenen des R_3 erscheinen als besondere Kugeln und bilden im R_4 bezw. eine invariante M_3^2 ($\Phi = 0$) und einen nicht invarianten (linearen) R_3. Eine elementare Darstellung dieser Kugelgeometrie lieferte *Th. Reye*[76]); weitere Untersuchungen mit Anwendung auf die Klassifikation der Cykliden verdanken wir *G. Loria*[77]).

12. Kontinuierliche Untergruppen der Gruppe der reziproken Radien. Die Untergruppen der Gruppe der reziproken Radien lassen sich im R_n allgemein dadurch bestimmen, daß man diese Gesamtgruppe als stereographische Projektion der projektiven Gruppe einer M_n^2 des R_{n+1} betrachtet und aus letzterer die einzelnen Untergruppen heraushebt. Diese Gruppen sind zugleich auch Gruppen von quadratischen Transformationen (Nr. 22, letzter Absatz).

Was speziell die Ebene angeht, so lassen sich die direkten Kreisverwandtschaften[72]) analytisch durch lineare Transformationen einer komplexen Veränderlichen $x + iy$ darstellen, die inversen dagegen durch die Transformationen, bei denen $x' + iy'$ eine lineare, im allgemeinen gebrochene Funktion von $x - iy$ ist (s. Nr. 30). Die daraus gebildeten Gruppen sind also Gruppen von projektiven (Nr. 5, 6) und antiprojektiven[16]) Umformungen in Gebilden 1. Stufe (s. auch I A 4, Komplexe Größen, *Study*, Nr. 6). Auf synthetischem Wege hat *H. B. Newson* diese Gruppen bearbeitet[78]).

Die reellen konformen kontinuierlichen Gruppen des R_3 hat *U. Amaldi* bestimmt[79]), indem er sie als projektive Gruppen des R_4 mit invarianter reeller Kugel betrachtet. Von diesen Gruppen führt er auch die erzeugenden infinitesimalen Transformationen an. Es ergibt sich dabei, daß jede kontinuierliche Untergruppe der konformen Gesamtgruppe entweder durch eine konforme Transformation in eine Gruppe von Euklidischen Bewegungen oder Ähnlichkeitsfor-

---

75) *F. Klein,* Höhere Geometrie 1, p. 228, 467 ff.; 2, p. 38.

76) Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme, Leipzig 1879. S. auch: Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, edita cura et studio *L. Cremona* et *E. Beltrami,* Mediolani 1881, p. 241; J. f. Math. 95 (1883), p. 330 (insb. Schlußbemerkungen. p. 347); ebenda 99 (1886), p. 205.

77) *G. Loria,* Ricerche intorno alla geometria della sfera usw., Torino Mem. (2) 36 (1884). Vgl. auch Nr. 40.

78) Continuous groups of circular transformations, Amer. M. S. Bull. (2) 4 (1897), p. 107; Indirect circular transformations and their mixed groups, ebenda 7 (1900), p. 259). S. auch Nr. 6, Anm.[21]).

79) I gruppi continui reali di trasformazioni conformi dello spazio, Torino Mem. (2) 55 (1904—05).

mationen überführbar ist, oder mit einer Gruppe von Nicht-Euklidischen Bewegungen ähnlich ist, oder endlich aus den ∞^4 Transformationen besteht, die einen reellen Kreis in Ruhe lassen.

U. Amaldi hat auch Untersuchungen angestellt über die Flächen, welche eine kontinuierliche Schar konformer Transformationen gestatten [80]). Läßt man die trivialen Fälle der Ebene und der Kugel bei Seite, so können diese Transformationen in nicht größerer Anzahl als ∞^2 sein: sind sie gerade ∞^2, so läßt sich die betreffende Fläche durch eine konforme Transformation in einen Rotationskegel, oder in einen Rotationszylinder, oder in einen Kreisring überführen.

13. Die Liesche Kugelgeometrie [81]). Der niederen (oder elementaren) Kugelgeometrie reiht sich die *„höhere“* oder *Liesche Kugelgeometrie* an.

Bei Zugrundelegung der in Nr. **11** eingeführten homogenen Kugelkoordinaten u_i mit der Bedingungsgleichung $\Phi(u) = 0$ ergibt sich der Radius einer beliebigen Kugel (u) in der Form:

$$r = \pm \frac{\sqrt{\Phi(u_1 u_2 u_3 u_4 u_5)}}{\Sigma c_i u_i},$$

wo $\sum u_i c_i = 0$ die Bedingung ist, daß die Kugel sich auf eine Ebene reduziert. Nun können wir $u_6 = \sqrt{\Phi(u_1 u_2 \cdots u_5)}$ als sechste homogene und überzählige Kugelkoordinate einführen, so daß die *sechs* (hexasphärischen) Koordinaten u_i an die quadratische Bedingungsgleichung

$$u_6^2 - \Phi(u_1 u_2 u_3 u_4 u_5) = 0$$

gebunden sind. Die linearen Transformationen dieser sechs Variabeln, welche die Bedingungsgleichung:

$$\psi \equiv u_6^2 - \Phi(u_1 u_2 u_3 u_4 u_5) = 0$$

(von ebenfalls nicht verschwindender Diskriminante) in sich überführen, ordnen einer jeden Kugel zwei Kugeln zu (wegen der Unbestimmtheit des Vorzeichens von u_6); diese ∞^{15} Kugeltransformationen bilden die Fundamentalgruppe der *Lie*schen Kugelgeometrie.

Wir haben es also mit der projektiven Gruppe des R_5 zu tun, welche die quadratische Mannigfaltigkeit $\psi = 0$ in sich überführt. Diese Gruppe können wir nach Belieben auf das reelle Gebiet einschränken, oder nicht; in bezug auf den ersten Fall sei noch erwähnt,

---

80) Le superficie con infinite trasformazioni conformi in sè stesse, Roma Lincei Rend. (5) 10, 2. sem. (1901), p. 168.

81) Christiania Forhandl. 1871, p. 67, 182; Gött. Nachr. 1871, p. 191, 535; Math. Ann. 5 (1872), p. 145.

daß die quadratische Form ψ sich durch eine reelle lineare Substitution auf die Gestalt $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - v_5^2 - v_6^2$ bringen läßt[82]).

Einem Punkte, als Kugel von verschwindendem Radius ($u_6 = 0$), entspricht im allgemeinen keine Punktkugel. Die Punkte bilden also bei dieser Gruppe keinen Körper; einen solchen bilden aber die ∞^4 Kugeln. Die Polarenbeziehung $\sum u_i' \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = 0$ bedeutet, daß die Kugeln (u) und (u') einander berühren. *Berührung ist folglich eine bei der Lieschen Kugelgeometrie invariante Beziehung;* und dem *Flächenelement* (Nr. 5), welches zwei sich berührenden Kugeln gemeinsam ist, wird bei jeder Operation der Gruppe ein bestimmtes, den transformierten Kugeln gemeinsames Flächenelement zugeordnet. Die *Flächenelemente* bilden demnach bei der höheren Kugelgeometrie auch einen Körper; man wird also die 15-gliedrige Gruppe dieser Geometrie auch in Koordinaten von Flächenelementen darstellen können, wobei die Transformationen der Gruppe als besondere *Berührungstransformationen* (III D 7, *Scheffers*; s. auch unten, Nr. 15) erscheinen. Es sind das die sämtlichen Berührungstransformationen, welche Kugeln in Kugeln, oder auch die Krümmungslinien (III D 3, *v. Lilienthal*, Nr. 1) einer jeden Oberfläche in ebensolche überführen[83]).

Projektive Liniengeometrie des R_3 (Nr. 10), Geometrie der reziproken Radien des R_4 (Nr. 11) und *Lie*sche Kugelgeometrie des R_3 sind alle projektive Behandlungen einer nicht ausgearteten M_4^2 des R_5. Im reellen Gebiet unterscheiden sie sich untereinander dadurch, daß die bezüglichen M_4^2 im Sinne des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen den drei verschiedenen indefiniten Typen angehören, also durch reelle lineare Substitutionen nicht ineinander überführbar sind. *Wenn man aber von den Realitätsverhältnissen absieht*, sind sie alle gleichbedeutend (s. auch Nr. 30c)). Durch Vergleichung der Abbildungen der M_4^2 im 1. und im 3. Falle auf die Mannigfaltigkeiten der komplexen geraden Linien und der komplexen Kugeln des R_3 ergibt sich die von *S. Lie* entdeckte bemerkenswerte Berührungstransformation, welche die geraden Linien in Kugeln, und die Haupttangentenlinien der Flächen des Geradenraumes in die Krümmungslinien der entsprechenden Flächen des Kugelraumes überführt[84]).

---

82) *Klein*, Höhere Geometrie 1, p. 209.

83) *Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 183; *Klein*, Höhere Geometrie 1, p. 485—86.

84) Paris C. R. 71 (1870), p. 579; Berlin Ber. 1870, p. 891 (zusammen mit *F. Klein*, abgedruckt in Math. Ann. 23 (1884), p. 579; s. insb. Nr. 7); Christiania Forhandl. 1870, p. 506. S. ferner die Anm. [81]) erwähnten Aufsätze, sowie auch: Geometrie d. BT 1, Kap. 10, § 4 (III D 3, *v. Lilienthal*, Nr. 35).

Dagegen läßt sich die Abbildung der Geometrie der reziproken Radien des R_4 auf die *Lie*sche Kugelgeometrie des R_3 (immer noch im komplexen Gebiet) in folgender Weise herstellen[85]): *Wir denken uns im Punktraume R_4 die Gruppe der reziproken Radien konstruiert, und legen dann von jedem Punkte dieses R_4 nach der (Euklidischen) Fundamentalfläche (M_2^2) den zugehörigen Minimalkegel (Γ_3^2). Schneiden wir letzteren mit einem festen R_3* (wodurch eben eine Kugel entsteht), *so ergibt sich eine* (2, 1)-*deutige Zuordnung zwischen den Punkten des R_4 und den Kugeln des R_3, welche gerade die obige Gruppenabbildung liefert.*

Die letzte Abbildung läßt sich auf höhere Räume übertragen. Die *Lie*sche Kugelgeometrie des R_n ergibt sich aus der projektiven Behandlung einer nicht ausgearteten M_{n+1}^2 des R_{n+2}, wenn man zuerst diese stereographisch auf die Punkte des R_{n+1} und dann letztere durch Minimalprojektion (2, 1)-deutig auf die Kugeln des R_n bezieht[86]).

Für $n = 2$ liefert die höhere Kugelgeometrie die Geometrie der ∞^{10} Berührungstransformationen der Ebene, welche Kreise in Kreise überführen[87]) (s. auch Nr. **15**).

14. Laguerres „Géométrie de direction“. Den Inversionen können wir *Laguerres „Transformations par directions réciproques“*[88]) zur Seite stellen, welche, ebenso wie die Inversionen, für sich noch keine Gruppe bilden, aber erzeugende Operationen einer solchen sind. Dabei beschränken wir uns mit *Laguerre* auf die Betrachtung reeller Figuren.

Eine in bestimmtem Sinne zu durchlaufende Gerade, resp. Kreis, nennt *Laguerre* eine *„Direktion“* oder *„Halbgerade“*, resp. einen *„Zyklus“*

---

85) *F. Klein,* Höhere Geometrie 1, p. 472 ff.

86) *F. Klein,* a. a. O. p 475.

87) Diese Berührungstransformationen hat *G. Scheffers* synthetisch bestimmt (Leipzig Ber. 51 (1899), p. 145).

88) Sur la géométrie de direction (Paris soc. math. Bull. 8 (1880), p. 196 = Oeuvres 2 (Paris 1905), p. 592); Sur la transformation par directions réciproques (Paris C. R. 92 (1881), p. 71 = Oeuvres 2, p. 604); Transformations par semi-droites réciproques (Nouv. Ann. (3) 1 (1882), p. 542 = Oeuvres 2, p. 608), wo die frühere Definition etwas umgeändert wird; Sur les hypercycles (Paris C. R. 94 (1882), p. 778, 933, 1033, 1160 = Oeuvres 2, p. 620); Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles (Nouv. Ann. (3) 2 (1883), p. 16 = Oeuvres 2, p. 636); Sur quelques propriétés des cycles (ebenda p. 65 = Oeuvres 2, p. 651); Sur les courbes de direction de la troisième classe (ebenda p. 97 = Oeuvres 2, p. 660); Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe (ebenda 4 (1885), p. 5 = Oeuvres 2, p. 675). Zusammenfassende Darstellung: Recherches sur la géométrie de direction, Paris 1885.

oder „*Halbkreis*"; und eine Halbgerade heißt „Tangente" an einen Zyklus, wenn die bezügliche Gerade den Kreis des Zyklus berührt, und in dem Berührungspunkte die Richtungen der beiden Elemente übereinstimmen. Damit vereinfachen sich die elementaren Sätze über Lagenbeziehungen von Geraden und Kreisen; an einen Zyklus kann man parallel zu einer gegebenen Halbgeraden nur eine Tangente ziehen; es gibt einen einzigen Zyklus, der drei gegebene Halbgeraden berührt; usw.

Nun lassen sich die Halbgeraden der Ebene einander eindeutig-umkehrbar so zuordnen, daß man verlangt, daß je zwei entsprechende (reziproke) Halbgeraden sich stets auf einer bestimmten Geraden, der Transformationsachse, schneiden, und irgend zwei Paare reziproker Halbgeraden Tangenten eines und desselben Zyklus sind. Diese „Transformation par directions réciproques" hängt bei gegebener Transformationsachse noch von *einem* Parameter ab. Tangenten eines Zyklus gehen wiederum in Tangenten eines Zyklus über; es gibt aber unendlich viele Zyklen, deren reziproke Bilder „Punkte", d. h. Halbgeradenbüschel sind. Der „Tangentialabstand" zweier Zyklen (d. h. der Abstand zwischen den Berührungspunkten je einer ihrer gemeinsamen Tangenten) ändert sich durch die Transformation nicht; dieser Satz läßt sich auch auf Tangentialabstände beliebiger Kurven übertragen und darf demjenigen der Invarianz der Winkel bei Transformationen durch reziproke Radien zur Seite gestellt werden (vgl. Nr. **24**, e)).

Betrachtet man eine Kurve als Enveloppe einer sie berührenden Halbgeraden, so kann sie von der Enveloppe der entgegengesetzten Halbgeraden nicht immer analytisch getrennt werden. Diese Eigenschaft kommt aber besonderen Kurven zu, den „courbes de direction" (z. B. dem Kreise); dann zerfällt auch die Umhüllungskurve eines Kreises von beliebigem konstanten Radius, dessen Mittelpunkt die vorgelegte Kurve beschreibt, in zwei getrennte Kurven.

Für den Raum hat *Laguerre* die entsprechenden Begriffe: *Halbebene*, *Halbkegel*, *Halbfläche*, ... eingeführt und die Transformationen durch reziproke Direktionen definiert: zwei reziproke Halbebenen schneiden sich auf einer festen Ebene; zwei Paare reziproker Halbebenen berühren einen Rotations-Halbkegel. Einer Halbkugel (oder „orientierten Kugel") entspricht eine Halbkugel, welche sich auch auf einen Punkt zusammenziehen kann; einem Rotations-Halbkegel ein ebensolcher Halbkegel, eventuell ein Halbzylinder oder eine Halbgerade (d. h. ein Halbebenenbüschel); einer Halbfläche eine Halbfläche, und den Krümmungslinien der ersten diejenigen der zweiten.

Diese Transformationen sind zugleich spezielle Berührungstrans-

formationen, und als solche in der 15-gliedrigen Gruppe der *Lie*schen Kugelgeometrie enthalten[89]). Ihnen, sowie auch ihren Produkten, kommt die charakteristische Eigenschaft zu, das System der Ebenen in sich zu transformieren; diese Produkte bilden eine 10-gliedrige Untergruppe der *Lie*schen Gruppe, welche die Fundamentalgruppe der „Géométrie de direction" ist. In der Ebene ist die entsprechende Gruppe 6-gliedrig.

Durch Betrachtung der Halbkreise und Halbkugeln, oder „orientierten" Kreise und Kugeln, kann die von *M. Chasles*, *A. F. Möbius* und *E. Laguerre* in der Hauptsache herrührende[90]) und von *W. Fiedler*[91]) weiter verfolgte Abbildung der Punkte des R_3 auf die Kreise einer festen Ebene, welche Nr. 13 durch Minimalprojektion auf die Punkte des R_{n+1} und die Kugeln des R_n erweitert wurde, zu einer eindeutig-umkehrbaren gemacht werden. Die Minimalprojektion im R_{n+1} kann auch durch Projektion einer anderen M_{n-1}^2 ersetzt werden, welche die Euklidische Fundamental-M_{n-2}^2 des R_n enthält; insbesondere kann dadurch die Zuordnung von Punkten und Kugeln reell werden. Der *Laguerre*schen Gruppe des R_n entspricht im R_{n+1} bei der genannten Abbildung eine projektive Gruppe, welche mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen identifiziert werden kann. Diese Beziehungen, und die Stellung der *Laguerre*schen Geometrie zur Geometrie der reziproken Radien, hat *E. Müller* untersucht[92]).

15. Berührungstransformationen. Endliche kontinuierliche Gruppen von Berührungstransformationen. Die Gruppen der *Lie*schen Kugelgeometrie und der *Laguerre*schen „Géométrie de direction" sind Beispiele von endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen.

Im R_3 bezeichnet *S. Lie* als „Berührungstransformation"[93]) (III D 7, *Scheffers*) jede Transformation der fünf Variabeln $x, y, z, p \left(= \frac{\partial z}{\partial x}\right)$,

---

89) Die Beziehungen der Laguerreschen Geometrie zur Lieschen Kugelgeometrie hat *C. Stéphanos* besprochen (Paris C. R. 92 (1881), p. 1195). Betreffend Darstellung der Halbkugeln durch Quaternionen (I A 4, Komplexe Größen, *Study*, Nr. 9) s. *C. Stéphanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 589.

90) Vgl. III A, B 4a, *Fano*, Nr. 11, Anm. [80]), [81]), [82]).

91) Cyklographie, Leipzig 1882, insb. p. 138 ff. Hier wird auch p. 13 der Drehungssinn des Kreises, also der orientierte Kreis herangezogen.

92) Die Geometrie orientierter Kugeln nach Graßmannschen Methoden, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 289; Beiträge zur Zyklographie, Deutsche Math.-Ver. Jahresb. 14 (1905), p. 574.

93) Th. d. Transfgr. 2, p. 48—49; Geom. d. BT 1, p. 647, wo auch die frühere Literatur angeführt wird. Auf den Begriff der Berührungstransformation

$q\left(=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, welche die Gleichung:

$$(1) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

in sich überführt. Diese fünf Variabeln lassen sich als Koordinaten des *Flächenelementes* deuten, welches aus dem Punkte (x, y, z) und der diesen Punkt enthaltenden Ebene $p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0$ besteht. Die in dieser Darstellungsform enthaltenen Flächenelemente bilden bei obigen Transformationen einen Körper.

Diese Definition läßt sich auf mehrdimensionale Räume erweitern. „Berührungstransformationen" des R_{n+1}[94]) sind die Transformationen der $2n+1$ Variabeln $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, welche die zu (1) analoge Beziehung:

$$(2) \qquad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

nicht zerstören; sie können also als Punkttransformationen des R_{2n+1} aufgefaßt werden, welche diese *Pfaff*sche Gleichung in sich überführen. Im R_{n+1} kann man die $2n+1$ Variabeln z, x_i, p_i als Koordinaten des „Elementes" betrachten, welches aus dem Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ und dem diesen Punkt enthaltenden R_n:

$$\sum p_i(X_i - x_i) - (Z - z) = 0$$

besteht. Für $n = 1$, d. h. in der Ebene, ist das das „Linienelement" (1. Ordnung).

Als „vereinigte Lage" zweier konsekutiver Elemente (z, x_i, p_i) und $(z+dz, x_i+dx_i, p_i+dp_i)$ bezeichnet man die durch Gleichung (2) dargestellte Beziehung; geometrisch bedeutet das, daß der R_n des einen Elementes durch den Punkt des anderen hindurchgeht. „Verein" heißt jede Mannigfaltigkeit von Elementen, deren jedes sich mit den unendlich benachbarten in vereinigter Lage befindet. Bei Berührungstransformationen ist die vereinigte Lage konsekutiver Elemente eine charakteristische invariante Beziehung[95]); jeder Verein von Elementen geht in einen ebensolchen über.

---

kam *Lie*, indem er *Plückers* Ideen über Transformationen mit Wechsel des Raumelementes weiter verfolgte, und eine allgemeine „aequatio directrix" $F(x, y, z, X, Y, Z) = 0$, oder auch zwei oder drei solche Gleichungen zugrunde legte.

94) Th. d. Transfgr. 2, p. 114 (für $n = 2$, p. 6); Geom. d. BT 1, p. 114 (für $n = 2$, p. 43).

95) Die Punkttransformationen haben dagegen (für $n > 2$) die charakteristische Eigenschaft, vereinigt gelegene konsekutive Linienelemente in ebensolche zu verwandeln. Die kollinearen und dualistischen Umformungen bewahren endlich die vereinigte Lage konsekutiver „Konnexelemente" (*Klein*, Erlanger Programm, § 9).

Im R_3 erscheinen Punkt, Kurve und Fläche alle als ∞^2-Vereine von Flächenelementen; eine Fläche wird nämlich von ∞^2 Flächenelementen bedeckt, eine Kurve von ebensovielen berührt, durch einen Punkt gehen ∞^2 Elemente hindurch, so daß je zwei konsekutive stets vereinigt liegen. Den ∞^3 Punkten werden durch eine Berührungstransformation entweder nochmals Punkte, oder aber Kurven, oder endlich Flächen zugeordnet. Im ersten Falle erscheint die Transformation als eine „erweiterte Punkttransformation", während umgekehrt jede Punkttransformation durch Betrachtung der Differentialquotienten der Variabeln (so weit diese überhaupt existieren) sich zu einer Berührungstransformation erweitern läßt, jede Gruppe von Punkttransformationen also zu einer Gruppe von Berührungstransformationen.

Es gibt aber auch Gruppen von Berührungstransformationen, welche sich nicht durch eine weitere Berührungstransformation auf eine Gruppe von Punkttransformationen desselben Raumes zurückführen lassen. *S. Lie* bezeichnet sie als „irreduzible" Gruppen und auf diese konzentriert sich (auch wegen des Nr. **27** angeführten Ableitungsprinzips) das Hauptinteresse[96]).

In der Ebene ist jede endliche kontinuierliche irreduzible Gruppe von Berührungstransformationen entweder 6- oder 7- oder 10-gliedrig, und dementsprechend auf einen von drei bestimmten Typen zurückführbar, von denen die beiden ersten Untergruppen des letzten sind. Die typische 10-gliedrige Gruppe ist die größte Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene, welche die Differentialgleichung 3. Ordnung $\frac{d^3 z}{dx^3} = 0$, und folglich die ∞^3-Schar der Parabeln mit parallelen Achsen $z = ax^2 + bx + c$ invariant läßt; durch eine weitere Berührungstransformation ist sie auch mit der Gruppe ähnlich, welche aus den ∞^{10} Berührungstransformationen besteht, die Kreise in Kreise überführen, und als Analogon im R_3 die Gruppe der *Lie*schen Kugelgeometrie (Nr. **13**) hat.

In der Ebene ergeben sich also keine wesentlich neuen Gruppen. Für allgemeines n werden bei *Lie*[96]) nur drei typische irreduzible Gruppen des R_{n+1} besprochen, welche für $n = 1$ die obigen Gruppen der Ebene liefern; als Gruppen von Punkttransformationen des R_{2n+1} aufgefaßt, haben diese Gruppen und die zu ihnen ähnlichen die charakteristische Eigenschaft, die ∞^{2n-1} Linienelemente durch einen festgehaltenen Punkt allgemeiner Lage, welche die invariante *Pfaff*sche Gleichung (2) erfüllen, in der noch möglichen allgemeinsten Weise, d. h. $n(2n+1)$-gliedrig, zu transformieren. Bereits im R_3

96) Th. d. Transfgr. 2, Abt. 4 und 5.

sind aber weit mehr Typen irreduzibler Gruppen von Berührungstransformationen enthalten; einzelne von diesen haben *G. Scheffers*, *F. Engel* und *C. W. Oseen* bestimmt[97]). Betreffend unendliche Gruppen, s. Nr. 24, f).

16. Studys Geometrie der Elemente 2. Ordnung in der Ebene. Das „Linienelement“ der Ebene, dessen Betrachtung bei Berührungstransformationen grundlegend ist, kann als Inbegriff aller analytischen Kurven aufgefaßt werden, die in einem bestimmten Punkte (regulären Verhaltens) eine feste Gerade berühren.

Als „eigentliches Element 2. Ordnung“ erklärt *E. Study*[98]) den Inbegriff aller analytischen Kurven, die in einem festen Punkte mit einer dort sich regulär verhaltenden unter ihnen dreipunktige Berührung, mit der Tangente dieser Kurve aber nur zweipunktige Berührung haben. Zur analytischen Darstellung dieser Elemente benutzt er ein System von 6 homogenen Größen:

$$X_1 : X_2 : X_3 : U_1 : U_2 : U_3,$$

von welchen die X_i Koordinaten des festen Punktes, die U_i der festen Tangente sind, so daß die Gleichung:

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$$

identisch befriedigt wird; und über die in den X_i und U_i enthaltenen Proportionalfaktoren trifft er eine solche Festsetzung[99]), daß für ein vorgelegtes Element durch Verfügung über einen Faktor der andere bis auf eine dritte Einheitswurzel bestimmt wird. Trennt man die drei Bestimmungsweisen dieser Einheitswurzel voneinander, so ergibt sich die analytische Darstellung eines „orientierten“ Elementes 2. Ordnung. Von den drei Orientierungen eines reellen Elementes ist eine und auch nur eine reell.

Beide ∞^4-Mannigfaltigkeiten der „nicht-orientierten“ und der „orientierten“ eigentlichen Elemente 2. Ordnung werden durch die ∞^2 Punkte $(X_1 X_2 X_3 000)$ und die ∞^2 Geraden $(000 U_1 U_2 U_3)$ als „uneigentliche Elemente“ zu abgeschlossenen Kontinuis ergänzt (§ 1, 5);

97) *G. Scheffers*, Acta math. 14 (1891), p. 111; *F. Engel*, Paris C. R. 116 (1893), p. 786; Th. d. Transfgr. 3, p. 763; *C. W. Oseen*, Stockholm, Oefversigt af Forh. 58 (1901), p. 307; Über die endlichen, kontinuierlichen, irreduziblen Berührungstransformationsgruppen im Raume, Diss. Lund, 1901.

98) Die Elemente 2. Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie, Leipzig Ber. 53 (1901), p. 338.

99) $U_i = J^{-\frac{1}{3}}(CX)C_i$, wo $(CZ)^2 = 0$ die Punktgleichung eines das Linienelement enthaltenden Kegelschnittes, und J dessen Invariante bedeutet.

eine solche Ergänzung kann aber auch auf andere Arten geschehen (§ 7).

Auch für Elemente 2. Ordnung kann man einen Begriff der „vereinigten Lage" aufstellen, und „Verein" wird jede analytische Mannigfaltigkeit des betrachteten Kontinuums genannt, in der je zwei konsekutive Elemente vereinigt liegen[100]). Im obigen abgeschlossenen Kontinuum gibt es zwei Arten von ∞^1-Vereinen: die Gesamtheit der Elemente 2. Ordnung einer Kurve, und die der Elemente, welche zu demselben Linienelement 1. Ordnung gehören („triviale" Vereine).

Der Behandlung der ∞^4-Mannigfaltigkeit der nicht-orientierten Elemente 2. Ordnung legt *Study* eine 9-gliedrige Gruppe g_9 zugrunde. Diese g_9 entsteht durch Zusammensetzung der allgemeinen projektiven Gruppe g_8 (Nr. 5), die er durch lineare Substitutionen von der Determinante $+1$ darstellt, mit der eingliedrigen Gruppe g_1:

$$\overline{X}_i = \sqrt[3]{\sigma} \cdot X_i \qquad \overline{U}_i = \sqrt[3]{\tau} \cdot U_i;$$

in dieser letzten Gruppe bedeutet $\frac{\sigma}{\tau}$ den Parameter, der also für jede Operation als konstant zu betrachten ist. Die Gruppen g_8 und g_1 sind invariante Untergruppen von g_9; g_1 läßt jeden trivialen Verein in Ruhe.

Zwei eigentliche (nicht orientierte) Elemente (X, U) und (Y, V) haben in bezug auf g_9 die absolute Invariante $\frac{(VX)^3}{(UY)^3}$. Die Bedingung der Kegelschnittlage, d. h. daß zwei zu verschiedenen Punkten und Geraden gehörige Elemente durch einen Kegelschnitt verbunden werden können, ist, daß diese Invariante den Wert $+1$ annimmt.

Der Behandlung der Mannigfaltigkeit der orientierten Elemente 2. Ordnung kann man eine Gruppe γ_9 mit invarianten Untergruppen γ_8 und γ_1 zugrunde legen, welche auf g_9, g_8, g_1 (3, 1)-eindeutig isomorph bezogen sind.

Study bestimmt alle Punktmannigfaltigkeiten M_4 irgend eines R_n, denen folgende Eigenschaften zukommen: 1) die projektiven Koordinaten eines Punktes allgemeiner Lage von M_4 sollen rationale ganze homogene Funktionen der Koordinaten $X_i : U_i$ eines eigentlichen orientierten Elementes 2. Ordnung sein; 2) durch die hiermit gegebene Abbildung soll die Gruppe γ_8 (eventuell auch γ_9) in eine gleichzusammengesetzte projektive Gruppe auf M_4 übergehen. Die Umkehrung dieser Abbildung ist nicht notwendig eindeutig; sie kann es

---

100) Erweiterung auf Linienelemente höherer Ordnung, sowie auch auf Elemente 2. Ordnung im R_3, bei *F. Engel*, Leipzig Ber. 54 (1902), p. 17. S. auch ebenda 45 (1893), p. 468.

aber sein; und es kann sich auch der Fall ergeben, daß die Punkte allgemeiner Lage der M_4 sich den *nicht*-orientierten eigentlichen Elementen 2. Ordnung eindeutig-umkehrbar zuordnen lassen.

Als einfachste Abbildung ergibt sich folgende (§ 10): *Das durch die* ∞^2 *Punkte und die* ∞^2 *Geraden abgeschlossene Kontinuum der orientierten Elemente 2. Ordnung läßt sich ausnahmslos eindeutig-umkehrbar auf eine* M_4^2 *von nicht verschwindender Diskriminante des* R_5, *insbesondere auf das Plückersche Linienkontinuum des* R_3 (Nr. 10) *abbilden.* Den Punkten und Geraden der Ebene entsprechen auf M_4^2 die Punkte zweier schiefen R_2, im Linienkontinuum also die Geraden eines Bündels und die einer Ebene; den ∞^3 trivialen Vereinen die geraden Linien der M_4^2, welche die beiden R_2 treffen, oder also die Linienbüschel, welche mit obigem Bündel und obiger Ebene je eine Gerade gemein haben. Die Gruppen γ_9, γ_8, γ_1 *werden durch diese Abbildung* (bei geeigneter Verfügung über die willkürlichen Konstanten) *in Gruppen* Γ_9, Γ_8, Γ_1 *affiner Transformationen* (Nr. 7) *des Linienraumes übergeführt, nämlich in die allgemeine lineare homogene Gruppe, die spezielle lineare homogene Gruppe und die zu* Γ_9 *gehörige eingliedrige Gruppe von perspektiven Ähnlichkeitstransformationen.* Darin liegt die Möglichkeit, die Geometrie der allgemeinen linearen homogenen Gruppe auf eine neue Art in die Ebene zu übertragen.

Das Problem der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei Variabeln ist (bei geeigneter Festsetzung über die auftretenden Begriffe, auf die wir nicht weiter eingehen) damit gleichbedeutend, daß man aus einem „Komplex" von Elementen 2. Ordnung auf alle möglichen Arten Vereine herausgreift. Vermöge obiger Abbildung auf den Linienraum kommt das darauf hinaus, aus einem Linienkomplex auf alle möglichen Arten Regelflächen von bestimmter Beschaffenheit, sog. „integrierende Regelflächen" zu entnehmen.

17. Studys Gruppen der dualen und der radialen Projektivitäten. Zu den *Study*schen Gruppen der dualen Projektivitäten und der radialen Projektivitäten gelangt man auf verschiedene Weisen.

a) *F. Klein* gab 1873[101]) folgenden Ansatz:

Die reellen und imaginären Geraden einer Ebene können wir durch die (reellen und imaginären) Punktepaare eines Kegelschnittes K dieser Ebene, in denen jene Geraden den Kegelschnitt schneiden, eineindeutig darstellen (s. auch Nr. 27). Versinnlichen wir uns die kom-

---

101) Eine Übertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie, Erlanger Ber. 1873, abgedruckt in Math. Ann. 22 (1883), p. 246.

plexen Elemente dieses Kegelschnittes durch eine reelle Kugel (III A B 4 a, *Fano*, Nr. **16**), und ersetzen wir die (reellen) Punktepaare dieser Kugel durch ihre Verbindungslinien, so werden die reellen und imaginären Geraden der vorgelegten Ebene auf diese Verbindungslinien, d. h. auf die Geraden eines hyperbolischen Raumes mit der obigen Kugel als Fundamentalfläche abgebildet. Diese Abbildung ist eine durchaus ein-eindeutige, sobald man das Kontinuum dieser letzteren Geraden durch Hinzufügung der Punkte der absoluten Fläche abschließt. Gerade, die in bezug auf den Kegelschnitt K konjugiert sind (ohne ihn zu berühren), werden als Gerade abgebildet, welche im Sinne der auf die Kugel als Fundamentalfläche zu gründenden hyperbolischen Geometrie einander rechtwinklig schneiden. Den reellen und imaginären Kollineationen der Ebene, welche den Kegelschnitt K in sich überführen, entsprechen die Bewegungen dieses hyperbolischen Raumes. Die Geraden der Ebene kann man bei diesem Abbildungsprinzip auch durch die Punkte, nämlich jede Gerade durch ihren Pol in bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt, ersetzen.

Hier setzt nun *Study* ein, indem er diese beiden Abbildungen nebeneinander betrachtet. Einmal ordnet er den (K nicht berührenden) komplexen Geraden der Ebene Linienstücke im Inneren des hyperbolischen Raumes zu, die er *Strahlen*, und zwar „eigentliche" Strahlen nennt. Zweitens aber ordnet er dem Pol einer jeden solchen Geraden in bezug auf K nochmals denselben Strahl zu. Die Mannigfaltigkeit dieser Strahlen wird dadurch zweimal gesetzt, oder mit zwei „Schichten" überdeckt; Strahlen, die übereinander liegen, entsprechen Polare und Pol in bezug auf K; ein Punkt und eine Gerade der Ausgangsebene, welche *vereinigt liegen*, werden durch Strahlen verschiedener Schichten dargestellt, die im Sinne der hyperbolischen Geometrie einander rechtwinklig schneiden. In jeder einzelnen Schicht kann die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Strahlen durch die Punkte der Fundamentalfläche zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt werden; diese „uneigentlichen" Strahlen, oder *Punktstrahlen*, entsprechen dann in der ersten Schicht den Tangenten, in der zweiten den Punkten des Kegelschnittes K; und der Begriff des rechtwinkligen Schneidens kann so erweitert werden, daß ausnahmslos Strahlen verschiedener Schichten, die einander rechtwinklig schneiden, Gerade und Punkt in der Ebene entsprechen, die vereinigt liegen.

Unterwirft man nun die Punkte und Geraden der Ebene einer komplexen Kollineation, so wird die Beziehung zwischen Polare und Pol in der Regel zerstört, vereinigte Lage aber ist eine invariante Eigenschaft. Dementsprechend erhält man im doppelt überdeckten

Strahlenraume eine Vertauschung der Strahlen, bei welcher die beiden Schichten einzeln in Ruhe bleiben, und rechtwinklige Strahlen *verschiedener* Schichten in ebensolche übergehen, aber nicht notwendig Punktstrahlen in ebensolche, und auch nicht übereinander liegende Strahlen in ebensolche.

Die so erhaltenen Strahlentransformationen heißen *duale Kollineationen im hyperbolischen Raume* (auch im elliptischen Raume gibt es ähnlich zu erklärende Transformationen). Sie bilden eine reelle 16-gliedrige kontinuierliche Gruppe, welche zur Gruppe aller komplexen Kollineationen in der Ebene isomorph ist und die 6-gliedrige Gruppe der hyperbolischen Bewegungen umfaßt[102]. Nach Hinzunahme der Umlegungen im hyperbolischen Raume umfaßt diese Gruppe *alle* Strahlentransformationen, die aus einem Normalennetz (d. h. aus den ∞^2 irgend einen Strahl zweiter Schicht senkrecht schneidenden Strahlen erster Schicht, oder umgekehrt) wieder ein solches hervorgehen lassen[103].

Lassen wir nun den Radius der benutzten Kugel ins Unendliche wachsen, und führen gleichzeitig den Übergang von der hyperbolischen zur Euklidischen Geometrie aus, so ergibt sich aus der vorhergehenden Gruppe die weiterhin auf andere Art erklärte *Gruppe der dualen Kollineationen im Euklidischen Raume.* Nach wie vor werden zwei Schichten von Strahlen betrachtet, und innerhalb beider die Strahlen ausnahmslos ein-eindeutig vertauscht (wofern man für die jetzigen uneigentlichen Elemente eine geeignete Festsetzung trifft); aber rechtwinkliges Schneiden (nunmehr in Euklidischem Sinne) von Strahlen verschiedener Schichten ist jetzt eine invariante Eigenschaft gegenüber einer umfassenderen Gruppe (da die Ähnlichkeitstransformationen neu hinzugetreten sind), welche 17-gliedrig ist, und *Gruppe der radialen Projektivitäten* heißt[104].

Das Bild der radial-projektiven Geometrie im Euklidischen Raume, das man sich auf diesem Wege machen kann, ist aber weder hin-

---

102) Diese Gruppe kann auch wieder in ein passend erklärtes Kontinuum „komplexer Strahlen" hinein fortgesetzt werden.

103) *E. Study,* Festschrift zu *H. Limprichts* Jubelfeier: „Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie" (Greifswald 1900), mit unbedeutenden Änderungen und einigen Zusätzen abgedruckt in Deutsche Math.-Ver. Jahresb. 11 (1902), p. 313. S. ferner: *H. Beck,* Die Strahlenketten im hyperbolischen Raume, Diss. Bonn (Hannover 1905). Für die dual-projektive Geometrie im elliptischen Raume s. *J. Coolidge,* Die dual-projektive Geometrie im elliptischen und sphärischen Raume, Diss. Bonn (Greifswald 1904). Vgl. auch: *E. Davis,* Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie, Diss. Greifswald 1904.

104) Geometrie der Dynamen (Leipzig 1903), p. 440—41.

reichend scharf umschrieben, noch vollständig; eine direkte Begründung ist vorzuziehen.

b) Wir gehen jetzt[105]) von einem eigentlichen Liniengebüsch (oder speziellen linearen Komplexe, s. Nr. **10**) aus, mit den (reellen, aus orthogonalen Punktkoordinaten entstandenen) *Plücker*schen Koordinaten $x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{23}, x_{31}, x_{12}$ (wobei $x_{01}x_{23} + x_{02}x_{31} + x_{03}x_{12} = 0$, aber nicht zugleich $x_{01} = x_{02} = x_{03} = 0$ ist). Setzen wir diese Koordinaten zu den drei „dualen" Verbindungen:

$$X_1 = x_{01} + x_{23}\varepsilon; \quad X_2 = x_{02} + x_{31}\varepsilon; \quad X_3 = x_{03} + x_{12}\varepsilon$$

zusammen, in denen ε eine die Gleichung $\varepsilon^2 = 0$ erfüllende Einheit bedeutet (I A 4, Komplexe Zahlen, *Study*, Nr. **9**, (32)), so gehen bei gleichzeitiger Multiplikation von X_1, X_2, X_3 mit einer weiteren dualen Grösse $\sigma + \tau\varepsilon$ ($\sigma \neq 0$) die x_{ik} in

$$\sigma x_{01}, \sigma x_{02}, \sigma x_{03}, \sigma x_{23} + \tau x_{01}, \sigma x_{31} + \tau x_{02}, \sigma x_{12} + \tau x_{03}$$

über, d. h. in die Koordinaten eines der ∞^1 Gewinde, welche die obige Gerade (x) zur Hauptachse haben. Durch die Verhältnisgrößen $X_1 : X_2 : X_3$ (in dem Sinne, daß eine gleichzeitige Multiplikation derselben mit $\sigma + \tau\varepsilon$ ($\sigma \neq 0$) gestattet wird) wird also diese Hauptachse eindeutig bestimmt und umgekehrt; *wir dürfen demnach die drei reellen homogenen dualen Größen* X_1, X_2, X_3 *als Koordinaten des so festgesetzten eigentlichen „Strahles" auffassen.*

Wir denken uns weiter die Mannigfaltigkeit aller reellen Strahlen des Euklidischen R_3 doppelt überdeckt, unterwerfen die Strahlen der ersten Schicht den linearen Transformationen mit dualen Koeffizienten $X_i' = \sum_k a_{ik} X_k$, dabei noch vorausgesetzt, daß der skalare Teil der Determinante $|a_{ik}| \equiv \Delta$ von Null verschieden sei; und die Strahlen der zweiten Schicht den kontragredienten Transformationen

$$U_i' = \sum_k \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} U_k.$$

Das gibt im Strahlenraume, wegen der Homogenität der a_{ik}, eine reelle G_{16}: die *Gruppe der dualen Kollineationen*[106]).

---

105) Geometrie der Dynamen, p. 199 ff., p. 231 ff.

106) Diese Gruppe ist ein Grenzfall (s. oben) der Gruppe der reellen und imaginären Kollineationen der Ebene mit den sämtlichen komplexen Punkten und Geraden als Elementen. — In der dual-projektiven Geometrie des hyperbolischen Raumes hat man es an Stelle der obigen *Study*schen „dualen Größen" mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen zu tun. Im elliptischen Falle dagegen muß ein anderes System komplexer Größen herangezogen werden (vgl. *J. Coolidge*, a. a. O. § 2).

Durch Zusammensetzung dieser Operationen mit der involutorischen Transformation, die jedem Strahle erster Schicht den darüber liegenden Strahl zweiter Schicht zuordnet, ergeben sich die *dualen Korrelationen;* und weiter noch die *dualen Antikollineationen* und *Antikorrelationen* durch Änderung des Vorzeichens des vektoriellen Koeffizienten in den X' und U'.[107])

Verlangt man, daß das Übereinanderliegen von Strahlen verschiedener Schichten nicht geändert wird, so reduzieren sich die dualen Kollineationen auf die ∞^6 Bewegungen, die Antikollineationen auf die Umlegungen.

Durch Zusammensetzung dieser sämtlichen Strahlentransformationen mit den Ähnlichkeitstransformationen entsteht eine Gruppe, deren allgemeine Transformation von 17 Parametern abhängt und als „*Gruppe der radialen Projektivitäten*" bezeichnet wird. Ihre Operationen zerfallen in *radiale Kollineationen* und *radiale Korrelationen,* je nachdem die beiden Strahlenschichten einzeln erhalten bleiben oder vertauscht werden; erstere bilden eine kontinuierliche Gruppe G_{17}.

Soll das Übereinanderliegen der Strahlen verschiedener Schichten erhalten bleiben, so reduziert sich diese G_{17} auf die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen.

Die radialen Projektivitäten umfassen alle Transformationen von Strahlen, die aus dem Normalennetze eines eigentlichen Strahles wieder ein solches hervorgehen lassen. Aus der Achse des ersten geht im allgemeinen *nicht* die Achse des zweiten hervor; aber diese Achsen unterliegen einer zweiten radialen Kollineation, die zu der ersten *kontragredient* heißt.

Vier Strahlen eines Normalennetzes, von denen keine zwei parallel sind, haben, in bestimmter Reihenfolge, ein „duales Doppelverhältnis", welches eine absolute Invariante der G_{16} der dualen Kollineationen ist, aber gegenüber beliebigen radialen Projektivitäten *nicht* invariant ist[108]).

Die G_{16} der dualen Kollineationen ist die umfassendste invariante kontinuierliche Untergruppe der G_{17}. Außerdem enthält die G_{17} noch zwei weitere invariante kontinuierliche Untergruppen: die eine, mit

---

107) Diese beiden Ausdrücke sind Untersuchungen von *C. Segre* (III AB 4a, *Fano*, Nr 18) über Transformationen komplexer Veränderlicher entlehnt. S. auch oben, Nr. 5, insb. Anm. [16]), und Nr. 30, a).

108) Eine duale Kollineation läßt sich durch vier Paare entsprechender Strahlen in allgemeiner Lage eindeutig bestimmen; und zu jedem fünften Strahle kann man den zugeordneten finden durch wiederholte Konstruktion der gemeinsamen Normale zu eigentlichen nicht parallelen Strahlen derselben Schicht.

neun Parametern, besteht aus allen Transformationen von G_{17}, welche die uneigentlichen Strahlen einzeln in Ruhe lassen; die zweite, mit acht Parametern, bildet den Durchschnitt dieser G_9 mit G_{16}; ihre Transformationen heißen *duale Schiebungen*, und sind zu je zweien vertauschbar.

c) Die Gruppe der radialen Kollineationen entsteht endlich auch aus der *Plücker*schen Liniengeometrie (Nr. **10**), wenn man in dieser das von fünf Konstanten abhängige Gewinde (d. h. den linearen Linienkomplex) als Raumelement betrachtet und folgendermaßen verfährt[109]: Unterwirft man die als projektives Punktkontinuum eines R_5 aufgefaßte Mannigfaltigkeit der Gewinde solchen linearen Transformationen der sechs homogenen Gewindekoordinaten, welche koachsiale Gewinde in ebensolche überführen, so reduziert sich die Gruppe Γ_{35} jener sämtlichen linearen Transformationen auf eine Γ_{18}; die Achsen dieser Gewinde werden dann radial-kollinear unter einander vertauscht, und zwar in allgemeinster Weise, d. h. durch die ganze G_{17}.[110])

18. Die radial-projektive Geometrie. Die *Study*sche *„Geometrie der radialen Projektivitäten“* hat die Gesamtgruppe der radialen Kollineationen und Korrelationen zur Fundamentalgruppe, und hat als Objekt solche Eigenschaften der Strahlengebilde, die bei den genannten Operationen ungeändert bleiben.

Radiale Projektivitäten führen eigentliche parallele Strahlen derselben Schicht in ebensolche über. Die Parallelenbüschel bilden folglich eine zweite Art (von vier Konstanten abhängiger) Figuren, die von den radialen Projektivitäten durch eine zu G_{17} holoedrisch-isomorphe Gruppe vertauscht werden; sie können ebenso wie die Strahlen als Grundelemente für die *Study*sche Geometrie gewählt werden, und lassen sich auch einfach durch Koordinaten darstellen. — Ordnet man einem jeden Parallelenbüschel das andere, dessen Strahlen die seinigen orthogonal durchsetzen, als „reziproke“ Figur zu, so ergibt sich eine Reziprozitätsbeziehung, die sich durch die ganze radial-projektive Geometrie hindurchzieht.

Im übrigen will folgendes überlegt sein:

Bei der projektiven Liniengeometrie (Nr. **5**, **10**) wird die Mannigfaltigkeit der eigentlichen reellen Geraden erst durch Hinzufügung der „unendlich fernen Geraden“ in ein abgeschlossenes Kontinuum

---

109) Geometrie der Dynamen, p. 237.

110) Um eine vollständige Einsicht in diese Beziehung zu gewinnen, muß man die Mannigfaltigkeit aller Gewinde doppelt überdecken, und in den beiden Schichten von Gewinden kontragredient-linear operieren.

verwandelt. Erst dadurch wird einer großen Anzahl von Sätzen der projektiven Geometrie, die nach der elementaren Auffassung Ausnahmen unterliegen, eine allgemeine Gültigkeit verliehen; insbesondere können erst in diesem abgeschlossenen Linienkontinuum die projektiven Umformungen als *überall* wohldefinierte eindeutige und stetige Transformationen erklärt werden. Da wir es hier mit einer von der projektiven durchaus verschiedenen Gruppe (oder Geometrie) zu tun haben, so kann es nicht verwundern, daß dieselben Eigenschaften in bezug auf die vorliegenden Transformationen sich erst dadurch erreichen lassen, daß man die Mannigfaltigkeit der reellen eigentlichen Strahlen in anderer Weise zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt [111]) [112]).

Diese Ergänzung läßt sich, wie *Study* gezeigt hat, auf zwei verschiedene Weisen ausführen, indem man sich beide Male einen reellen eigentlichen Strahl durch das zugehörige Normalennetz fixiert denkt:

a) Einmal kann man dieses Normalennetz als aus ∞^1 eigentlichen Strahlenbüscheln bestehend ansehen (deren Mittelpunkte auf dem betreffenden Strahle liegen), und dann bekommt man als Grenzfall, wenn die sämtlichen Mittelpunkte unendlich weit in derselben Richtung fortrücken, ein *Bündel* paralleler Geraden. Da dieses Bündel wieder ein geometrisches Element definiert, nämlich seinen (unendlich fernen) Scheitelpunkt, und zugleich durch diesen eindeutig bestimmt wird, so kann dieser Scheitel, nach *Study* „Punktstrahl" genannt, als Grenzgebilde eines reellen eigentlichen Strahles aufgefaßt werden. Durch die ∞^2 Punktstrahlen wird dann die Strahlenmannigfaltigkeit in einer ersten Weise abgeschlossen [113]).

---

111) So empfiehlt es sich z. B., die Ebene in bezug auf die Gruppe der Kreisverwandtschaften (Nr. 11) durch einen einzigen unendlich fernen Punkt abzuschließen.

112) Eben darum bedient sich *Study* systematisch des Wortes „Strahl" an Stelle von „gerade Linie". „Eigentlicher reeller Strahl" bedeutet genau dasselbe wie „eigentliche (d. i. im Endlichen verlaufende) reelle gerade Linie"; aber die beiden Begriffe werden, was das Unendliche angeht, in verschiedener Weise verallgemeinert. Wollte man hier an den üblichen (projektiven) Verabredungen über unendlich ferne Gerade festhalten, so würde bei stetiger Änderung der obigen dualen Strahlenkoordinaten der entsprechende Strahl sich nicht immer stetig ändern.

113) Als Normalennetz eines Punktstrahles ist eine reduzibele Figur zu betrachten, deren Bestandteile erstens die Gesamtheit aller eigentlichen Strahlen und Punktstrahlen eines Parallelenbündels, zweitens das Feld aller Punktstrahlen sind. Dementsprechend muß im Falle b) in das Normalennetz eines Grenzstrahles ein ∞^2-System von Grenzstrahlen als Bestandteil mitaufgenommen werden.

b) Oder man kann in dem Normalennetz eines eigentlichen Strahles die ∞^1 Parallelenbüschel betrachten, deren Ebenen ebenfalls ein Büschel mit jenem Strahl als Achse bilden, und dieses Ebenenbüschel im Grenzfall in ein Büschel paralleler Ebenen übergehen lassen. Als Grenzgebilde des Normalennetzes bekommt man wiederum ein Bündel paralleler Strahlen, die aber auf ∞^1 Büschel in bestimmter Weise verteilt sind, ein „gestreiftes Parallelenbündel“. Durch die ∞^3 überhaupt möglichen derartigen Gebilde, die *Study* als „Grenzstrahlen“ bezeichnet, wird der Strahlenraum ebenfalls zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt.

Für diese beiden Kontinua, nämlich:

a) die Gesamtheit der ∞^4 Normalennetze und der ∞^2 Parallelenbündel, d. h. der ∞^4 eigentlichen Strahlen und der ∞^2 Punktstrahlen („erstes natürliches Strahlenkontinuum“);

b) die Gesamtheit der ∞^4 Normalennetze und der ∞^3 gestreiften Parallelenbündel, d. h. der ∞^4 eigentlichen Strahlen und der ∞^3 Grenzstrahlen („zweites natürliches Strahlenkontinuum“);

lassen sich geeignete Koordinatensysteme einführen[114]), so daß stetige Ortsänderungen in der Strahlenmannigfaltigkeit durch stetige Änderungen der Koordinaten dargestellt werden.

In jedem dieser beiden Strahlenkontinua sind die radialen Projektivitäten überall wohldefiniert, eindeutig und stetig. Wir haben somit zwei Arten radial-projektiver Geometrie, die aber, soweit nur eigentliche Strahlen in Frage kommen, identisch sind[115])[116]).

Nun kann man die Definition irgend eines dieser abgeschlossenen vierfach ausgedehnten reellen Strahlenkontinua dadurch erweitern, daß man *imaginäre* Strahlen zuläßt, d. h. den obigen x_{ik} und den sämtlichen daraus abgeleiteten Größen beliebige komplexe Werte erteilt. Die (bei reellen eigentlichen Elementen vollkommene) Identität der beiden Begriffe „Strahl“ und „gerade Linie“ (vgl. Anm. [112])) findet dann nur in geringerem Umfange statt; es gibt imaginäre eigentliche Strahlen, die nicht zugleich als gerade Linien angesehen werden können, und

114) Die Strahlenkoordinaten „zweiter“ und „dritter Art“ (Geometrie der Dynamen, p. 259, 270).

115) Es wird auch nachgewiesen, daß weitere in ähnlichem Sinne natürliche Strahlenkontinua nicht existieren, daß also die beiden obigen Kontinua zusammen durch die Gruppe G_{17} der eigentlichen Strahlen bereits charakterisiert sind.

116) Die Mannigfaltigkeit der ∞^4 „eigentlichen“ Parallelenbüschel läßt sich ebenfalls durch Neuschöpfung von „uneigentlichen“ Büscheln auf *vier* verschiedene Weisen zu abgeschlossenen Kontinuis erweitern, in denen die Operationen der Fundamentalgruppe überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind (s. Anm. [121])).

ebenso Strahlen, deren Koordinaten x_{ik} zwar *Plücker*sche Koordinaten gerader Linien, aber nicht solche einer bestimmten geraden Linie (vielmehr eines ganzen Büschels von Minimalgeraden) liefern. Dieser Unterschied tritt in weiteren Untersuchungen noch mehr in den Vordergrund, und es zeigt sich, daß die Vertauschung der beiden Worte „Strahl" und „gerade Linie" allgemein zu reden unzulässig ist; z. B. in der Behauptung: „Jedes eigentliche reelle oder imaginäre Gewinde hat einen einzigen eigentlichen Strahl als Hauptachse; und umgekehrt gehört zu jedem eigentlichen reellen oder imaginären Strahle ein bestimmtes Büschel koachsialer Gewinde." Der „planare Strahlenkomplex" und das *Plücker*sche Liniengebüsch mit unendlich ferner Achse fallen in ihren reellen eigentlichen Elementen zusammen, sind aber, als Ganzes betrachtet, mit verschiedenen Eigenschaften ausgestattet und nicht vollkommen-eindeutig aufeinander abbildbar.

Die Strahlenörter der verschiedenen Dimensionen (3, 2, 1) bezeichnet *Study* als *Strahlenkomplexe, Kongruenzen, Bänder.* Ein algebraischer Strahlenkomplex im ersten natürlichen Strahlenkontinuum kann durch Nullsetzen *einer einzigen* rationalen homogenen Funktion der Strahlenkoordinaten zweiter Art dargestellt werden; ihm kommen zwei charakteristische Zahlen zu, die zusammen in der radial-projektiven Geometrie eine ähnliche Bedeutung haben, wie der Grad eines Linienkomplexes in der *Plücker*schen Liniengeometrie. Besonders eingehend untersucht *Study* die linearen Systeme von Gewinden (die durch lineare Gleichungen zwischen den Gewindekoordinaten x_{ik} dargestellt werden) und die Örter ihrer Hauptachsen, die er, zugleich mit anderen Gebilden, die entweder Grenzlagen solcher Örter sind, oder Bestandteile von solchen, sämtlich als *Ketten* bezeichnet. Diese linearen Systeme werden zunächst nach ihren in bezug auf G_{17} oder G_{16} invarianten Eigenschaften klassifiziert; dann aber auch in bezug auf die Gruppe der Euklidischen Bewegungen, d. h. nach ihren metrischen Eigenschaften [117]).

19. Fortsetzung. Projektive Abbildung der radial-projektiven Geometrie. *Study* fragt auch nach allen M_4 eines beliebigen Raumes R_n, denen folgende beide Eigenschaften zukommen:

1) die M_4 soll auf das Strahlenkontinuum des R_3 rational abbildbar sein;

2) durch diese Abbildung soll die Gruppe der radialen Projektivitäten in eine zu ihr holoedrisch-isomorphe projektive Gruppe übergehen.

117) Geometrie der Dynamen, §§ 29, 36.

Diese M_4 sollen also für die radial-projektive Geometrie eine ähnliche Bedeutung haben, wie die M_4^2 von nicht verschwindender Diskriminante im R_5 für die projektive Liniengeometrie (Nr. **10**).

Die M_4 der verlangten Art sind von zweierlei Beschaffenheit; die einen sind eindeutig und stetig auf das erste natürliche Strahlenkontinuum, die anderen auf das zweite abbildbar.

Die einfachste M_4 der ersten Art läßt sich in folgender Weise konstruieren: Man nehme in einem R_8 einen R_2 und einen R_5, die keinen Punkt gemein haben, und in letzterem eine nicht geradlinige Normalfläche 4. Ordnung[118]). Diese beziehe man korrelativ auf R_2, wodurch jedem ihrer Punkte alle Punkte einer geraden Linie in R_2 und jedem Punkte von R_2 ein Kegelschnitt auf der Normalfläche zugeordnet wird. Verbindet man die sämtlichen Paare der solcherweise zugeordneten Punkte durch (∞^3) gerade Linien, so entsteht die verlangte M_4, welche von der 6. Ordnung und der 3. Klasse ist. Die Punkte des R_2 sind Bilder der ∞^2 Punktstrahlen[119]).

Die Durchschnitte dieser M_4^6 mit ebenen Räumen R_7 sind Bilder der (von acht Konstanten abhängigen) quadratischen Strahlenkomplexe; diese Mannigfaltigkeit erweist sich deshalb als besonders nützlich beim Studium dieser Komplexe und ihrer Durchschnitte (darunter der ein- und mehrdimensionalen Ketten).

Hält man in R_8 einen geeigneten R_3 fest, so reduziert sich die projektive 17-gliedrige Gruppe der M_4^6 auf eine 7-gliedrige Gruppe, welche zur Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen holoedrisch-isomorph ist und die im R_3 gelegenen Figuren durch eine Gruppe vertauscht, die zur Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen projektiv-ähnlich ist. Die metrische Geometrie des R_3 steht also zur radialprojektiven in einem ähnlichen Verhältnisse, wie die projektive Geo-

---

118) S. Nr. **29**, sowie die dort Anm. [192]) bis [195]) angeführte Literatur.

119) Diese Erzeugung der M_4^6 hat eine systematische Bedeutung, da man die Normalfläche 4. Ordnung allgemeiner durch eine von der Ordnung n^2, im Raume von $\frac{n(n+3)}{2}$ Dimensionen enthaltene, ersetzen kann, d. h. durch jene Fläche, welche, wenn man die Koeffizienten der Gleichung einer algebraischen ebenen Kurve n^{ter} Klasse als homogene Punktkoordinaten deutet, die Bilder der Kurven enthält, die aus n-fach zählenden Punkten bestehen. Wir bekommen dadurch eine Reihe von algebraischen vierfach ausgedehnten Kontinuis mit entsprechenden $(n^2 + 2n + 9)$-gliedrigen Gruppen birationaler Transformationen. In dieser Reihe ist das erste *Study*sche natürliche Strahlenkontinuum das *zweite* Glied, das *erste* Glied ist aber das *Plücker*sche Linienkontinuum (da man für $n = 1$ eine M_4^2 des R_5 erhält); die entsprechenden Gruppen sind die Gruppe der radialen Projektivitäten und die affine Gruppe des R_3 (da ein R_2 in Ruhe bleibt, s. Nr. **7**).

metrie eines R_1 zu der eines R_2, insofern die erste so zu sagen als ein Ausschnitt aus der zweiten erscheint.

Faßt man als Raumelement das Parallelenbüschel auf, oder auch die „aplanare Kettenkongruenz" (d. h. den allgemeinsten Typus der zweidimensionalen Kette)[120]), so lassen sich ebenfalls projektive Bilder der isomorphen 17-gliedrigen Gruppen mit diesen neuen Raumelementen aufstellen. Im ersten Falle lassen sich die ∞^4 Parallelenbüschel eindeutig-umkehrbar und stetig den vom Scheitel verschiedenen Punkten eines Normalkegels Γ_4^6 des R_8 so zuordnen, daß die radialen Projektivitäten als projektive Umformungen abgebildet werden[121]). Im zweiten Falle lassen sich die ∞^8 aplanaren Kettenkongruenzen den im Endlichen gelegenen Punkten eines R_8 (und ihre „reziproken" den Punkten einer zweiten Schicht desselben R_8) derart zuordnen, daß aus der betreffenden 17-gliedrigen Gruppe ebenfalls eine projektive Gruppe hervorgeht. Aus diesen Abbildungen lassen sich weitere Analogien zwischen der Euklidischen Geometrie und der radial-projektiven ableiten.

Die einfachste M_4 der zweiten Art, d. h. die einfachste M_4, die eindeutig und stetig auf das zweite natürliche Strahlenkontinuum abbildbar ist, gehört einem R_{17} an[122]).

20. Studys projektive und pseudokonforme Geometrie der Somen. In der Kinematik kann als Repräsentant eines starren Körpers ein System von drei den Indizes 1, 2, 3 zugeordneten einander rechtwinklig schneidenden orientierten Geraden gedacht werden. Dieses Achsensystem läßt sich durch Bewegung in ∞^6 verschiedene Lagen bringen; jede einzelne von diesen Lagen nennt *E. Study* ein (eigentliches) *Soma*[123]). *Parallele* Somen heißen die, die durch eine Euklidische Schiebung ineinander übergehen; während *symmetrale* oder

120) Jede aplanare Kettenkongruenz geht aus einem Strahlenbündel mit eigentlichem Scheitel durch eine duale Kollineation (und zwar durch eine einzige duale Kollineation aus der Untergruppe G_8) hervor. Die gemeinsamen Normalen zwischen irgend zwei Strahlen der Kongruenz liegen in einer zweiten Kongruenz von derselben Art, und diese Eigenschaft ist für die aplanaren Kettenkongruenzen charakteristisch. Es gibt ∞^8 solche Paare von Kongruenzen.

121) Da die vom Scheitel verschiedenen Punkte des Normalkegels Γ_4^6 durch den Scheitel selbst zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt werden, so besteht die Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit der ∞^4 Parallelenbüschel durch Hinzufügung eines einzigen „uneigentlichen" oder „singulären" Büschels ebenfalls abzuschließen. Das hiermit erzeugte Kontinuum bezeichnet *Study* als das „erste natürliche Kontinuum von Parallelenbüscheln".

122) Geometrie der Dynamen, p. 272.

123) Geometrie der Dynamen, p. 556.

hemisymmetrale Somen durch eine Umwendung oder eine Umschraubung (d. h. eine Drehung oder eine Schraubung um eine eigentliche Gerade als Achse mit dem Drehungswinkel π) auseinander hervorgehen. Als Koordinaten eines Soma können die Parameter der (eindeutig bestimmten) Bewegung aufgefaßt werden, durch welche dieses Soma aus einem beliebigen ein für allemal festgesetzten „Protosoma" hervorgeht. Bei geeigneter Auswahl von *acht* homogenen durch eine quadratische Gleichung verbundenen Parametern (an Stelle von sechs durchaus unabhängigen)[124]) lassen sich diese Parameter (ebenso wie die Plückerschen Linienkoordinaten in Nr. **17**, b)) zu vier dualen Größen:

$$X_0 = x_0 + x_{123} \cdot \varepsilon,$$

$$X_1 = x_{01} + x_{23} \cdot \varepsilon; \quad X_2 = x_{02} + x_{31} \cdot \varepsilon; \quad X_3 = x_{03} + x_{12} \cdot \varepsilon, \quad (\varepsilon^2 = 0),$$

zusammenfassen, so daß die verschiedenen zu einem Soma gehörigen Systeme von X_i-Werten auseinander durch Multiplikation mit einer weiteren dualen Größe entstehen. *Als Koordinaten eines Soma können also die vier reellen homogenen dualen Größen X_i verwendet werden;* dabei lautet die quadratische Bedingungsgleichung zwischen den x folgendermaßen:

$$(1) \qquad x_0 x_{123} + x_{01} x_{23} + x_{02} x_{31} + x_{03} x_{12} = 0,$$

und es wird noch vorausgesetzt, daß die skalaren Koeffizienten $x_0, x_{01}, x_{02}, x_{03}$ der X_i nicht sämtlich verschwinden.

Der Begriff des *Soma* erscheint demnach als eine zunächst rein formale Erweiterung des Begriffes: *reeller eigentlicher Strahl.*

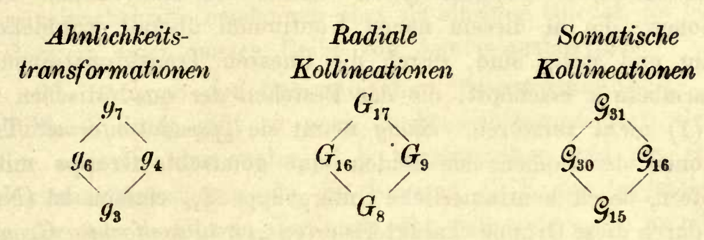
Durch lineare Transformationen $X_i' = \sum_k a_{ik} X_k$ mit dualen Koeffizienten a_{ik}, deren Determinante einen von Null verschiedenen skalaren Bestandteil besitzt, wird eine 30-gliedrige Gruppe von reellen Somentransformationen dargestellt, die *dual-projektiv* heißen. Durch Zusammensetzung dieser mit den Ähnlichkeitstransformationen (welche auch Somen in ebensolche überführen) ergibt sich *eine kontinuierliche Gruppe mit 31 wesentlichen Parametern, deren Transformationen im Somenkontinuum überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind,* und die *Study* als *somatisch-projektive Umformungen* oder *somatische Kollineationen* bezeichnet[125]).

Die $\mathfrak{G}_{30}$ der dual-projektiven Transformationen der Somen ist eine

124) *E. Study*, Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann. 39 (1891), p. 441 (insbes. p. 536 ff.). S. ferner I A 4, Komplexe Zahlen, *Study*, Nr. **12**; IV 3, Kinematik, *Schoenflies* und *Grübler*, Nr. 1, 6.

125) Geometrie der Dynamen, p. 561.

invariante Untergruppe der $\mathfrak{G}_{31}$ der somatisch-projektiven Transformationen. Die $\mathfrak{G}_{31}$ hat auch zwei weitere invariante kontinuierliche Untergruppen, nämlich eine $\mathfrak{G}_{16}$ und eine $\mathfrak{G}_{15}$, die jedes einzelne ∞^3-Gebüsch paralleler Somen in Ruhe lassen, und dessen Somen durch je eine perspektive Ähnlichkeitstransformation oder durch eine Schiebung vertauschen. Die $\mathfrak{G}_{15}$ ist Durchschnitt von $\mathfrak{G}_{30}$ und $\mathfrak{G}_{16}$ und besteht aus lauter vertauschbaren Operationen („dual-projektive Schiebungen der Somen"). Die durchaus analoge Zusammensetzung der drei Gruppen der Ähnlichkeitstransformationen (Nr. 4), der radialen Kollineationen (Nr. 17) und der somatischen Kollineationen läßt sich durch folgende Schemata erläutern:



Auch hier erscheint es als zweckmäßig, das Somenkontinuum mit zwei Schichten zu überdecken, und bei dual-projektiven Transformationen die Somen der beiden Schichten stets kontragredienten Transformationen zu unterwerfen. Es ergeben sich dann genau wie in der Strahlengeometrie Unterscheidungen zwischen somatischen Kollineationen und Korrelationen, dualen Kollineationen und Antikollineationen, usw. Für den alle diese Begriffe umfassenden Begriff der *somatischen Projektivität* gilt der charakteristische Satz:

Somatische Projektivitäten lassen invariant Parallelismus von Somen derselben Schicht und hemisymmetrale sowie symmetrale Lage von Somen verschiedener Schichten.

Die (reellen) analytischen Scharen von ∞^r Somen ($r < 6$), die in dieser *somatisch-projektiven Geometrie* (oder *projektiven Geometrie der Somen*) betrachtet werden, sind die geometrischen Bilder der irreduziblen Systeme analytischer Bedingungen, die einem starren Körper r Grade der Freiheit lassen. Daraus wird die Bedeutung dieser Geometrie für die Kinematik ersichtlich (s. IV 3, Kinematik, *Schoenflies* und *Grübler*, Nr. 20).

Die Mannigfaltigkeit der ∞^6 „eigentlichen" Somen kann durch Hinzufügung von ∞^4 geeignet definierten „*Parasomen*" zu einem in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{G}_{31}$ natürlichen Kontinuum ergänzt werden. Durch Einführung weiterer Koordinaten (Koordinaten „2. Art") läßt sich der Begriff des Parasoma analytisch in ähnlicher Weise auf-

stellen, wie der Begriff des Punktstrahles in der Strahlengeometrie (Nr. **18**). Das so abgeschlossene Kontinuum läßt sich auf eine M_6 des R_{15} eindeutig-umkehrbar abbilden, so daß $\mathfrak{G}_{31}$ in eine holoedrisch-isomorphe projektive Gruppe der M_6 (Nr. 8) übergeht. Bilder der Parasomen auf der M_6 sind die Punkte einer M_4^2; in bezug auf die Parasomen reduziert sich die somatisch-projektive Geometrie auf die projektive Liniengeometrie (Nr. **10**).

Ergänzt man dagegen die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Somen durch die ∞^3 die Gleichung (1) befriedigenden Wertsysteme, für welche $x_0 = x_{01} = x_{02} = x_{03} = 0$ ist, und die *Study* als Koordinaten eines „*Pseudosoma*" bezeichnet, so werden die analytischen Transformationen, die in diesem neuen Kontinuum überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind, durch die linearen Transformationen der acht Variabeln x erschöpft, die das Bestehen der quadratischen Gleichung (1) nicht zerstören. *Study* nennt sie „*pseudokonforme*" Transformationen der Somen; sie bilden eine gemischte Gruppe mit 28 Parametern, deren kontinuierliche Untergruppe $\mathfrak{G}_{28}$ einfach ist (Nr. 9). In der durch diese Gruppe charakterisierten „*pseudokonformen Geometrie der Somen*" liegt wieder ein Beispiel der in Nr. 9 allgemein besprochenen Geometrie vor[126]).

Die Gesamtheit aller Transformationen der eigentlichen Somen, die zugleich projektiv und pseudokonform sind, bildet eine gemischte Gruppe $\mathfrak{G}_{13}$, $\mathfrak{H}_{13}$ mit 13 Parametern; sie besteht aus allen Transformationen von $\mathfrak{G}_{31}$, die das Übereinanderliegen von Somen verschiedener Schichten nicht zerstören, und verhält sich also zu $\mathfrak{G}_{31}$ ebenso wie die Gruppe g_7 der Ähnlichkeitstransformationen zur G_{17} der radialen Projektivitäten.

Die in $\mathfrak{G}_{13}$, $\mathfrak{H}_{13}$ enthaltenen dual-projektiven Transformationen bilden ebenfalls eine gemischte Gruppe $\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{H}_{12}$ und werden als „*orthogonale*" Transformationen der Somen bezeichnet, weil sie, in dualen Koordinaten dargestellt, die dual-quadratische Form

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$$

nur um einen (dualen) Faktor ändern[127]). Die kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}_{12}$ kann in zwei miteinander vertauschbare Gruppen $\mathfrak{G}_6$, $\mathfrak{G}_6'$ zerlegt werden, deren erste mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen

---

126) Diese Geometrie hat *Study* „pseudokonform" genannt, weil sie, ebenso wie die konforme Geometrie des R_n für $n > 2$, auf die projektive Behandlung einer quadratischen Mannigfaltigkeit eines höheren Raumes hinauskommt.

127) In der Geometrie dieser Gruppe findet offenbar die Nicht-Euklidische Geometrie im Raume positiver Krümmung eine neue und wesentliche Erweiterung.

zusammenfällt, wenn man das eigentliche reelle Soma als Raumelement wählt.

Der zur Gruppe $\mathcal{G}_{12}$ gehörige Äquivalenzbegriff ist *der natürliche Äquivalenzbegriff der Kinematik,* von dem allerdings gewöhnlich keine ausdrückliche Definition gegeben wird, und nach welchem zwei ∞^r-Scharen von Bewegungen (S) und (S') äquivalent heißen, wenn zwei Bewegungen A, B existieren, für die

$$(S') \equiv A^{-1}(S)B$$

ist. Dagegen können in der Mechanik als äquivalent nur solche Scharen erachtet werden, die aus einer von ihnen durch Transformationen der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}_6$ hervorgehen $((S') \equiv (S)B)$. Diese beiden Äquivalenzbegriffe erscheinen also als einzelne Glieder, an bestimmten Stellen, in einer ganzen Reihe von Äquivalenzbegriffen.

21. Gruppe der Cremonaschen Transformationen. In einem Gebilde 1. Stufe gibt es nach funktionentheoretischen Grundsätzen keine anderen birationalen, d. h. algebraischen und ein-eindeutigen Punkttransformationen als die linearen (d. h. die projektiven). Im R_n, für $n > 2$, gibt es aber noch sehr viele andere, die im allgemeinen (1, 1)-deutig sind und *birationale* oder *Cremona*sche Transformationen[128]) heißen; sie bilden eine Gruppe, die von keiner endlichen Anzahl von Parametern abhängt, aber auch keine „unendliche kontinuierliche Gruppe" im *Lie*schen Sinne ist, weil sie durch Differentialgleichungen nicht definiert und vermutlich auch nicht durch infinitesimale Transformationen erzeugt werden kann (sie enthält jedoch eine große Anzahl endlicher kontinuierlicher Gruppen; s. Nr. 22).

Die birationalen Transformationen der Ebene lassen sich nach einem fast gleichzeitig von *W. K. Clifford*[129]), *M. Noether*[130]) und *J. Rosanes*[131]) aufgestellten Satze als Produkte einer endlichen Anzahl

128) Die einfachsten unter diesen Transformationen, nämlich die quadratischen, treten in der Ebene bei *L. J. Magnus*, insbesondere die Kreisverwandtschaften bei *Möbius* auf; s. Anm. [72]). Allgemeinste Transformationen in der Ebene bei *L. Cremona*, Bologna Mem. (2) 2 (1863), 5 (1865), abgedruckt in Giorn. di mat. 1 (1863), p. 305; 3 (1865), p. 269, 363. Im R_3, s. *Cremona*, Gött. Nachr. 1871, p. 129, abgedruckt in Math. Ann. 4 (1871), p. 213; Milano Rend. 4 (1871), p. 269, 315; Ann. di mat. 5 (1871), p. 213; gleichzeitig auch bei *A. Cayley* (London Math. Soc. Proc. 3 (1869—71), p. 127 = Papers 7, p. 189) und bei *M. Noether* (Math. Ann. 3 (1871), p. 547).

129) Ohne Beweis: s. die „Analysis of Cremona's transformations" im Anhang zu den Math. papers (London 1882), p. 542.

130) Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen, Math. Ann. 3 (1871), p. 161. Vgl. insbes. p. 167.

131) J. f. Math. 73 (1871), p. 97.

von *quadratischen* Transformationen herstellen. Diesem Satze hat aber erst später *M. Noether*[132]) durch Berücksichtigung des Falles unendlich naher Fundamentalpunkte eine festere Basis gegeben. Neuerdings hat *C. Segre*[133]) bemerkt, daß auch der *Noether*sche Beweis eine Lücke enthält; aber *G. Castelnuovo*[134]) hat auf anderem Wege die Richtigkeit des Satzes außer Zweifel gesetzt.

Für $n \geqq 3$ hat man die Frage nach den erzeugenden Operationen der Gruppe noch nicht angegriffen.

Die Invariantentheorie der Gruppe der *Cremona*schen Transformationen ist lange nicht so weit entwickelt wie die der vorhergehenden; doch weiß man z. B., daß bei ihren Transformationen die Geschlechter und Moduln algebraischer Gebilde invariant sind. Letztere bleiben aber ungeändert bei allen algebraischen Transformationen, die auch nur für das *einzelne* in Betracht kommende *Gebilde* eindeutig sind (Nr. **26**, a); und es könnte die Frage sein, ob es darüber hinaus noch Eigenschaften der Kurven, Flächen usw. gibt, welche bei diesem höheren (*Riemann*schen) Standpunkte nicht in Betracht kommen, aber doch Invarianten in bezug auf *Cremona*sche Transformationen sind. Darüber sind noch keine systematischen Untersuchungen angestellt worden. Doch weiß man, daß bei endlichen kontinuierlichen Gruppen von *Cremona*schen Transformationen lineare Systeme algebraischer M_{n-1} invariant bleiben (Nr. 22).

F. Klein[135]) stellt auch die Frage nach einer Invariantentheorie der Differentialformen, z. B. der *Pfaff*'schen Ausdrücke, mit rationalen (oder algebraischen) Koeffizienten, gegenüber birationalen (bezw. algebraischen, Nr. 25, a) Transformationen. Von da aus sollte das Studium und die Klassifikation der durch algebraische Differentialgleichungen definierten transzendenten Funktionen erwachsen[136]).

22. Endliche kontinuierliche Gruppen von Cremonaschen Transformationen und deren projektive Abbildung. In jedem R_n gibt es eine große Anzahl endlicher kontinuierlicher Gruppen von *Cremona*schen Transformationen; die einfachsten Beispiele sind, nach den projektiven, die konformen Gruppen (Nr. **11**, **12**). Gestattet eine M_n irgend eines R_d $(d > n)$ eine kontinuierliche Gruppe projektiver Transformationen (Nr. 8), und ist sie *rational*, d. h. auf R_n eindeutig

---

132) Math. Ann. 5 (1872), p. 635.
133) Torino Atti 36 (1901), p. 645.
134) Torino Atti 36 (1901), p. 861.
135) Höhere Geometrie 1, p. 447 ff.
136) S. *A. Voss*, Math. Ann. 23 (1884), p. 157, 349.

abbildbar, so geht bei dieser Abbildung die projektive Gruppe der M_n in eine endliche kontinuierliche *Cremona*sche Gruppe des R_n über.

Dieser Satz ist auch umkehrbar. In bezug auf jede endliche kontinuierliche Gruppe von *Cremona*schen Transformationen gibt es unendlich viele lineare Systeme von Formen (M_{n-1}):

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_d f_d = 0,$$

welche bei allen Operationen der Gruppe in sich übergehen; unterwirft man nämlich eine M_{n-1} oder ein kontinuierliches System von M_{n-1} diesen sämtlichen Operationen, so hat das kleinste lineare System, welches die so erhaltenen M_{n-1} enthält, die verlangte Eigenschaft. Unter diesen invarianten Systemen gibt es (wenn $d > n$ ist) stets solche, die „einfach" sind, d. h. so beschaffen, daß die Mannigfaltigkeiten des Systems, welche einen Punkt allgemeiner Lage des R_n enthalten, nicht alle durch einen weiteren mit ersterem veränderlichen Punkt hindurchgehen. Durch die Gleichungen:

$$y_i = f_i,$$

in welchen die y_i homogene Punktkoordinaten im R_d bedeuten, wird der R_n auf eine M_n des R_d ein-eindeutig abgebildet; und die vorgelegte Gruppe von *Cremona*schen Transformationen des R_n geht in eine birationale Gruppe dieser M_n über, welche deren ebene Schnitte ($\sum \lambda_i y_i \equiv \sum \lambda_i f_i = 0$) in ebensolche überführt, und folglich in einer projektiven Gruppe des R_d enthalten ist, welche die genannte M_n invariant läßt (Nr. 8). *Jede endliche kontinuierliche Gruppe von Cremonaschen Transformationen eines R_n kann also als eine projektive Gruppe auf einer M_n eines geeigneten R_d aufgefaßt werden*[137]). Wenn wir dem Gesamtraume eine genügend große Anzahl von Dimensionen erteilen, so lassen sich alle überhaupt möglichen Geometrien, denen endliche kontinuierliche Gruppen von *Cremona*schen Transformationen zu Grunde liegen, unter der *projektiven Geometrie* einbegreifen. Und das war auch mit allen bisher betrachteten Geometrien der Fall.

Die endlichen kontinuierlichen Gruppen von *Cremona*schen Transformationen der Ebene und des Raumes ($n = 2, 3$) sind alle bekannt. Die der Ebene hat *F. Enriques*[138]) durch ebenfalls birationale Transformationen auf *drei* Typen (nebst ihren Untergruppen) zurückgeführt; nämlich:

---

137) Man vgl. die sofort anzuführenden Arbeiten von *G. Fano* (Anm. [140]) bis [142])).

138) Roma Linc. Rend. (5) 2 (1893), 1. sem., p. 468, 532.

a) die 8-gliedrige Kollineationsgruppe;

b) die 6-gliedrige Gruppe der quadratischen Transformationen mit zwei festen Fundamentalpunkten; d. h., falls man diese beiden Punkte durch eine Kollineation in die imaginären Kreispunkte wirft, die Gruppe der direkten Kreisverwandtschaften[139]);

c) die „*Jonquières*schen Gruppen", welche ein Strahlenbüschel, und zugleich ein lineares System von Kurven irgend einer Ordnung m, mit dem Mittelpunkte jenes Strahlenbüschels als gemeinsamem $(m-1)$-fachen Punkte und mit ebenfalls gemeinsamen Tangenten in diesem Punkte in sich überführen.

Zu diesem Resultat gelangt *Enriques* durch Konstruktion eines in bezug auf die Gruppe invarianten linearen Systems von algebraischen Kurven, und Betrachtung der zugehörigen sukzessiven adjungierten Systeme, welche mit ersterem invariant verbunden sind (III C 4, *Berzolari*, Abschn. V). Dieser Prozeß läßt sich bei dem heutigen Zustande der Flächentheorie auf den Raum R_3 nicht übertragen; aber die Konstruktion eines invarianten linearen Systems von Flächen gestattet, die vorgelegte *Cremona*sche Gruppe durch eine birational-isomorphe *projektive* Gruppe mit invarianter M_3 zu ersetzen (s. oben), wodurch die Sache auf eine Klassifikation der projektiven Gruppen mit invarianter M_3 (Nr. 8) zurückgeführt wird. Nach *F. Enriques* und *G. Fano*[140]) kann jede endliche kontinuierliche Gruppe von *Cremona*schen Transformationen des R_3 durch eine weitere *Cremona*sche Transformation auf eine der folgenden Gruppen zurückgeführt werden:

a) 15-gliedrige Kollineationsgruppe und ihre Untergruppen;

b) 10-gliedrige Gruppe der reziproken Radien mit Untergruppen;

c) „verallgemeinerte *Jonquières*sche Gruppen", d. h. Gruppen mit invariantem Ebenenbüschel oder Strahlenbündel;

d) zwei 3-gliedrige einfache Gruppen von Transformationen 3. bezw. 7. Ordnung.

Die verschiedenen Gruppen des Falles c) hat später *G. Fano*[141]) aufgezählt; auch hat er den Zusammenhang zwischen *Cremona*schen

---

139) Diese Gruppe ist eine der beiden kontinuierlichen Scharen, welche die Gesamtgruppe der reziproken Radien in der Ebene bilden. Vgl. Nr. **11**, insb. Anm. [72]).

140) *Enriques-Fano,* Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio, Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 59.

141) I gruppi di Jonquières generalizzati, Torino Mem. (2) 48 (1898), p. 221.

und projektiven Gruppen in mannigfaltiger Weise erläutert und ausgenutzt[142]).

Die kontinuierlichen Gruppen von quadratischen Transformationen des R_3 hat *M. Noether* aufgezählt[143]); es gibt fünf Gesamtgruppen, mit verschiedenen Untergruppen.

23. Aufzählung einiger unendlicher Gruppen. Von unendlichen Gruppen, die bei *Lie* studiert werden, erwähnen wir die folgenden:

a) *Die Gruppe aller reellen konformen Punkttransformationen der Ebene* (für den R_n, $n \geqq 3$, s. Nr. **11**), d. h. der reellen Punkttransformationen, welche die Winkelgrößen nicht ändern. Diese Transformationen verhalten sich also im Kleinen, in der Umgebung regulärer Stellen, wie Ähnlichkeitstransformationen. Je nachdem der Sinn der Winkel nicht geändert oder geändert wird, ergeben sich zwei getrennte Transformationsscharen, deren erstere eine unendliche kontinuierliche Gruppe in *Lie*schem Sinne ist. Damit eine Punkttransformation der Ebene konform sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die in den Gleichungen:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

auftretenden Funktionen u, v den partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \mp \frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen, wobei die unteren Vorzeichen dem Falle der Winkelumkehrung entsprechen. Funktionentheoretisch bedeuten diese Bedingungen, daß $u + iv$ eine Funktion (in *Riemann*'schem Sinne; II B 1, *Osgood*, Nr. 2, 5) der komplexen Variablen $x \pm iy$ ist.

b) *Die Gruppe aller reellen Punkttransformationen $y_i = f_i(x)$, welche die* V o l u m i n a *der Körper* (bei $n = 2$ die *Flächeninhalte*) *nicht ändern*, wozu erforderlich ist, daß die partielle Differentialgleichung $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|^2 = 1$ erfüllt sei. Diese Gruppe nennt man zuweilen *„Möbius'sche Gruppe"*[144]); ihre Invariantentheorie kann als *„Geometrie der inkompressiblen Flüssigkeiten"* bezeichnet werden. Je nachdem $\left| \frac{df_i}{dx_k} \right| = +1$ oder $= -1$ ist, zerfallen diese Transformationen in zwei getrennte Scharen („eigentliche" und „uneigentliche" volumtreue, resp. flächentreue Transformationen), von denen erstere eine unendliche kontinuierliche Gruppe

142) Palermo Rend. 10 (1896), p. 1, 16; ebenda 11 (1897), p. 240; Torino Atti 33 (1898), p. 480.

143) Deutsch. Math.-Ver. Jahresb. 5 (1896), p. 68.

144) Über eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren (J. f. Math. 12 (1834), p. 109 = Werke 1, p. 517).

ist. Nach *S. Lie*[145]) wird diese Gruppe im Falle $n = 2$ durch die infinitesimalen Transformationen

$$Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugt, welche die Differentialgleichung $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$ erfüllen[146]).

Möbius hat[144]) auch die allgemeineren Punkttransformationen der Ebene und des Raumes untersucht, welche die Flächeninhalte bzw. die Volumina nach einem konstanten Verhältnisse ändern. Diese bilden ebenfalls eine unendliche kontinuierliche Gruppe, die aus der oben genannten durch Zufügung der Ähnlichkeitstransformationen entsteht.

c) Die *unendlichen kontinuierlichen Gruppen von analytischen Punkttransformationen der Ebene* hat *S. Lie* bereits 1883 auf bestimmte Typen zurückgeführt[147]). Für die imprimitiven Gruppen, d. h. die, die mindestens eine Kurvenschar $\varphi(xy) =$ konst. invariant lassen, ergeben sich mehrere Typen, die er aufzählt, und die entweder zwei oder aber nur eine Kurvenschar der angegebenen Art in sich überführen. Dagegen sind die von der unten folgenden Gesamtgruppe d) verschiedenen primitiven Gruppen durch eine weitere Punkttransformation mit einer der beiden Gruppen b) ähnlich, d. h. mit der Gruppe der eigentlich flächentreuen Transformationen, oder mit der Gruppe der Transformationen, welche die Flächeninhalte in konstanten Verhältnissen ändern. Dieser Satz ist in einem allgemeineren und für jeden R_n gültigen enthalten[148]): „Ist eine unendliche kontinuierliche Gruppe des R_n $(n > 1)$ so beschaffen, daß bei Festhaltung eines Punktes allgemeiner Lage die ∞^{n-1} Linienelemente durch diesen Punkt stets in allgemeinster Weise, also $(n^2 - 1)$-gliedrig (s. unten, d)) transformiert werden, so sind nur drei Fälle möglich: 1) Die Gruppe ist durch eine Punkttransformation ähnlich mit der unendlichen Gruppe, die alle „Volumelemente" des R_n invariant läßt; 2) sie ist ähnlich mit der Gruppe, deren Transformationen die „Volumelemente" in konstanten Verhältnissen ändern; 3) sie ist die unendliche Gruppe aller Punkt-

145) Über Differentialinvarianten, Math. Ann. 24 (1884), p. 537; insb. p. 561.

146) *K. Carda* (Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 170) hat die Punkttransformationen des R_3 bestimmt, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. Diese Eigenschaft kommt nur den Bewegungen und Umlegungen zu.

147) Über unendliche kontinuierliche Gruppen, Christiania Forhandl. 1883, Nr. 12. S. auch: Unendliche Gruppen, p. 43.

148) Unendliche Gruppen, p. 61.

transformationen des R_n" (II A 6, Kontinuierliche Gruppen, *Maurer* und *Burkhardt*; Nr. 22)[149]). Diese Gruppen sind alle primitiv.

Im R_3 gibt es nach *U. Amaldi*[150]), außer den soeben erwähnten *Lie*schen Typen, nur einen weiteren Typus von unendlichen kontinuierlichen primitiven Gruppen von Punkttransformationen: die Gruppe aller analytischen Punkttransformationen, welche die *Pfaff*sche Gleichung $dz - ydx = 0$ in sich überführen. Diese kann auch als die unendliche Gruppe aller analytischen Berührungstransformationen der Ebene gedeutet werden. Im R_4[150]) und R_5[151]) sind dagegen durch die obigen *Lie*schen Gruppen alle Typen von unendlichen kontinuierlichen primitiven Gruppen bereits erledigt.

d) *Die Gruppe aller analytischen Punkttransformationen.* In bezug auf diese Gruppe besitzt keine analytische Punktmannigfaltigkeit, von ihrer Dimension abgesehen, invariante Eigenschaften. Die ersten Differentiale $dx, dy, \ldots$ der Veränderlichen erleiden bei jeder analytischen Umformung stets eine *lineare* Transformation; innerhalb unendlich kleiner Umgebungen entsprechender Punkte in allgemeiner Lage kann also jede analytische Transformation als linear (projektiv) aufgefaßt werden (I B 2, *Meyer*, Nr. 22; III D 3, *v. Lilienthal*, Nr. 8; III D 6a, *Voß*, Nr. 2). Dadurch greift die lineare Invariantentheorie in die Theorie der allgemeinsten analytischen Transformationen ein.

Invariante Eigenschaften gegenüber beliebigen analytischen Punkttransformationen besitzen, allgemein zu reden, die Differentialausdrücke und Differentialgleichungen (*Pfaff*sche Ausdrücke und Gleichungen, *Monge*sche Gleichungen, partielle Differentialgleichungen[152])).

---

149) Eine *endliche* kontinuierliche Gruppe in n Veränderlichen, welche die Linienelemente durch einen Punkt allgemeiner Lage ebenfalls $(n^2 - 1)$-gliedrig transformiert, ist stets mit einer projektiven Gruppe ähnlich, und zwar mit der allgemeinen projektiven, mit der allgemeinen linearen oder mit der speziellen linearen Gruppe (Nr. 5, 7) (*S. Lie*, Archiv for Math. 3 (1878), p. 375; Th. d. Transfgr. 1, p. 631).

150) I gruppi continui infiniti primitivi in tre e quattro variabili, Modena Atti (3) 7 (1906).

151) *G. Kowalewski*, Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen, Habilitationsschrift Leipzig, Leipzig Ber. 51 (1899), p. 69.

152) Bei der Untersuchung dieser invarianten Eigenschaften ist öfters die geometrische Deutung der Differentialgleichungen heranzuziehen, die auf *G. Monge* zurückgeht („Supplément où l'on fait voir . . .", Paris Acad. 1784, p. 502; „Application de l'analyse à la géométrie", als „Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie" 1795 erschienen; letzte Ausgabe durch *J. Liouville*, Paris 1850). In neuerer Zeit wurden diese Fragen in den Lehrbüchern von *G. Darboux* (Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 Bde., Paris 1887—96) und *S. Lie* viel-

Ein *Pfaff*scher Ausdruck $\sum_i' X_i dx_i$ (II A 5, Partielle Differentialgleichungen, *v. Weber*; Nr. **18** ff.) hat eine bilineare schiefe „Kovariante“:

$$\sum_{i,k}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)dx_i\delta x_k,$$

deren identisches Verschwinden aussagt, daß der vorgelegte Ausdruck ein exaktes Differential ist. Ist das nicht der Fall, so wird doch das Verhalten des *Pfaff*schen Ausdruckes gegenüber Punkttransformationen durch einen Charakter festgelegt, welcher sich aus der Determinante der obigen bilinearen Form und aus derselben mit $\pm X_1, \pm X_2, \ldots, \pm X_n$ geränderten Determinante ergibt, in dem Sinne, daß zwei Ausdrücke von demselben (oder von verschiedenem) Charakter stets (niemals) ineinander transformierbar sind; je nachdem dieser Charakter gerade ($= 2r$) oder ungerade ($= 2r + 1$) ist, läßt sich der vorgelegte Ausdruck auf eine der Normalformen

$$z_{r+1}dz_1+\cdots+z_{2r}dz_r \quad \text{oder} \quad dz_0+z_{r+1}dz_1+\cdots+z_{2r}dz_r$$

bringen[153]). — Die Invariantentheorie eines quadratischen Differentialausdruckes $\sum_{i,k} X_{ik}dx_idx_k$ deckt sich mit der metrischen Geometrie auf der Mannigfaltigkeit, deren Bogenelementquadrat durch diesen Ausdruck dargestellt wird (Nr. **26**, b). Für den Fall zweier Variabelen, d. h. der gewöhnlichen krummen Flächen, hat *C. F. Gauß* eine erste Invariante gefunden, nämlich das Krümmungsmaß $k = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, welches er durch die Koeffizienten der zugehörigen Form ds^2 und deren Differentialquotienten nach den Variabeln ausdrückte[154]). Weitere Invariantenbildungen, und zwar „Kontravarianten“, sind *E. Beltramis* „Differentialparameter“ $\Delta_1\Phi$ und $\Delta_2\Phi$[155]). Den Begriff des *Gauss*schen

---

fach behandelt. Für die bezügliche Invariantentheorie s. *F. Klein*, Höhere Geometrie 1, p. 403—36, wo auch weitere Literatur angeführt wird.

153) *G. Frobenius,* J. f. Math. 82 (1876), p. 230; *S. Lie,* Archiv f. Math. 2 (1877), p. 338. S. auch Leipzig Ber. 48 (1896), p. 390.

154) Disquisitiones generales circa superficies curvas, der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1827 eingereicht und in „Commentationes recentiores“ Bd. 6 veröffentlicht: abgedruckt in *Gauß'* Werken, 4 (Göttingen 1873), p. 217 (Ostwalds Klassiker, Nr. 5). Die Diskussion der Differentialform ds^2 liefert die Eigenschaften der Fläche, welche allen ihren Biegungsflächen gemeinsam sind. Die volle Gestalt der Fläche beherrscht man aber erst durch Hinzunahme der zweiten Differentialform, die, gleich Null gesetzt, die Asymptotenkurven darstellt (I B 2, Invariantentheorie, *Meyer*, Nr. **22**; III D 3, Kurven auf den Flächen, *v. Lilienthal*, Nrr. **4**, **33**).

155) Ricerche di analisi applicata alla geometria, mehrere Aufsätze in Giorn. di mat. 2 (1864); 3 (1865), insb. 2, p. 355 = Opere 1 (Milano 1902), p. 107, insb. p. 140 ff. Erweiterung auf n Veränderliche: Sulla teoria generale dei parametri differenziali, Bologna Mem. (2) 8 (1868), p. 549 = Opere 2

Krümmungsmaßes hat *B. Riemann* auf den Fall mehrerer Variabeln, und zwar auf die einzelnen „geodätischen" M_2 einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit übertragen [156]). Diese Untersuchung haben *E. B. Christoffel* und *R. Lipschitz* wieder aufgenommen, indem sie die Frage nach der Äquivalenz zweier quadratischen Ausdrücke behandelten [157]); diese Frage kommt darauf zurück, die Äquivalenz gewisser algebraischer Formen im Sinne der linearen Invariantentheorie zu prüfen.

Für die Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen scheint das Zugrundelegen der umfassenderen Gruppe aller analytischen Berührungstransformationen (Nr. 24, g)) vorteilhafter. Eine Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung gegenüber Punkttransformationen hat aber *S. Lie* angestellt [158]).

24. Fortsetzung. Unendliche Gruppen von Berührungstransformationen (III D 7, *Scheffers*).

e) *Die Gruppe aller „äquidistanten" Berührungstransformationen* [159]) oder *„äquilongen Transformationen"* [160]) *der Ebene*, d. h. aller Berührungstransformationen, die erstens jede Gerade in eine Gerade und zweitens jede Strecke in eine gleichlange Strecke überführen [161]). Darunter sind insbesondere die „Dilatationen" einbegriffen [162]). Diese Gruppe bildet ein bemerkenswertes Gegenstück zur konformen Gruppe (Nr. 23, a)); bei letzterer sind die Winkel, bei ersterer die Tangential-

---

(1904), p. 74. Für allgemeine Orthogonalkoordinaten im R_3 schon bei *G. Lamé*: Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications (Paris 1859) (I B 2, *Meyer*, Nr. 22; III D 3, *v. Lilienthal*, Nr. 8).

156) Vgl. die Anm. 60) erwähnte Habilitationsschrift, sowie auch die Pariser Preisaufgabe aus dem Jahre 1861, die in den Ges. Werken unter Nr. XXII mit Erläuterungen von *H. Weber* aufgenommen ist (Leipzig 1876, p. 370; 2. Aufl. 1892).

157) *Christoffel*, J. f. Math. 70 (1869), p. 241; *Lipschitz*, ebenda 70 (1869), p. 71; 71 (1870), p. 274, 288; 72 (1870), p. 1; 74 (1872), p. 116, 150; 78 (1874), p. 1 (I B 2, *Meyer*, Nrr. 3, 22).

158) Göttinger Nachr. 1872, p. 473.

159) *E. Study*, Über mehrere Probleme der Geometrie, die dem Problem der konformen Abbildung analog sind, Bonn Ges. f. Natur- u. Heilkunde, Ber. 5. Dez. 1904.

160) *G. Scheffers*, Über Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen, Verh. des 3. intern. Mathem.-Kongr., Heidelberg 1904, p. 349. Ausführlicher in Math. Ann. 60 (1905), p. 491, insb. §§ 6—7.

161) Linienelemente einer Geraden gehen also in ebensolche über; und die Entfernungen zwischen den Punkten zweier Linienelemente derselben Geraden sollen ungeändert bleiben.

162) *S. Lie*, Geom. d. BT 1, p. 14. Über Dilatationen im Raume, s. Math. Ann. 59 (1904), p. 209.

abstände zweier Kurven invariant; bei einer konformen Transformation geht jede Schar von ∞^2 Isogonalkurven (d. h. von Kurven, die eine ∞^1-Schar unter konstantem Winkel durchsetzen) in eine ebensolche Schar über, bei einer äquilongen Transformation wird jede Schar von ∞^2 „Äquitangentialkurven" (d. h. von Kurven, die mit einer ∞^1-Schar Tangenten von konstanter Länge — gemessen zwischen den beiden Berührungspunkten — gemein haben) in eine ebensolche übergeführt.

Diese Analogie kommt auch in der analytischen Darstellung zum Ausdruck. Dazu erscheint es zweckmäßig, den Geraden bestimmte Fortschreitungssinne beizulegen, d. h. dieselben zu „orientieren", wodurch die äquilonge Gruppe in zwei kontinuierliche Scharen von „eigentlichen" und „uneigentlichen" äquilongen Transformationen zerfällt, je nachdem entsprechende Strecken gleich oder entgegengesetzt gleich sind. Wird dann eine Gerade in cartesischen Orthogonalkoordinaten durch die *Hesse*sche Normalgleichung:

$$x \cos u + y \sin u - v = 0$$

mit positivem v dargestellt, so betrachten wir u, v als Koordinaten der zugehörigen orientierten Geraden (oder „Halbgeraden"), die den Anfangspunkt zur linken Hand hat, dagegen $u + \pi, -v$ als Koordinaten ihrer entgegengesetzten. In diesen Koordinaten sind die Gleichungen einer äquilongen Transformation:

$$u' = \varphi(u, v), \quad v' = \psi(u, v)$$

an die beiden Bedingungen:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \pm \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

gebunden, wo das obere (untere) Vorzeichen dem Falle der eigentlichen (uneigentlichen) Transformationen entspricht; also:

$$u' = \varphi(u), \quad v' = \chi(u) \pm v \cdot \varphi'(u)$$

mit den beliebig annehmbaren Funktionen φ und χ von u allein. Diese Transformationen brauchen nicht notwendig analytisch zu sein.

Betrachtet man nun den Ausdruck

$$u' + \varepsilon v' \equiv \varphi(u, v) + \varepsilon \cdot \psi(u, v)$$

mit $\varepsilon^2 = 0$ als eine „duale" Größe (Nr. **17**, **20**), so liefern die Gleichungen (1) die Bedingung dafür, daß der Differentialquotient:

$$\frac{d(u' + \varepsilon v')}{d(u \pm \varepsilon v)} = \frac{(\varphi_u + \varepsilon \psi_u) du + (\varphi_v + \varepsilon \psi_v) dv}{du \pm \varepsilon dv}$$

unabhängig von $\frac{du}{dv}$ sei; man kann dann $u' + \varepsilon v'$ eine „synektische Funktion von $u \pm \varepsilon v$" nennen, und sagen: *Die äquilonge Gruppe läßt*

sich mit Benutzung der beiden Einheiten 1 *und* ε, *wo* $\varepsilon^2 = 0$ *ist, durch die einzige Gleichung* $u' + \varepsilon v' = f(u + \varepsilon v)$ *darstellen* [163]).

Die Analogie mit der konformen Gruppe und mit ihrer Darstellung durch die Funktionen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen $x + iy$ ist also ersichtlich. Ebenso wie die konformen Transformationen, die Kreise in Kreise überführen, die Gruppe der reziproken Radien (Nr. **11**) bilden, so bilden auch die äquilongen Transformationen, die orientierte Kreise in ebensolche überführen, eine von sechs Parametern abhängige gemischte algebraische Untergruppe: die *Laguerre*sche Gruppe (Nr. **14**). Nach geeigneter Umänderung des Koordinatensystems (u, v) lassen sich die Operationen dieser Gruppe durch lineare Substitutionen

$$w' \equiv u' + \varepsilon v' = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad \bar{w}' = \frac{a\bar{w} + b}{c\bar{w} + d}$$

mit reell-dualen Koeffizienten a, b, c, d darstellen [164]).

Die äquilongen Transformationen hat *Study* auch für den Nicht-Euklidischen Fall erklärt. Zu dem Zweck führt er eine imaginäre Einheit ε ein, die in den beiden Fällen der elliptischen und der hyperbolischen Ebene bzw. die beiden Gleichungen:

$$\varepsilon^2 = -1, \quad \varepsilon^2 = +1$$

erfüllt (im ersten Falle also vorläufig mit der gewöhnlichen imaginären Einheit i identifiziert werden kann, im zweiten Falle aber als von $+1$ verschieden anzunehmen ist), und setzt aus den Koordinaten u, v einer orientierten Geraden die Größe:

$$z = u + 2 \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{tgh}\left(\frac{v}{2} \cdot \varepsilon\right)\right\} \equiv \xi + \varepsilon\eta$$

zusammen. Bedeutet dann $\bar{z}$ den zu z konjugierten Wert $\xi - \varepsilon\eta$

---

163) Hierin liegt eine in der Natur der Sache begründete Deutung des Systems der dualen Zahlen. Als natürlicher reeller Träger dieses Zahlensystems erscheint also das System der orientierten Geraden der Ebene.

164) *J. Grünwald,* Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie, Monatsh. f. Math. Phys. 17 (1906), p. 81 (insb. § 15). Die dualen Zahlen $w = u + \varepsilon v$ mit komplexen u, v hat *Grünwald* durch die ∞^4 reellen Speere (oder orientierten Geraden) des Euklidischen R_3 derart eindeutig dargestellt, daß die Transformationen $w' = f(w)$ durch sogenannte „dual-konforme" Speertransformationen und die linearen Transformationen

$$w' = \frac{(a_0 - a_3 i) w + (a_1 i - a_2)}{(a_1 i + a_2) w + (a_3 i + a_0)}$$

mit reell-dualen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 durch die reellen Bewegungen des R_3 gedeutet werden.

und $f(z)$ eine konvergente Reihe von der Form:

$$\sum_k (a_k + \varepsilon b_k)(z - z_0)^k$$

so liefern die Gleichungen:

$$z' = f(z), \quad z' = f(\bar{z})$$

mit ihren analytischen Fortsetzungen die allgemeinste analytische äquilonge Transformation. Diese Transformationen lassen sich auch in das gewöhnliche komplexe Gebiet fortsetzen (wobei im elliptischen Falle $\varepsilon \neq \pm i$ anzunehmen ist).

In diesem allgemeinen Resultat ist auch der Euklidische Fall einbegriffen, da sich z für $\varepsilon^2 = 0$ auf $u + \varepsilon v$ reduziert.

In der hyperbolischen Ebene (nicht aber in der elliptischen) gibt es auch reelle nicht-analytische Transformationen der verlangten Art; die allgemeinsten unter ihnen werden durch die reellen umkehrbaren Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial \xi} = \pm \frac{\partial \xi'}{\partial \eta}$$

geliefert.

Die besprochenen Aufgaben lassen sich auf n Dimensionen ausdehnen[164a]). In den beiden Nicht-Euklidischen R_3 gibt es aber nur eine *endliche* 10-gliedrige kontinuierliche Gruppe von äquidistanten Berührungstransformationen, wie es auch mit den konformen Transformationen der Fall ist. Dagegen gibt es im Euklidischen R_3 eine unendliche Gruppe von äquidistanten Berührungstransformationen.

f) *Unendliche irreduzible Gruppen von analytischen Berührungstransformationen.* Unter den Gruppen von Berührungstransformationen bieten die irreduziblen (Nr. 15) das Hauptinteresse dar (dazu gehört aber nicht die Gruppe der äquidistanten Berührungstransformationen). In der Ebene enthält die Gruppe aller analytischen Berührungstransformationen (welche selbst irreduzibel ist) nur zwei Arten von unendlichen kontinuierlichen irreduziblen Untergruppen; durch eine weitere Berührungstransformation sind diese mit den beiden Gruppen ähnlich, deren charakteristische Funktionen die beiden Formen

$$\Omega(x, y) \quad \text{und} \quad cz + \Omega(x, y)$$

besitzen, wo Ω eine willkürliche analytische Funktion von x, y und c eine willkürliche Konstante bedeutet[165]). Dieser Satz läßt sich, wie für die endlichen Gruppen (Nr. 15), in folgender Form auf jeden

164a) *Study,* a. a. O. § 6.

165) *S. Lie,* Unendliche Gruppen, p. 83.

R_{n+1} übertragen: „Ist eine unendliche kontinuierliche Gruppe von Berührungstransformationen des R_{n+1} als Gruppe von Punkttransformationen des $R_{2n+1}(z, x_i, p_i)$ so beschaffen, daß die ∞^{2n-1} Linienelemente durch einen festgehaltenen Punkt allgemeiner Lage, welche der *Pfaff*schen Gleichung

$$dz - \sum_i p_i dx_i = 0$$

genügen, in möglichst allgemeiner Weise, d. h. $n(2n+1)$-gliedrig transformiert werden, so ist die Gruppe irreduzibel, und entweder fällt sie mit der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen des R_{n+1} zusammen oder sie ist durch eine Berührungstransformation dieses Raumes ähnlich mit einer der beiden Gruppen $\Omega(x_i, p_i)$ und $az + \Omega(x_i, p_i)$"[166]).

Im R_3 gibt es nach *G. Kowalewski*[151]), außer der Gesamtheit aller analytischen Berührungstransformationen, keine andere unendliche kontinuierliche Gruppe solcher Transformationen, welche als Gruppe von Punkttransformationen des R_5 (x, y, z, p, q) primitiv ausfällt. Unter den übrigen Gruppen, die also im R_5 imprimitiv sind, treten in erster Linie diejenigen auf, die im R_5 eine invariante ∞^1-Schar von M_4 besitzen, d. h. die unendlichen Gruppen von Berührungstransformationen des R_3, welche eine ∞^1-Schar von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung $f(x, y, z, p, q) =$ konst. in sich überführen; unter diesen gibt es bereits eine große Anzahl irreduzibler typischer Gruppen, die *U. Amaldi*[167]) bestimmt hat.

g) *Die Gruppe aller analytischen Berührungstransformationen.* Die geometrischen Gebilde, welche in bezug auf beliebige analytische Berührungstransformationen invariante Eigenschaften besitzen, werden im R_3 durch Gleichungen dargestellt, welche die fünf Veränderlichen x, y, z, p, q (im R_{n+1}, die $2n+1$ Veränderlichen z, x_i, p_i), eventuell auch andere Größen, enthalten; also durch *partielle Differentialgleichungen* und Systeme solcher Gleichungen (II A 5, *v. Weber*; III D 8, Geometrische Theorie der Differentialgleichungen, *Liebmann*). Berührungstransformationen kommen in der Tat von alters her in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zur Anwendung; nur waren dabei nicht die Transformationen an sich und ihre Invariantentheorie, sondern die Transformation der betreffenden Differentialgleichung und die Erledigung bestimmter Integrationsprobleme der Untersuchungsgegenstand. Erst *Lie* hat eine *Invariantentheorie der Berührungstrans-*

166) *S. Lie*, a. a. O. p. 107.

167) Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio, Torino Mem. (2) 57 (1906), p. 141.

formationen begründet, und zugleich durch geometrische Betrachtungen Klarheit in die Begriffe gebracht[168]).

Eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung $f(xyzpq) = 0$ besitzt noch keinerlei Invarianten gegenüber beliebigen Berührungstransformationen; es ist stets möglich, sie durch eine geeignete Berührungstransformation in jede andere, z. B. in die einfache Gleichung $z = 0$ überzuführen [169]). Dieser Satz läßt sich auf n Dimensionen ausdehnen.

Dagegen kann man bereits bei einem *System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung* $f(xyzpq) = 0$, $\varphi(xyzpq) = 0, \ldots$ oder bei einem *Funktionensystem* $f, \varphi, \ldots$ nach invarianten Eigenschaften fragen. Dabei kommt es namentlich auf die Betrachtung der *Poisson*schen Klammerausdrücke $[f\varphi]$ an [169a]). Das Verschwinden dieses Ausdruckes infolge von $f = 0$ und $\varphi = 0$ bedeutet, daß diese beiden partiellen Differentialgleichungen „in Involution liegen", d. h. daß sie ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben, während bei seinem identischen Verschwinden dieselbe Eigenschaft je zwei Differentialgleichungen $f =$ konst., $\varphi =$ konst. zukommt. Und das sind eben invariante Beziehungen.

Eine Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung hinsichtlich beliebiger Berührungstransformationen des $R_3(xyz)$ findet sich in II A 5 (*v. Weber*), Nr. 43 [170]). Ganz besonders ist die Invariantentheorie der sogen. *Monge-Ampèreschen Gleichungen* [171]):

$$A(rs - t^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

---

168) Für die Invariantentheorie der Berührungstransformationen sind zwei ältere Arbeiten von *S. Lie* grundlegend; sein „Programm" von 1872: Kurzes Resumé mehrerer neuen Theorien, Christiania Forhandl. 1872, p. 24, und die Abhandlung: Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Math. Ann. 8 (1875), p. 215, welche auch Umarbeitungen älterer Aufsätze enthält. In den späteren Arbeiten von *Lie* tritt diese Theorie fortwährend auf, insb. in Th. d. Transfgr. 2 und Geometrie d. BT. S. auch *F. Klein*, Höhere Geometrie 1, p. 558 u. ff.

169) *S. Lie,* Christiana Forhandl. 1872, p. 24, 132; Göttinger Nachr. 1872, p. 478; *F. Klein,* Erlanger Programm, § 9.

169a) *S. Lie,* Zur Theorie partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung usw., Göttinger Nachr. 1872, p. 473, insb. p. 478—79. S. auch die verschiedenen Arbeiten in Christiana Forhandl. 1872.

170) Nach *E. Goursat,* Acta math. 19 (1895), p. 285, insb. p. 297; Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre 1 (Paris 1896), Nr. 87.

171) *G. Monge*, Paris Hist. 1784, p. 118; *A. M. Ampère,* Journ. éc. pol. 11, cah. 18 (1820), p. 34.

untersucht worden, wo $A, B, \ldots$ Funktionen von x, y, z, p, q und r, s, t die zweiten Differentialquotienten bedeuten: diese bilden nämlich eine invariante Kategorie [172]). Durch eine geeignete Berührungstransformation kann man jede solche Gleichung linear machen, d. h. A zum Verschwinden bringen. Die linearen Gleichungen sind dadurch charakterisiert, daß sie die ∞^3 Punkte des Raumes zu Integralgebilden haben; die linearen homogenen ($A = E = 0$) haben auch die ∞^3 Ebenen zu Integralgebilden.

Nach *Ampères* Vorgang haben die Analytiker die Frage verfolgt, wann eine *Monge-Ampère*sche Gleichung eine intermediäre Integralgleichung $v - \varphi(u) = 0$ besitzt, wo φ eine willkürliche Funktion ist und u, v unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q bezeichnen. Diese Kategorie von Differentialgleichungen ist gegenüber Berührungstransformationen invariant; liegen u, v miteinander in Involution, so läßt sich die Differentialgleichung durch eine Berührungstransformation auf die Normalform

$$r \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

bringen, welche die Integralflächen $z = Y(y) + x \cdot Y_1(y)$ besitzt [173]).

h) *Die* (für die Optik wichtige) *unendliche Gruppe aller Transformationen der „orientierten Strahlen" des* R_3 (d. h. Strahlen mit beigelegter bestimmter positiver Richtung), *welche aus Normalenkongruenzen von Flächen wieder solche hervorgehen lassen*; und hier anschließend:

h') *Die unendliche Gruppe der „orientierten" Berührungstransformationen, welche parallele Vereine in eben solche überführen*, d. h. *welche die* ∞^1*-Gruppe der Dilationen* [162]) *in Ruhe lassen*. (*„Orientiertes Flächenelement"* oder *„Wellenelement"* heißt das System eines orientierten Strahles und einer zu diesem senkrechten (eigentlichen) Ebene; „Punkt" des Elementes ist der Durchschnitt des Strahles mit der Ebene; die Begriffe der „vereinigten Lage" zweier Elemente, des „Vereins" von ∞^1 oder ∞^2 Elementen, und der „orientierten Berührungstransformation" lassen sich auf diesen Fall sofort übertragen.)

Zwischen den beiden obigen Gruppen hat *E. Study* folgende Beziehung hervorgehoben [174]): *Jede Transformation von* h') *liefert durch*

---

172) *S. Lie*, Christiania Forhandl. 1871, p. 85; Math. Ann. 5 (1872), p. 163; ebenda 59 (1904), p. 246; *F. Klein*, a. a. O. p. 561. Für die Theorie der *Monge-Ampère*schen Gleichungen s. auch: *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces 3 (Paris 1894), p. 263 ff.

173) *Lie-Engel*, Math. Ann. 59 (1904), p. 275—76.

174) Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie

„Verkürzung“ eine Transformation von h), *während umgekehrt jede Transformation von* h) *auf* ∞^1 *Arten zu einer Transformation von* h′) *erweitert werden kann.*

Die ∞^5 orientierten Elemente lassen sich in geeigneter Weise durch sieben Koordinaten bestimmen, nämlich die Richtungskosinus X, Y, Z des (orientierten) Strahles, die cartesischen Orthogonalkoordinaten Ξ, H, Z des Fußpunktes des vom Anfangspunkte auf den Strahl gefällten Lotes, und den Abstand Ω der Ebene von diesem Anfangspunkte. Diese Koordinaten sind an die beiden Gleichungen:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad \Xi X + HY + ZZ = 0$$

gebunden; und die vereinigte Lage zweier konsekutiver Wellenelemente wird durch die *Pfaff*sche Gleichung:

$$(2) \qquad d\Omega - \Xi dX - HdY - ZdZ = 0$$

bedingt. Die Gruppe h′) besteht dann aus den analytischen Transformationen der sieben Veränderlichen $X, Y, Z, \Xi, H, Z, \Omega$, welche die Gleichungen (1) und (2) nicht zerstören; und die obengemeinte Verkürzung dieser Transformationen besteht einfach darin, daß man von der Koordinate Ω absieht.

Die Bedeutung der Gruppe h) für die Optik ergibt sich aus dem *Malus-Dupin*schen Satze[175]), nach welchem jede Normalenkongruenz einer Schar paralleler Flächen infolge einer endlichen Anzahl von Reflexionen und Brechungen an Trennungsflächen isotroper Medien immer wieder eine solche Strahlenkongruenz erzeugt.

Andererseits läßt ein gewöhnliches dioptrisches System aus jedem Punkte des Objekt- oder des Bildraumes nach bestimmtem Zeitverlauf im allgemeinen eine Wellenfläche des anderen Raumes entstehen; und diese Beziehung zwischen Punkten des einen Raumes und orientierten Flächen des anderen ist eine Transformation der Gruppe h′). Variiert das Zeitintervall, so erhält man ∞^1 orientierte Berührungstransformationen, welche alle dieselbe verkürzte Strahlentransformation h) liefern.

Die analytische Behandlung der Transformationen h′) tritt schon

der Berührungstransformationen, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 14 (1905), p. 424. Ausführlich behandelt *Study* nur den allgemeinen Fall, in welchem den ebenen Vereinen allgemeiner Lage doppelt gekrümmte zweidimensionale Vereine entsprechen. An Stelle von Punktkoordinaten, wie bei *Lie,* treten hier Ebenenkoordinaten auf.

175) *L. Malus,* Journ. éc. pol., cah. 14 (1808); *Dupin,* Sur les routes suivies par la lumière etc. (Applications de géométrie et de mécanique, Paris 1822).

bei *W. R. Hamilton*[176]) auf. Seine charakteristische Funktion ist nämlich erzeugende Funktion einer Schar von ∞^1 Berührungstransformationen und von ihm selbst als solche behandelt worden. *Study* benutzt a. a. O. eine einfachere erzeugende Funktion, die auf dem Begriff des orientierten Elementes beruht.

25. Andere geometrische Gruppen. Die Analysis situs. In *F. Klein*s Programm werden auch Gruppen angeführt, die keine *Lie*sche Gruppen (Nr. 2) sind; als solche ist uns schon (Nr. **21**) die Gruppe aller *Cremona*schen Transformationen begegnet. Als weitere Beispiele erwähnen wir:

a) *Die Gruppe aller algebraischen Punkttransformationen,* und namentlich:

b) *Die Gruppe aller reellen eindeutig-umkehrbaren und stetigen Punkttransformationen,* welche durch Zusammensetzung unendlich kleiner Verzerrungen entstehen. Diese Transformationen sind im allgemeinen auch nicht analytisch; ihre Theorie bewegt sich auf dem Gebiete der willkürlichen Funktionen und trägt die prinzipielle Beschränkung auf reelle Raumelemente in sich. Man kann aber diese Gruppe erweitern, indem man sie mit den reellen Kollineationen, die auch das Unendlichferne modifizieren, verbindet.

Die Invariantentheorie dieser Gruppe bezeichnet man als „*Analysis situs*" (III A B 3, *Dehn* und *Heegard*). Dazu gehören zunächst die Eigenschaften *gestaltlicher Art* der (reellen) Kurven und Flächen; ferner die auf eine Punktmenge bezüglichen Begriffe: 1) des *Grenzpunktes,* also auch der abgeschlossenen, in sich dichten, perfekten Menge (I A 5, Mengenlehre, *Schoenflies,* Nrn. **1**, **11**, **13**); 2) des *Zusammenhanges*; 3) der *Dimension*[177]). Insbesondere ist der Begriff der *geschlossenen einfachen Kurve* und der durch sie bewirkten *Gebietseinteilung* gegenüber der Gruppe der Analysis situs der Ebene invariant[178]).

---

176) Vgl. namentlich das dritte Supplement zu dem „Systems of rays", Dublin Trans. 17 (1837). S. auch: *F. Klein,* Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 1 (1892), p. 35; *S. Lie*, Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik, Leipzig Ber. 48 (1896) p. 131.

177) Bei beliebigen reellen Punkttransformationen ist dagegen die Dimension einer Punktmenge nicht invariant. Invariant ist nur ihre „Mächtigkeit" (I A 5, Nr. 4), und der R_n hat die Mächtigkeit des R_1, d. h. des linearen Kontinuums (wie zuerst *G. Cantor*, J. f. Math. 84 (1878), p. 245 bewiesen hat). *G. Peano* hat außerdem gezeigt (Math. Ann. 36 (1890), p. 157), daß die Punkte einer Strecke auch stetig (aber nicht umkehrbar eindeutig!) auf die Punkte eines Flächenstückes abgebildet werden können; *D. Hilbert* hat das geometrisch erläutert (Math. Ann. 38 (1891), p. 459) (I A 5, Nr. **2**; III A B 2, Nr. **8**; III A B 4 a, Nr. **40**).

178) Die Sätze der Analysis situs über Kurven und Kurvenbögen, sowie

26. Die verschiedenen Geometrien auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit[179]). Ist irgend ein System von Eigenschaften eines Gebildes G bei einer gewissen Gruppe der zu Grunde liegenden Raumform — welche wir als die möglichst umfassende voraussetzen — invariant, so kann es doch vorkommen, daß diese Eigenschaften auch bei anderen Transformationen erhalten bleiben, falls man letztere nicht auf die ganze Raumform, sondern nur auf das Gebilde G bezieht.

a) Die Geschlechter und Moduln einer algebraischen Mannigfaltigkeit μ bleiben invariant auch bei rationalen nicht eindeutig umkehrbaren Transformationen der Raumform, welche μ enthält, so lange jedem Punkte allgemeiner Lage des zu μ entsprechenden Gebildes eindeutig ein Punkt von μ zugeordnet werden kann, gleichgültig, ob demselben noch andere Raumpunkte außerhalb μ entsprechen. Man kann sich derartige Transformationen nicht nur zwischen zwei R_k, sondern auch zwischen einem R_k und einer im R_n $(n > k)$ liegenden M_k denken. Durch die unabhängigen Gleichungen:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bezw. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nicht homogene Punktkoordinaten im R_k und im R_n und die f_i rationale Funktionen bedeuten, wird nämlich im R_n eine M_k dargestellt; jedem Punkte (x) des R_k entspricht im allgemeinen *ein* Punkt (y) dieser M_k; jedem Punkte dieser M_k aber eine diskrete Anzahl $(\geqq 1)$ von Punkten des R_k. Betrachten wir nun in R_k irgend eine M_h $(h < k)$, so entspricht ihr innerhalb M_k eine $\overline{M}_h$; und trotz der im allgemeinen nicht eindeutig-umkehrbaren Beziehung zwischen R_k und M_k werden doch *die beiden Gebilde* M_h und $\overline{M}_h$, allgemein zu reden, ein-eindeutig aufeinander bezogen sein, da die übrigen Punkte von R_k, die einem Punkte von $\overline{M}_h$ entsprechen, nicht auf M_h liegen; die Geschlechter und Moduln von M_h bleiben also beim Übergang zu $\overline{M}_h$ erhalten.

Die Eigenschaften eines algebraischen Gebildes, die in bezug auf sämtliche Transformationen der hier angegebenen Art invariant

---

über die durch sie bestimmten Gebietseinteilungen hat neuerdings *A. Schoenflies* mengentheoretisch erklärt und begründet (Math. Ann. 58 (1904), p. 195; 59 (1904), p. 129; 62 (1906), p. 286; s. auch Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 15 (1906), p. 557; Gött. Nachr. 1907, p. 28). Insbesondere hat er die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften bestimmt, die für eine Punktmenge erfüllt sein müssen, damit sie im Sinne der Analysis situs als gleichwertig mit der Geraden oder mit der Strecke betrachtet werden kann. Da seine Begriffe den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Ebene gegenüber invariant sind, so dürfen sie als „natürliche Begriffe" der Analysis situs im Sinne von Nr. 37 ff. aufgefaßt werden (III A B 2, *v. Mangoldt,* Nr. 9).

sind, sind Objekte einer weiteren Invariantentheorie, die als „*Geometrie auf dem algebraischen Gebilde*" (I B 1c, *Landsberg;* II B 2, *Wirtinger;* III A B 4 a, *Fano*, Nr. 32; III C 4, *Berzolari*, Nr. 23—34; III C 5, 7, 10) bezeichnet wird, und eine Erweiterung der in Nr. 21 besprochenen Ideen bildet (wie in *Klein*s Programmschrift, § 8, 1) bereits angedeutet ist).

b) Derselbe Grundgedanke findet auch bei weiteren Transformationsgebieten Anwendung[179]); wir gelangen dadurch zu anderen Invariantentheorien, welche sämtlich als „Geometrien (auf) einer gegebenen Mannigfaltigkeit" bezeichnet werden (insofern immer nur diese Mannigfaltigkeit in Betracht kommt, unbekümmert darum, wie sich die bezüglichen Transformationen außerhalb dieser verhalten; unbekümmert selbst darum, ob sie sich in der zugrunde liegenden Raumform irgendwie fortsetzen lassen).

Fassen wir solche Punkttransformationen ins Auge, welche die *Bogenlängen* (und folglich auch die Winkelgrößen) auf einer vorgelegten Mannigfaltigkeit ungeändert lassen, und zwar nur insoweit sie sich auf diese Mannigfaltigkeit beziehen, was etwa dadurch geschehen kann, daß wir sie uns als „Biegungen" (Deformationen ohne Ausdehnung) denken, so gelangen wir zur *metrischen Geometrie auf der gegebenen Mannigfaltigkeit,* die im Falle zweier Dimensionen mit einem wesentlichen Bestandteile der *Gaußschen Theorie der krummen Flächen*[154]) zusammenfällt. Dahin gehören die Fragen nach den Krümmungsverhältnissen der vorgelegten Mannigfaltigkeit, nach den geodätischen Linien, usw. Flächen, welche vom Standpunkte dieser Geometrie aus (eventuell auf geeignete Bereiche eingeschränkt) identisch sind, nennt man auf einander „abwickelbar". *A. Voß* bezeichnet sie als „isometrische Flächen"[180]).

c) Ebenso können wir uns eine *Analysis situs* einer bestimmten Mannigfaltigkeit, beispielsweise einer Fläche, unabhängig von dem umgebenden Raume denken. *F. Klein* hat zuerst ausdrücklich darauf hingewiesen[181]), daß die Eigenschaften eines Gebildes, welche bei beliebigen Verzerrungen erhalten bleiben, sich in „absolute" und „relative" sondern; erstere kommen dem Gebilde unabhängig von dem umfassenden Raume zu; letztere (z. B. die Gesamtkrümmung einer

---

179) *F. Klein,* Erlanger Programm, § 8, 1, 2. S. auch: *F. Enriques*, Conferenze di geometria (autogr. Vorlesung), Bologna 1895, Nr. 28.

180) Math. Ann. 46 (1895), p. 97; cf. III D 6a Nr. 2, 15 ff.

181) Über den Zusammenhang der Flächen, Math. Ann. 9 (1875), p. 476. S. auch: Erlanger Programm, a. a. O.

ebenen Kurve oder einer Fläche) sind nur invariant bei Verzerrungen dieses Raumes (Nr. 25), nicht aber bei beliebigen Verzerrungen des Gebildes. Der Zusammenhang einer Fläche, insbesondere der Begriff einer „einseitigen Fläche" oder „Doppelfläche" (d. h. einer Fläche, auf welcher man durch kontinuierliches Fortschreiten von einer Flächenseite zur anderen gelangen kann[182]) (III A B 3, *Dehn* und *Heegaard*, Nr. 2), läßt sich, wie *Klein* hervorgehoben hat, so definieren, daß er als ein absolutes Charakteristikum gelten kann. Flächen gleichen Zusammenhanges sind Flächen, die ausnahmslos ein-eindeutig und stetig (unbekümmert um den umgebenden Raum) aufeinander bezogen werden können[183]).

II. Gegenseitige Beziehung verschiedener Geometrien in gruppentheoretischer Hinsicht.

27. Geometrien mit ähnlichen Gruppen. Projektive Geometrie im binären Gebiete. Haben wir den Gruppenbegriff jeder geometrischen Theorie zugrunde gelegt, so leuchtet auch ein, daß „ähnliche", d. h. durch irgend eine Transformation ineinander überführbare Gruppen stets Geometrien, d. h. Invariantentheorien liefern werden, die im wesentlichen zusammenfallen (in dem Sinne, daß jeder Satz und jede Invariante der einen durch die betreffende Transformation einen entsprechenden Satz oder eine Invariante der anderen ergeben wird). Das hat *F. Klein* in seiner Programmschrift von 1872, § 4 hervorgehoben, und durch zahlreiche Beispiele erläutert[184]).

---

182) Nach einer Mittheilung *P. Stäckels* (Math. Ann. 52 (1899), p. 598) sind *A. F. Möbius* und *J. B. Listing*, beide mit der Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes über Polyeder beschäftigt, fast gleichzeitig (1858) und unabhängig voneinander zur Entdeckung der einseitigen Flächen gelangt; ersterer im Aufsatze: Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders (Leipzig Ber. 17 (1865), p. 31 = Werke 2 (Leipzig 1886), p. 473, s. insbes. § 9); letzterer in der bereits früher veröffentlichten Abhandlung über den Zensus räumlicher Komplexe (Gött. Abh. 10, 1862).

183) Diese Betrachtungen haben auch für algebraische Probleme ihre Bedeutung. Betrachtungen aus der Analysis situs der Flächen bildeten die Grundlage von *Riemanns* Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale (Theorie der Abelschen Funktionen, Jour. f. Math. 54 (1857), p. 115 = Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 81; 2. Aufl. 1892; II B 2, *Wirtinger*). Ebenso hat *E. Picard* zum Aufbau der Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Veränderlichen Konnexionsbetrachtungen über reelle vierdimensionale Mannigfaltigkeiten herangezogen (J. de math. (4) 5 (1889), p. 135; *E. Picard* u. *G. Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes 1 (Paris 1897), insb. chap. 4) (III A B 4a, *Fano*, Nr. 32, p. 275; III C 10, *Castelnuovo* und *Enriques*).

184) Weitere Beispiele sind in dem Aufsatze: „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie" enthalten (Math. Ann. 5 (1872), p. 257).

Da die Wahl des Raumelementes unwesentlich ist, kommt es gar nicht darauf an, ob die betreffende Transformation die Raumelemente der einen Geometrie in die der zweiten oder nur in einen anderen Körper überführt.

Als erstes Beispiel mag folgendes angeführt werden:

Die projektive Geometrie eines Gebildes 1. Stufe, d. h. die Theorie der binären Formen, deckt sich mit der projektiven Geometrie der Ebene unter Auszeichnung eines Kegelschnittes. Letztere geht nämlich in erstere über durch die einfache Transformation:

$$y_1 = x_1^2, \qquad y_2 = x_1 x_2, \qquad y_3 = x_2^2$$

wobei $y_1 y_3 - y_2^2 = 0$ die Gleichung des ausgezeichneten Kegelschnittes in der Ebene $y_1 : y_2 : y_3$ ist; die geraden Linien der Ebene werden in die „Elementenpaare" des einstufigen Gebildes überführt.

Diesen Zusammenhang hat in der Hauptsache bereits *O. Hesse* hervorgehoben[185]), indem er durch eine Gleichung:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

wo A, B, C lineare Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y in der Ebene bedeuten, eine eindeutig-umkehrbare Beziehung zwischen den Punkten dieser Ebene und den Punktepaaren einer geraden Linie herstellte. Punkten (x, y) einer geraden Linie der Ebene entsprechen Punktepaare einer und derselben Involution; und die aus zusammenfallenden Elementen bestehenden Punktepaare werden in der Ebene durch die Punkte (x, y) des Kegelschnittes $B^2 - AC = 0$ abgebildet.

Auch bei dieser Abbildung gehen die linearen Transformationen der geraden Linie in die Kollineationen der Ebene über, welche den Kegelschnitt $B^2 - AC = 0$ in sich überführen.

Den obigen Satz dürfen wir auch folgendermaßen aussprechen: *Die projektive Geometrie eines Gebildes 1. Stufe ist mit der allgemeinen projektiven Maßbestimmung in der Ebene* (Nr. **9**, **31**) *gleichbedeutend.*

28. Fortsetzung. Projektive Deutung der binären Formen auf der rationalen Normalkurve n^{ter} Ordnung. Das „*Hesse*sche Übertragungsprinzip" läßt sich auf ein beliebiges n erweitern (wie *F. Klein* in seiner Programmschrift § 4 betont und *W. Fr. Meyer*[186])

---

185) Ein Übertragungsprinzip, J. f. Math. 66 (1866), p. 15 = Ges. Werke, München 1897, p. 531.

186) Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883. Es war eine Hauptleistung dieses Buches, das *Hesse-Klein*sche Übertragungsprinzip einerseits mit

ausgeführt hat). Die $n+1$ Koeffizienten a_i einer allgemeinen binären Form n^{ter} Ordnung:

$$(1) \qquad f \equiv a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n$$

oder auch der Gleichung:

$$(1') \qquad a_0 \lambda^n + n a_1 \lambda^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

wo $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ gesetzt worden ist, deuten wir als projektive homogene Punktkoordinaten im R_n, und ordnen jedem Punkt-n-tupel $f = 0$ auf der geraden Linie den Punkt $(a_0 a_1 \ldots a_n)$ des R_n als entsprechend zu. Den Punkt-n-tupeln, die aus lauter zusammenfallenden Punkten bestehen, entsprechen im R_n die Punkte der rationalen Normalkurve n^{ter} Ordnung:

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{matrix} \right\| = 0,$$

welche dadurch eindeutig-umkehrbar auf das Gebiet der λ-Werte, d. h. auf die ursprüngliche gerade Linie abgebildet wird. Die linearen Transformationen dieser geraden Linie bilden sich dann als die ∞^3 automorphen projektiven Umformungen jener Normalkurve ab, d. h. als die ∞^3 Kollineationen des R_n, welche die Normalkurve in sich überführen (Nr. 8a)[187].

Die projektive Geometrie eines Gebildes 1. Stufe deckt sich mit der projektiven Behandlung des R_n unter Auszeichnung einer rationalen Normalkurve n^{ter} Ordnung.

Man kann auch von der Abbildung der geraden Linie auf die Normalkurve (2) ausgehen, indem man dem Punkte $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ der geraden Linie den Punkt:

$$(3) \qquad a_i = (-\lambda)^i$$

der Normalkurve als entsprechend zuweist; jedem Punkt-n-tupel (1) oder (1′) auf ersterer wird dann ein Punkt-n-tupel auf letzterer, und folglich der dieses Punkt-n-tupel ausschneidende R_{n-1} zugeordnet; und der Punkt $(a_0 a_1 \ldots a_n)$ des R_n ist der Pol dieses R_{n-1} in bezug auf die Normalkurve (2).

---

dem Apolaritätsprinzip, anderseits mit der Theorie der elementaren symmetrischen Funktionen in organische Verbindung gebracht zu haben.

187) Die Invarianten und Kovarianten der binären Form (1) liefern, gleich Null gesetzt (die Kovarianten, durch identisches Nullsetzen) alle Gebilde, welche bei der dreigliedrigen projektiven Gruppe der Normalkurve in sich übergehen (*G. Fano,* Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè, Torino Mem. (2) 46, 1895—96).

Dadurch gewinnen wir die einfachste geometrische Deutung der Theorie der binären Formen n^{ter} Ordnung. Als Bild der Nullstellen einer Form n^{ter} Ordnung dürfen wir nach Belieben entweder ein Punkt-n-tupel auf der Normalkurve, oder den dadurch bestimmten R_{n-1}, oder endlich dessen Pol in bezug auf die Normalkurve betrachten; je nach den Umständen wird das eine oder das andere Bild vorzuziehen sein. Die Theorie der Polarität, der Reduktion binärer Formen auf kanonische Formen usw., läßt sich dadurch in sehr einfacher Weise geometrisch auffassen.

Zwei Formen n^{ter} Ordnung sind *apolar* oder *konjugiert* (d. h. sie haben eine verschwindende bilineare Simultaninvariante), wenn der Bildpunkt der einen dem Bild-R_{n-1} der anderen angehört (d. h. wenn ihre Bildpunkte in der durch die Normalkurve bestimmten Polarität konjugiert sind)[188]): bei ungeradem n ist jede Form zu sich selbst apolar, d. h. jeder R_{n-1} enthält seinen Pol. Allgemeiner heißt irgend eine Punktgruppe g_k zu G_n „apolar" wenn der Bildpunkt von G_n dem durch g_k (im R_n) bestimmten R_{k-1} angehört; besteht g_k aus lauter verschiedenen Elementen $X_1 = 0, \ldots, X_k = 0$, so läßt sich G_n in der Form $X_1^n + X_2^n + \cdots + X_k^n = 0$ darstellen. Die Frage nach allen zu G_n apolaren Punktgruppen ist mit der geometrischen Frage gleichbedeutend, von einem Punkte A des R_n die R_{k-1} zu ziehen, welche die Normalkurve in je k Punkten treffen. Bei gegebenem A ist, allgemein zu reden, für k ein Minimalwert $\left(\leqq \frac{n+1}{2}\right)$ vorhanden. Bei ungeradem n und allgemeiner Lage von A ist eine einzige Lösung $k = \frac{n+1}{2}$ möglich; d. h. eine allgemeine binäre Form ungerader Ordnung n läßt sich auf eine einzige Weise als Summe von $\frac{n+1}{2}$ n^{ten} Potenzen darstellen. Die Bedeutung und den gegenseitigen Zusammenhang dieser und anderer *kanonischer* algebraischer Formen in der Geometrie hat *F. Meyer*[186]) eingehend verfolgt (s. auch II B 2, Invariantentheorie, *Meyer*, Nr. **24**).

Eine einfache geometrische Deutung erhalten auch die Fragen, in denen die Bestimmung einer Involution I_n^r, d. h. eines linearen Systems binärer Formen, durch die Angabe einzelner Elemente ge-

188) Geometrische Erläuterungen der Apolaritätsverhältnisse sind in *Fr. Meyer*'s „Apolarität" zu finden; s. auch *O. Schlesinger*, Diss. Breslau 1882, mit einigen Änderungen und Zusätzen abgedruckt in Math. Ann. 22 (1883), p. 520; *F. Lindemann*, Paris S. M. Bull. 5 (1877), p. 113; 6 (1878), p. 195; Math. Ann. 23 (1884), p. 111; *L. Berzolari*, Napoli Rend. (2) 5 (1891), p. 35, 71; Ann. di mat. (2) 19 (1891/92), p. 269; ebenda 21 (1893), p. 1.

wisser Formen (in größerer Anzahl als $r+1$) verlangt wird[189]). Das kommt darauf hinaus, im R_n einen linearen Raum zu bestimmen, der sich auf eine gewisse Anzahl gegebener Räume „stützt". Darunter sei die Frage erwähnt nach den I_n^1, d. h. nach den Formenbüscheln, die eine vorgelegte *Jacobi*sche Kovariante besitzen[190]); also nach den R_{n-2} des R_n, welche $2(n-1)$ bestimmte Tangenten der Normalkurve (d. h., allgemein, ebenso viele gerade Linien) treffen; ihre Anzahl ist $= \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$[191]).

29. Ausdehnung auf beliebige lineare Systeme algebraischer Formen. Der Grundgedanke des *Hesse-Klein*schen Übertragungsprinzips, welcher darauf hinauskommt, das lineare System aller binären Formen n^{ter} Ordnung durch die Punkte (oder durch die R_{n-1}) des R_n darzustellen, läßt sich auf jedes lineare System algebraischer Formen anwenden. Betrachten wir ein lineares System n^{ter} Stufe von Formen mit $k+1$ Variabeln ($n>k$):

$$(1) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0,$$

so können wir einerseits diese Variabeln als homogene Punktkoordinaten im R_k deuten, andererseits aber die Parameter $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als homogene Koordinaten eines Punktes, oder (noch besser) eines R_{n-1} im R_n. Dann scheidet jeder Punkt P von R_k aus (1) ein lineares System $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe aus, welches, allgemein zu reden, außer P selbst und den eventuellen Grundpunkten von (1) keine anderen Grundelemente besitzt; diesem linearen System entspricht in R_n ein ebensolches System (d. h. ein ∞^{n-1}-Bündel) von R_{n-1}, und folglich ein Punkt P', der Mittelpunkt dieses Bündels. Den Punkten P von R_k werden dadurch die Punkte P' einer rationalen M_k des R_n eineindeutig zugeordnet (welche aus R_k durch die einfache Transformation $y_i = f_i(x)$ hervorgeht); *die Invariantentheorie des linearen Systems* (1) *deckt sich dann mit der projektiven Geometrie dieser* M_k (vgl. Nr. 8, 22).

Für $k=1$ ist das lineare System (1) eine Involution n^{ter} Stufe und irgend einer Ordnung $m \geqq n$ im binären Gebiet; diese Involution

189) Vgl. *W. Fr. Meyer,* Apolarität, p. 320; Math. Ann. 21 (1883), p. 125.

190) Diese Frage kommt für $n=4$ schon bei *C. Stéphanos* vor (Paris C. R. 93 (1881), p. 994, sowie die dort angekündigte Abhandlung: Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne, Par. sav. étr. (2) 27 (1883)). Weitere Ausführungen bei *A. Brill* (Math. Ann. 20 (1882), p. 334); *C. Stéphanos* (Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), p. 351); *D. Hilbert* (Math. Ann. 33 (1889), p. 227).

191) *H. Schubert*, Hamburg Math. Ges. Mitt. April 1884; Math. Ann. 26 (1886), p. 26; Acta math. 8 (1886), p. 97 (III C 3, *Zeuthen*, Nr. 26).

wird durch eine rationale Kurve C^m des R_n dargestellt, auf welcher die einzelnen Punktgruppen durch die R_{n-1} ausgeschnitten werden (für $m = n$, s. Nr. 28).

Für $k = 2$ ergibt sich die in der neueren Geometrie fortwährend auftretende eindeutige Abbildung der rationalen Flächen auf die Ebene, so daß die Kurven des linearen Systems (1) den ebenen Schnittkurven dieser Fläche entsprechen; die Ordnung der Fläche wird durch die Anzahl der veränderlichen Schnittpunkte von je zwei Kurven (d. h. durch den „Grad") des Systems (1) gegeben. Besteht das System (1) aus allen ternären quadratischen Formen, so ergibt sich eine Fläche vierter Ordnung F^4 des R_5, deren geometrische Eigenschaften gelegentlich von *A. Cayley*[192]) berührt, und ausführlich durch *G. Veronese*[193]) erörtert wurden. *Die lineare Invariantentheorie der ternären quadratischen Formen deckt sich also mit der projektiven Behandlung dieser* F^4, wie auch *C. Segre* hervorgehoben hat[194])[195]).

Die Formen des linearen Systems (1) dürfen auch mehrere Reihen von Variabeln enthalten. Deutet man diese Variabelnreihen als homogene Punktkoordinaten in ebenso vielen Räumen R_h, R_k, . . ., so gelangt man, im Falle des umfassendsten linearen Systems, durch eine Abbildung $X_{lm}\ldots = x_l y_m \ldots$ zu einer Mannigfaltigkeit $M_\varrho(\varrho = h + k + \cdots)$, welche im obigen Sinne das System aller Punktgruppen darstellt, die aus je einem Punkte eines jeden der Räume R_h, R_k, . . . bestehen. Die einfachsten Fälle dieser Art hat ebenfalls *C. Segre*[196]) besprochen.

Das System aller binären bilinearen Formen:

---

192) On the Curves which satisfy given Conditions, Lond. Trans. 158 (1868), p. 75 = Coll. math. papers 6, p. 191. S. insbes. Nr. 16.

193) La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine . . ., Roma Lincei Mem. (3) 19 (1884).

194) Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano . . ., Torino Atti 20 (1884—1885), p. 487.

195) In seinen Untersuchungen über die Geometrie der Kegelschnitte und deren Charakteristikenproblem hat *E. Study* die ∞^5-Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte einer Ebene, als Örter von Punkten und geraden Linien gleichzeitig aufgefaßt, einmal (Math. Ann. 27 (1886), p. 58) auf gewisse durch eine quadratische Transformation verbundene Elementenpaare des R_5 abgebildet, ein zweites Mal aber (ebenda 40 (1892), p. 551, 563) auf die Punkte einer $M_5{}^{102}$ des R_{27}. Dadurch kommt er ebenfalls zur Betrachtung der obigen F^4 und der damit zusammenhängenden Fragen. Entsprechende Untersuchungen über die geometrische Deutung von Systemen beliebiger ternärer Formen hat *Study* im Lehrbuche „Methoden zur Theorie der ternären Formen" (Leipzig 1889) durchgeführt; s. insb. § 12.

196) Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, Palermo Rend. 5 (1891), p. 192.

$$f \equiv a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

welche, gleich Null gesetzt, als projektive Beziehungen zweier einstufiger Gebilde gedeutet werden können, hat *C. Stéphanos* auch in anderer Weise geometrisch dargestellt. Jeder Projektivität $f = 0$ läßt er im Raume R_3 den Punkt $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ entsprechen. Als Fundamentalgebilde im R_3 ergeben sich: 1) die Oberfläche 2. Grades $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ (bei reellem Grundtetraeder ein einschaliges Hyperboloid), deren Punkte den ausgearteten Korrespondenzen entsprechen; 2) die Ebene $a_{12} = a_{21}$ der involutorischen Beziehungen; 3) der Durchschnitt von 1) und 2), nämlich der (nicht zerfallende) Kegelschnitt der parabolischen Involutionen[197]).

Lassen wir jetzt jeder projektiven Umformung B ihre „transformierte" durch eine feste nicht ausgeartete Projektivität A (d. h. die Umformung $B_A \equiv A^{-1}BA$) entsprechen, so werden die bezüglichen Bildpunkte in R_3 homographisch einander zugeordnet; variiert A, so ergeben sich ∞^3 verschiedene Kollineationen, welche die Fläche 1) und zugleich die Ebene 2) in sich überführen. *Die Invariantentheorie der binären bilinearen Formen* (d. h. der projektiven Beziehungen in einem Gebilde 1. Stufe) *ist also mit der projektiven Geometrie des Systems einer nicht ausgearteten Fläche 2. Grades und einer diese Fläche nicht berührenden Ebene gleichbedeutend.*

30. Weitere Beispiele von Geometrien mit ähnlichen Gruppen. Als solche mögen noch die folgenden Beispiele erwähnt werden:

a) *Die Geometrie der projektiven und antiprojektiven*[16]) *Umformungen eines komplexen Gebildes 1. Stufe deckt sich mit der Geometrie der reziproken Radien in der reellen Ebene*, oder auch *mit der projektiven Geometrie auf der reellen Kugelfläche.* Bei Darstellung der komplexen Variabeln $x + iy$ in der reellen Ebene (I A 4, *Study*, Nr. **5**) oder auf der *Riemann*schen Kugelfläche (II B 1, *Osgood*, Nr. **8**; s. auch III A, B 4a, *Fano*, Nr. **16**), werden nämlich die (von sechs reellen Parametern abhängigen) linearen Transformationen von $x + iy$ und die weiteren Transformationen, bei welchen $x' + iy'$ eine lineare (im allgemeinen gebrochene) Funktion von $x - iy$ ist, durch die direkten und inversen Kreisverwandtschaften der Ebene (vgl. Nr. **11**), oder durch die ∞^6 projektiven Transformationen der $x + iy$-Kugel gedeutet

---

197) Mémoire sur la représentation des homographies binaires ..., Math. Ann. 22 (1883), p. 299. Die Darstellung der Involutionen durch die Punkte der Ebene $a_{12} = a_{21}$ deckt sich mit der *Hesse*schen Darstellung der Punktepaare einer geraden Linie — nämlich der Paare von Doppelelementen der einzelnen Involutionen — ebenfalls durch die Punkte jener Ebene (vgl. Nr. 27).

(wobei auf der Kugel, je nach den beiden Fällen, entweder jede einzelne Schar imaginärer Erzeugender in Ruhe bleibt, oder beide Scharen vertauscht werden[198]). Diese Gruppen der Ebene und der Kugelfläche gehen durch stereographische Projektion ineinander über. Besonders ist von diesem Standpunkte aus die geometrische Deutung der binären Formen in der Ebene und auf der Kugel untersucht worden. Quadratische und kubische Formen in der *Gauß*schen Ebene treten bereits bei *E. Beltrami* auf[199]; die Darstellung der biquadratischen Formen, und überhaupt aller Formen mit linearen Transformationen in sich (insbesondere der „Formen der regulären Körper") auf der Kugel hat *F. Klein* eingehend erörtert[200]; weitere Ausführungen lieferte *L. Wedekind*[201]).

Durch Festlegung eines Punktes auf der Kugelfläche reduziert sich die obige Gruppe auf eine viergliedrige Untergruppe, welche sich vom festen Punkte aus stereographisch als die Hauptgruppe der Ebene (Nr. 4) projiziert. Also:

a') *Die Elementargeometrie der Ebene ist mit der projektiven Behandlung einer Kugelfläche unter Hinzunahme eines ihrer Punkte gleichbedeutend*[202]). Durch diese viergliedrigen Gruppen werden die Transformationen gedeutet, bei welchen $x' + iy'$ eine lineare und ganze Funktion mit komplexen Koeffizienten von $x + iy$ oder von $x - iy$ ist.

a'') *Die Elementargeometrie der hyperbolischen oder der elliptischen Ebene ist gleichbedeutend mit der projektiven Behandlung einer Kugelfläche unter Hinzunahme eines außerhalb oder innerhalb der Kugel liegenden Punktes*; und zwar durch die (2, 1)-deutige Projektion vom festgehaltenen Punkte aus[203]). Im zweiten Falle kann der feste Punkt

---

198) In der Hauptsache tritt diese Deutung schon bei *A. F. Möbius* auf (Leipzig Ber. 4 (1852), p. 41 = Werke 2, p. 189; sowie die beiden Anm. 72) erwähnten Abhandlungen über Kreisverwandtschaften). Gelegentlich wird die geometrische Bedeutung der linearen Substitution von $x + iy$ auf der Kugel auch in *Riemanns* Abhandlung über Minimalflächen berührt (Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 287, insb. Nr. 8; 2. Aufl. 1892). Prinzipiell wird die Sache bei *F. Klein* entwickelt (Erlanger Programm, § 6; Math. Ann. 9 (1875), p. 183, insb. p. 185).

199) Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche, Bologna Mem. (2) 9 (1869), p. 607 = Opere mat. 2 (Milano 1904), p. 129.

200) Erlanger Programm (Note VIII); Math. Ann. 9 (1875), p. 183; Vorlesungen über das Ikosaeder usw., Leipzig 1884.

201) Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen, Diss. Erlangen 1875; Math. Ann. 9 (1875), p. 209. Vgl. auch *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie 2 (Leipzig 1891), p. 606 u. ff.

202) *Klein*, Erlanger Programm, § 4.

203) *Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie (autogr. Vorlesung), Göttingen 1892, 2, p. 159 (2. Aufl. 1894).

mit dem Mittelpunkte der Kugel identifiziert werden; wir bekommen dann *die Euklidische Geometrie der Kugelfläche.* Die zugehörige 3-gliedrige Gruppe linearer Transformation von $x + iy$[204]) ist zugleich auch die Gruppe, durch welche, bei den ∞^6 Bewegungen des elliptischen Raumes, die ∞^3 Vertauschungen der Erzeugenden einer jeden Schar auf der imaginären Fundamentalfläche dargestellt werden. Da nun die obigen ∞^6 Bewegungen durch Zusammensetzung dieser beiden 3-gliedrigen Gruppen der einzelnen Scharen von Erzeugenden entstehen, so ergibt sich weiter[205]):

a''') *Die elliptische Raumgeometrie ist identisch mit der Euklidischen Geometrie auf zwei Kugelflächen*; insbesondere entsprechen den linksseitigen und rechtsseitigen Schiebungen die Drehungen der einen (linken) oder der anderen (rechten) Kugelfläche. Die Mannigfaltigkeit aller reellen „orientierten" Geraden (oder *Speere*) des elliptischen Raumes läßt sich eindeutig-umkehrbar auf die Mannigfaltigkeit aller Punktepaare abbilden, die aus je einem (reellen) Punkte einer jeden der beiden Kugeln bestehen, so daß die obige Gruppenabbildung stattfindet[205]).

b) *Die projektive Geometrie in der komplexen Ebene deckt sich mit der dual-projektiven Geometrie des (reellen) hyperbolischen Raumes* (Nr. **17**).

c) *Die projektive Geometrie des komplexen* R_3 *ist mit der höheren oder Lie'schen Kugelgeometrie* (Nr. **13**) *gleichbedeutend*, weil die ihnen zugrunde liegenden Gruppen, falls man in der einen die gerade Linie, in der anderen die Kugel als Raumelement einführt, durch eine von *S. Lie* entdeckte[84]) bemerkenswerte Berührungstransformation ineinander übergehen[206]).

---

204) Die allgemeine Formel für diese linearen Transformationen, d. h.

$$z' = \frac{(d + ic)\,z - (b - ia)}{(b + ia)\,z + (d - ic)}$$

(mit reellen a, b, c, d), tritt als bilineare Gleichung bei *A. Cayley* auf (Math. Ann. 15 (1879), p. 238; Papers 10, p. 153). S. auch: *Klein,* Vorlesung über das Ikosaeder usw., p. 34. Die Formel war jedoch schon *Gauß* bekannt (Werke 8 (Leipzig 1900), p. 355). Über die grundlegende Verwendung derselben in der Mechanik starrer Körper vgl. *F. Klein-A. Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, Heft 1—3, Leipzig 1897, 1898, 1903.

205) *E. Study*, Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 11 (1902), p. 313, insb. p. 318 ff.; ebenda 15 (1906), p. 476; Amer. J. 29 (1907), p. 116 ff. S. auch *J. S. Coolidge,* Les congruences isotropes usw., Torino Atti 39 (1903—04), p. 175.

206) Auf gerade Linien und Kugeln bezogen, ist diese Transformation (2, 1)-deutig; jeder geraden Linie ordnet sie *eine* Kugel, jeder Kugel aber *zwei* gerade Linien r und r' zu. Nur für eine Punktkugel fallen diese beiden geraden Linien zusammen; eine solche Gerade gehört einem bestimmten linearen Komplexe an, in bezug auf welchen r und r', wenn voneinander verschieden, kon-

Wir betonen aber, daß *dieses nur unter Zulassung imaginärer Elemente gilt.* Diese beiden Geometrien fallen nämlich mit der projektiven Behandlung einer nicht ausgearteten M_4^2 des R_5 zusammen; aber von reellem Standpunkte aus unterscheiden sie sich darin, daß die zugehörigen M_4^2 im Sinne des Trägheitsgesetzes zu verschiedenen (indefiniten) Typen gehören (Nr. **9, 10, 13**).

Die *Geometrie der reziproken Radien in* R_4 ist ebenfalls, unter Zugrundelegung homogener hexasphärischer Koordinaten, mit der projektiven Behandlung einer M_4^2 des R_5 und folglich im komplexen Gebiet mit den beiden obigen Geometrien gleichbedeutend. Bei Einschränkung auf Realität unterscheidet sie sich aber von ihnen und gehört einem dritten Typus an (s. Nr. **11, 13**).

c′) Durch die obige Berührungstransformation gehen, ebenfalls im komplexen Gebiet, ineinander über:

1) *Die projektive Geometrie des* R_3 *mit Auszeichnung eines allgemeinen linearen Komplexes und die niedere Kugelgeometrie* (oder *Geometrie der reziproken Radien*). Beide dürfen als projektive Behandlungsweisen des Punktraumes R_4 mit Auszeichnung einer nicht ausgearteten M_3^2 aufgefaßt werden, und sind folglich den bei c) aufgezählten Geometrien analog; sie unterscheiden sich von diesen nur hinsichtlich der Dimensionenanzahl[207]).

2) *Die projektive Geometrie des* R_3 *mit Auszeichnung eines allgemeinen linearen Komplexes und einer in diesem Komplex enthaltenen speziellen linearen Kongruenz* (d. h. einer Kongruenz mit zusammenfallenden Leitstrahlen) *und die metrische Geometrie des* (Euklidischen) R_3.

d) Allgemeiner, bei beliebigem n ($\geqq 4$): *Die projektive Behandlung einer nicht ausgearteten* M_{n-1}^2 *des* R_n *deckt sich mit der Geometrie der reziproken Radien* (oder *niederen Kugelgeometrie*) *des* R_{n-1} *und mit der höheren Kugelgeometrie des* R_{n-2} (immer unter Zulassung imaginärer Elemente)[208]).

31. Geometrien, von deren Fundamentalgruppen die eine in der anderen als Untergruppe enthalten ist. Einordnung der

---

jugierte Polaren sind. Dadurch wird dieser lineare Komplex auf den Punktraum abgebildet. Diese letzte Abbildung hatte früher *M. Noether* gelegentlich gegeben (Zur Theorie der algebraischen Funktionen, Gött. Nachr. 1869, p. 298).

207) Metrische Analogien zwischen der Geometrie der reziproken Radien und der projektiven Geometrie im R_3 (wobei *Punkt* und *gerade Linie*, *Kugel* und *linearer Komplex* entsprechende Gebilde sind) hat *C. Segre* hervorgehoben (Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere..., Torino Atti 19 (1883), p. 159).

208) *F. Klein,* Über Liniengeometrie und metrische Geometrie, Math. Ann. 5 (1872), p. 257, insb. p. 267; Höhere Geometrie 1, p. 467 ff.

Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie in die projektive. In *Kleins* Programmschrift (§ 2) wird auch die Frage behandelt nach der gegenseitigen Beziehung zweier Geometrien, von deren Fundamentalgruppen die eine in der anderen als Untergruppe enthalten ist.

Die sämtlichen Eigenschaften beliebiger Gebilde, welche in der zweiten Geometrie (die die umfassendere Gruppe hat) zur Geltung kommen, treten auch in der ersten Geometrie auf; nicht aber umgekehrt. Läßt sich aber die erste Gruppe aus der zweiten dadurch ausscheiden, daß sie aus allen Transformationen besteht, die ein bestimmtes Gebilde Γ in sich überführen, so können die in der ersten Geometrie auftretenden Eigenschaften der Figuren auch als der zweiten Geometrie angehörig aufgefaßt werden; doch nicht als Eigenschaften dieser Figuren *an sich*, sondern als Eigenschaften des aus diesen Figuren und dem Gebilde Γ bestehenden Systems.

Wir dürfen folglich die erste Geometrie als einen Teil der zweiten ansehen; dieser Teil wird dadurch charakterisiert, daß man den zu untersuchenden Gebilden das Gebilde Γ „adjungiert".

Als klassisches Beispiel erwähnen wir zunächst die *Einordnung der Elementargeometrie* (oder Euklidischen Metrik) *in die reelle projektive Geometrie durch Einführung* (im R_3) *des imaginären Kugelkreises* (d. h. eines nullteiligen Kegelschnittes mit reeller Gleichung in der unendlich fernen Ebene) *als Gebilde Γ;* sodann auch *die Einordnung der Nicht-Euklidischen Metrik* wieder *in die projektive Geometrie durch Festlegung einer nicht ausgearteten Fläche 2. Grades*, und zwar die elliptische Metrik durch eine nullteilige Fläche, die hyperbolische dagegen durch eine einteilige aber nicht geradlinige Fläche.

Die erste Betrachtung des Kugelkreises geht auf *Poncelet* zurück (III AB 4a, *Fano,* Nr. 7); aber bei ihm, sowie auch bei *Plücker* und *Chasles* (ebenda Nr. **11**, **12**), wird von den Kreispunkten und dem Kugelkreise nur gelegentlich Gebrauch gemacht, um metrische Sätze projektiv aufzufassen. *E. Laguerre* fragte sich[209]), was aus einem Winkel durch Projektion, oder allgemeiner durch homographische Transformation wird, und sprach den Satz aus, daß der Winkel zweier Geraden gleich dem durch $2i$ dividierten Logarithmus eines gewissen Doppelverhältnisses ist, daß man folglich jede Beziehung zwischen Winkeln projektiv auffassen kann. Erst bei *A. Cayley*[210]) treten einer-

---

209) Sur la théorie des foyers, Nouv. Ann. 12 (1853), p. 57 = Werke 2, p. 6. S. insbes. Nr. 4.

210) A Sixth Memoir on Quantics, Lond. Trans. 149 (1859), p. 61 = Coll. math. papers 2, p. 561. S. insbes. Nr. 209 u. ff. („on the theory of distance").

seits die Formeln für den Abstand zweier Punkte und für den Winkel zweier Geraden auf, als simultane Invarianten der Gleichungen dieser beiden Elemente und der Gleichung des „absoluten“ Gebildes; andererseits aber auch, implicite, der Ansatz für den Nicht-Euklidischen Fall, indem (in der Ebene) die beiden Kreispunkte durch einen nicht ausgearteten Kegelschnitt ersetzt werden. Zerfällt dieser Kegelschnitt als Enveloppe seiner Tangenten in die beiden Büschel, welche die Kreispunkte zu Mittelpunkten haben, so liefern die *Cayley*schen Formeln im Grenzfall die Formeln der Euklidischen Metrik[211]). *Cayley* kommt dadurch zu dem Schlusse: „the metrical properties of a figure are not the properties of the figure considered *per se* apart from everything else, but its properties when considered in connexion with another figure, viz. the conic termed the absolute“; und daß „metrical geometry is a part of descriptive geometry“; von dieser (d. h. von der projektiven Geometrie) geht man zu jener über durch Festlegung des absoluten Gebildes „as a standard of reference“.

Den geometrischen Inhalt der allgemeinen *Cayley*schen Maßbestimmung und den Umstand, daß diese nicht nur durch geeignete Partikularisation die Euklidische Metrik ergibt, sondern in derselben Beziehung auch zu den Maßgeometrien steht, die sich den Parallelentheorien von *Gauß-Lobatschewsky-Bolyai* und den verwandten Betrachtungen von *Riemann* und *Helmholtz* anschließen, hat *F. Klein* auseinandergesetzt[212]). Er hat zugleich die axiomatische Seite des Ansatzes herausgearbeitet (III A B 1, *Enriques*, Abschn. IV), und durch Heranziehen der Gruppentheorie das Ganze systematisch aufgefaßt und geordnet[213]).

So wird der metrischen Geometrie innerhalb der projektiven eine präzise Stellung erteilt. Jeder Satz aus der projektiven Geometrie des R_3, in welchem eine invariante Fläche 2. Grades auftritt, kann

---

Vgl. die übersichtliche Darstellung bei *R. Fricke-F. Klein*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig 1897, Einleitung.

211) Diese *Cayley*schen Betrachtungen hat *W. Fiedler* sofort in seine Lehrbücher aufgenommen und ausführlicher dargelegt (Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862, Art. 24, 25; Analytische Theorie der Kegelschnitte, nach *G. Salmon* frei bearbeitet, 2. Aufl., Leipzig 1866, Art. 366 u. ff.).

212) Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. 4 (1871), p. 573.

213) Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, II, Math. Ann. 6 (1873), p. 112. Diese Abhandlung enthält auch einen Ansatz für den n-dimensionalen Fall und den Beweis der Möglichkeit, die projektive Geometrie ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms nach dem Vorgange *v. Staudts* aufzubauen. Nachtrag ebenda 7 (1874), p. 531.

als eine Eigenschaft der allgemeinen *Cayley*schen Maßbestimmung aufgefaßt werden. Bleibt er noch bestehen, wenn die Fläche als Enveloppe in einen Kegelschnitt ausartet, so ergibt sich ein Satz der Euklidischen Metrik. Umgekehrt kann bei jedem Satze der Euklidischen Metrik gefragt werden, ob ein ähnlicher Satz auch gilt, wenn der Kugelkreis durch eine völlig beliebige Fläche 2. Grades ersetzt wird, oder nur durch eine in einen Kegelschnitt ausgeartete[214]).

Als weitere Beispiele von Geometrien, deren eine eine Untergruppe der anderen zur Fundamentalgruppe hat, seien hier anschließend gleich die folgenden angeführt:

a) *Aus der niederen Kugelgeometrie ergibt sich ebenfalls die Elementargeometrie durch Festlegung eines Punktes* (mit darauffolgender Überführung des linearen Systems der ∞^3 Kugeln, welche diesen Punkt enthalten, in das System aller Ebenen).

b) Die Ähnlichkeitstransformationen können als die radialen Projektivitäten (Nr. **17**) angesehen werden, welche die „absolute Kongruenz" in Ruhe lassen. Letztere wird im ersten natürlichen Strahlen kontinuum durch die Gleichungen $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = x_{11}^2 + x_{22}^2 + x_{33}^2 = 0$ dargestellt, und besteht aus allen eigentlichen Strahlen, die sich selbst rechtwinklig schneiden, sowie aus allen Punktstrahlen, die zu sich selbst doppelt-orthogonal sind.

Aus der Geometrie der radialen Projektivitäten erhält man also die Elementargeometrie durch Festlegung der absoluten Kongruenz[215]). Letztere hat demnach für die Euklidische Geometrie im R_3 mit dem Strahle als Raumelement genau dieselbe Bedeutung, wie der Komplex der ∞^3 Minimalgeraden, wenn die Gerade als Raumelement gewählt wird.

c) *Aus der projektiven Geometrie ergibt sich die affine Geometrie durch Festlegung der unendlich fernen Ebene* (Parallelismus zweier Geraden oder zweier Ebenen ist eine projektive Beziehung dieser Gebilde zu der unendlich fernen Ebene).

---

214) Instruktive Beispiele bei *W. Fr. Meyer,* Über Verallgemeinerungen von Sätzen über die Kugel und das ein- resp. umbeschriebene Tetraeder, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 12 (1903), p. 137, sowie in einer Reihe von Aufsätzen im Archiv f. Math. Phys. (3) 1 (1901), 5 (1903), 8 (1904); vgl. den zusammenfassenden Bericht: III. internat. Math.-Kongreß, Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), p. 322, sowie III AB 4a, *Fano,* p. 255, Anm. 76[a]).

215) *E. Study,* Geometrie der Dynamen, p. 292. In derselben Weise erhält man aus den invarianten Untergruppen G_{16}, G_9, G_8 der G_{17} der radialen Projektivitäten (Nr. 17) die invarianten Untergruppen der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen, d. h. die Gruppen der Euklidischen Bewegungen, der perspektiven Ähnlichkeitstransformationen und der Schiebungen (s. auch Nr. **20**).

32. Fortsetzung. Einordnung der projektiven Geometrie in Geometrien mit umfassenderen Gruppen. Ebenso wie die metrische Geometrie in die projektive, läßt sich auch die projektive Geometrie (von den dualistischen Transformationen abgesehen) in Geometrien mit umfassenderen Gruppen, insbesondere in die Gruppe aller analytischen Punkttransformationen (Nr. **23**, d)) und in die Analysis situs (Nr. **25**) einordnen [216]).

Die komplexe projektive Geometrie ergibt sich aus der Geometrie aller analytischen Punkttransformationen durch Festlegung der Mannigfaltigkeit der Ebenen (im R_n, der R_{n-1}), *ebenso wie die Elementargeometrie aus der projektiven Geometrie durch Festlegung des imaginären Kugelkreises.* So ist z. B. vom Standpunkte der Geometrie aller analytischen Transformationen die Bezeichnung einer Fläche des R_3 als einer algebraischen von einer gewissen Ordnung als eine invariante Beziehung zur Mannigfaltigkeit der Ebenen aufzufassen, was besonders deutlich wird, wenn man ihre Erzeugung an *Graßmanns* lineale Konstruktion knüpft (III A B 4a, *Fano*, Nr. **23**; für ebene Kurven auch III C 4, *Berzolari*, Nr. **10**).

Ebenso gelangt man von der Analysis situs, d. h. von der Geometrie aller reellen stetigen und umkehrbar-eindeutigen Punkttransformationen, zur reellen projektiven Geometrie, indem man das System aller Ebenen adjungiert.

Diese Einordnung der metrischen Geometrie in die projektive und der projektiven in die Analysis situs ist von grundlegender Bedeutung, da es erkenntnistheoretisch besonderen Wert hat (vgl. III A B 1, *Enriques*, Nr. **12**), in der Darlegung der Geometrie mit der Analysis situs zu beginnen, welche nur die allgemeinsten Begriffe einer Kurve, einer Fläche oder einer kontinuierlichen beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit (d. h. die einfachsten überhaupt möglichen Begriffe) benutzt, um von da aus zur projektiven Geometrie durch Einführung der weiteren Begriffe „Ebene" und „gerade Linie" und zur Elementargeometrie durch Festlegung des imaginären Kugelkreises (d. h. einer Ebene und eines in dieser enthaltenen Kegelschnittes) und Einführung der darauf beruhenden Begriffe „Winkel" und „Abstand" hinabzusteigen. Hierin liegt das Prinzip für die Anordnung der Encyklopädieartikel von Bd. III A B: a) Analysis situs; b) projektive Geometrie; c) metrische Geometrie.

Man gelangt ebenfalls:

a) von der Geometrie aller eindeutig-umkehrbaren analytischen

---

216) *F. Klein*, Erlanger Programm, § 8, 3.

Punkttransformationen zur Geometrie der birationalen Transformationen durch Festlegung des Systems aller algebraischen Mannigfaltigkeiten;

b) von der Geometrie aller analytischen Berührungstransformationen zur *Lie*schen Kugelgeometrie durch Festlegung des Systems der ∞^4 Kugeln, und von letzterer zur niederen Kugelgeometrie, sowie zur *Laguerre*schen „Géométrie de direction" durch die weitere Festlegung des Systems aller Punkte oder aller Ebenen.

III. Besondere Ausführungen über die Invarianten der Gruppen.

33. Allgemeines. Differentialinvarianten. In Nr. 3 ist bereits hervorgehoben worden, daß zu jeder Gruppe geometrischer Transformationen eine bestimmte Invariantentheorie gehört, und es wurde angedeutet, was unter einer zu dieser Gruppe zugehörigen *Invariante* allgemein zu verstehen ist. Wir gehen nun darauf etwas näher ein.

Eine analytische Verbindung der Veränderlichen, eventuell auch mehrerer Reihen von Veränderlichen, und der auf irgend ein Gebilde bezüglichen Konstanten, die bei den Transformationen der Gruppe durchaus ungeändert bleibt, nennen wir eine *absolute* Invariante der Gruppe; eine Verbindung, die sich bis auf einen von den Transformationskoeffizienten abhängigen Ausdruck als Faktor reproduziert, eine *relative* Invariante. Eine absolute Invariante eines Gebildes ist eine mit diesem Gebilde zusammenhängende Fundamentalgröße der durch die zugrunde gelegte Gruppe charakterisierten Geometrie. Eine relative Invariante liefert durch Nullsetzen eine invariante Gleichung, die entweder eine invariante Eigenschaft jenes Gebildes ausdrückt, oder ein weiteres mit ersterem invariant verbundenes Gebilde darstellt.

Besteht das vorliegende Gebilde aus einer kontinuierlichen Aufeinanderfolge von Elementen, so kann man in den Invarianten auch die Differentialquotienten der Veränderlichen mit aufnehmen. Diese Invarianten heißen dann „Differentialinvarianten"[217]); dadurch wird der

---

217) In weniger bestimmter Form ist dieser Begriff schon in älteren Arbeiten von *Lie* zu finden (Christiania Forhandl. 1872, bes. p. 132; Gött. Nachr. 1874, p. 529). Auch der „Riemann-Schwarzsche Ausdruck" oder „Differentialparameter" (*H. A. Schwarz:* Über diejenigen Fälle usw., J. f. Math. 75 (1873), p. 292 = Werke 2 (Berlin 1890), p. 211; vgl. auch die früheren dort angeführten Aufsätze) ist ein isoliertes Beispiel einer Differentialinvariante der projektiven Gruppe. Einen großen Impuls hat die Theorie der Differentialinvarianten seit 1875 bezw. 1879 durch *G. H. Halphen* und *E. Laguerre* erhalten; *Halphen* wandte sich den *projektiven* Differentialinvarianten der Kurven und Flächen zu (Paris C. R. 81 (1875), p. 1053; J. de math. (3) 2 (1876), p. 257, 371; Thèse sur les invariants différentiels,

Bereich der Transformationsgeometrie auf die Probleme der Differentialgeometrie ausgedehnt. Für jede geometrische Gruppe lassen sich zugehörige Differentialinvarianten aufstellen[218]). So ist z. B. der Krümmungsradius $\varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ einer Kurve $y = f(x)$ an einer bestimmten Stelle eine (relative) Differentialinvariante der metrischen Geometrie. Bei umfassenderen Gruppen sind die Differentialinvarianten, allgemein zu reden, weniger einfach, da die Anzahl der Parameter der Gruppe größer ist, und man folglich, um sie zu eliminieren, höhere Differentialquotienten in den Formeln braucht.

Die *Lie*sche Gruppentheorie enthält allgemeine Ansätze für die Aufstellung der Invarianten einer beliebig vorgelegten Gruppe. Kennt man die endlichen Gleichungen einer Gruppe, so kann man ihre Invarianten durch Elimination finden; kennt man die infinitesimalen Transformationen, so ergeben sich die Invarianten als gemeinsame Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen. Auch der Begriff der Differentialinvariante gewinnt erst bei *Lie* seine volle Bedeutung und Bestimmtheit; jede endliche oder unendliche kontinuierliche Transformationsgruppe besitzt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, die sich als Lösungen von vollständigen Systemen definieren lassen[219]). *Lie* betrachtet sie auch als gewöhnliche Invarianten einer „erweiterten Gruppe"[220]).

Paris 1878; J. éc. polytechn. 47 (1880), p. 1); *Laguerre* dagegen den Differentialinvarianten der linearen homogenen Differentialgleichungen, d. h. den gegenüber der unendlichen Gruppe $x_1 = F(x)$, $y_1 = y \cdot \Phi(x)$ mit willkürlichen Funktionen F und Φ invarianten Ausdrücken (Paris C. R. 88 (1879), p. 116, 224 = Oeuvres 1 (Paris 1898), p. 420, 424; s. auch: *F. Brioschi,* Paris Soc. math. Bull. 7 (1879), p. 105) (I B 2, *Meyer,* Nr. **20**; II A 4 b. *Vessiot,* Nr. **34**). Diese Untersuchungen setzte *Halphen* in seiner 1881 preisgekrönten Arbeit (Paris sav. étr. (2) 28¹, 1883) miteinander in Verbindung (s. auch: Acta math. 3 (1884), p. 325).

218) Differentialinvarianten der Bewegungsgruppe, s. *Lie,* Kontin. Gruppen, Kap. 22. Die Differentialinvarianten der projektiven Geometrie sind in neuerer Zeit besonders untersucht worden; die projektiven Differentialinvarianten einer Kurve eines beliebigen R_n durch *L. Berzolari* (Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 1), und die projektiven Differentialinvarianten der Flächentheorie, von gelegentlichen Betrachtungen bei *G. Darboux* abgesehen (Leçons sur la théorie générale de surfaces, besonders Bd. 1 (Paris 1887) und 2 (1889)), durch *A. Voß* (Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 39 (1891), p. 179); vgl. I B 2, *Meyer,* Nr. **20, 21.** Eine zusammenfassende Darstellung der projektiven Differentialgeometrie der Kurven und geradlinigen Flächen lieferte *E. J. Wilczynski* (Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Leipzig 1906; über geradlinige Flächen s. auch verschiedene Arbeiten in Amer. M. S. Trans., von 1901 an).

219) Arch. for Math. 7 (1882), p. 192; Christiania Forhandl. 1882, Nr. 21,

Die *Lie*sche Theorie beantwortet aber die Fragen nach den Invarianten, Differentialinvarianten und nach den Kriterien der Äquivalenz innerhalb einer Gruppe nur vom Standpunkte der analytischen Funktionen aus. Ihre Auseinandersetzungen beziehen sich gewöhnlich nur auf die Umgebung einer gewissen Stelle (III A B 4 a, *Fano*, Nr. **35**, **39**) und können, eben um ihrer Allgemeinheit willen, mehr nicht leisten. Folglich erledigt sie keineswegs die *algebraische* Invariantentheorie der allgemeinen projektiven Gruppe, oder ihrer algebraischen Untergruppen, und der weiteren algebraischen Gruppen (z. B. von *Cremona*schen Transformationen), die mit projektiven äquivalent sind, und deren Theorien den ganzen Raum umspannen. Es scheint auch schwierig zu sein, für die Behandlung einer algebraischen Gruppe zunächst die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen anzuwenden und hinterher den Forderungen der Algebra gerecht zu werden. Diese algebraischen Invariantentheorien haben also einen selbständigen Ursprung und eine selbständige Bedeutung.

34. Invariantentheorie der linearen Gruppe. Die Invariantentheorie der allgemeinen linearen Gruppe (I B 2, *Meyer*), d. h. die „Theorie der algebraischen Formen", ist hauptsächlich aus dem Algorithmus der analytisch behandelten projektiven Geometrie erwachsen (III A B 4 a, *Fano*, Nr. **22**) — zum Teile auch aus der algebraischen Determinantentheorie und aus zahlentheoretischen Fragen —; sie hat sich aber von da aus zu einer selbständigen Disziplin entwickelt, und ihre Gesichtspunkte und Hilfsmittel gehen heutzutage wesentlich über die in der Geometrie üblichen Verknüpfungsweisen hinaus. Die zu einer vorgelegten algebraischen Form zugehörigen Invariantenbildungen lassen sich nach allgemeinen Methoden und Regeln aufstellen, die seit längerer Zeit zu einer Theorie (I B 2, *Meyer*) zusammengefaßt wurden. In dieser älteren Theorie kommt es fast ausschließlich darauf an, *ganze rationale* homogene Funktionen der Koeffizienten der Grundform, oder auch dieser Koeffizienten und der Variabeln („Invarianten" in engerem Sinne, und „Kovarianten") zu betrachten, welche sich bei Ausführung einer linearen Transformation bis auf eine ganze Potenz der Transformationsdeterminante als Faktor reproduzieren, sowie auch die zwischen diesen Funktionen bestehenden Identitäten (Syzygien") aufzustellen (I B 2, Nr. 2, 8). Insbesondere

---

22; Math. Ann. 24 (1884), p. 552, 566; Th. d. Transfgr. 1, p. 549. Man vgl. auch *M. Noethers* Nachruf für *Lie* in Math. Ann. 53 (1900), p. 1, insbes. p. 33 ff.; sowie: *G. Pick*, Wien Ber. 115 (1906), p. 140.

220) Th. d. Transfgr. 1, p. 523 ff.

behauptet der „Endlichkeitssatz“ (I B 2, Nr. 6)[221]), daß es für jedes System von Grundformen eine endliche Anzahl von ganzen rationalen Invarianten gibt, durch welche sich jede andere rationale und ganze Invariante in ganzer und rationaler Form ausdrücken läßt.

Demgegenüber hat *E. Study*[222]) in Anlehnung an *L. Kronecker*[223]) ein System von schärferen Begriffsbildungen aufgestellt, welches auch die in einzelnen Untersuchungen (z. B. bei den elliptischen, hyperelliptischen und *Abel*schen Funktionen) bereits aufgetretenen irrationalen Invarianten einschließt. Er unterscheidet vier Gebiete, denen er die „rationalen und ganzen“, die „rationalen“, die „ganzen algebraischen“ und die „algebraischen“ Invarianten und Kovarianten zuschreibt; die beiden letzteren Arten werden durch algebraische Gleichungen definiert, deren Koeffizienten ganze, bezw. rationale Invarianten und Kovarianten sind. Alle diese Bildungen reproduzieren sich bei linearen Substitutionen der Veränderlichen bis auf eine Potenz der Transformationsdeterminante mit rationalem Exponenten; zu ihrer Aufstellung ist die „symbolische Methode“ anwendbar, da sich die Theorie der irrationalen und gebrochenen Invarianten auf die der ganzen zurückführen läßt. Bei der Darstellung weiterer Invarianten durch eine gewisse Anzahl von Fundamentalinvarianten betont *Study*, ob diese Darstellung rational und ganz, oder einfach rational usw. ist.

A. Hilbert hat den Hauptsatz aufgestellt[224]), daß sich unter den ganzen rationalen Invarianten eines Systems von Grundformen stets eine endliche Anzahl bestimmen läßt, zwischen denen keine algebraische Relation mit konstanten Koeffizienten stattfindet und durch welche jede andere ganz und algebraisch ausgedrückt werden kann. Zu diesen Invarianten kann man eine weitere hinzufügen, derart, daß die übrigen sich durch diese und die vorhergehenden rational ausdrücken lassen (I B 2, Nr. 6).

35. Deutung der linearen Invariantentheorie durch die projektive Geometrie. Eine vielbenutzte geometrische Deutung der Invariantenbildungen algebraischer Formen von n Veränderlichen

---

221) Für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen durch *A. Hilbert* bewiesen (Math. Ann. 36 (1890), p. 473, insb. p. 531).

222) Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889. S. auch Leipzig Ber. 39 (1887), p. 137 (I B 2, Nr. 2). Beispiele, mit Anwendungen auf elliptische Funktionen, in Amer. J. 16 (1894), p. 156; 17 (1895), p. 185, 216.

223) Vgl. die Festschrift: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, J. f. Math. 92 (1882), p. 1.

224) Math. Ann. 42 (1893), p. 313. S. auch: Chicago Congress Papers (New York 1896), p. 116.

wird durch die projektive Geometrie geliefert, falls man die Veränderlichen als projektive homogene Punktkoordinaten im R_{n-1} deutet. Dabei ist aber hervorzuheben, daß es in der Invariantentheorie auf die Form f selbst, in der projektiven Geometrie des R_{n-1} dagegen nur auf die durch Nullsetzen dieser Form sich ergebende Gleichung (d. h. auf die algebraische Mannigfaltigkeit) $f=0$ ankommt. *Die Invariantenbildungen der algebraischen Form f, gleich Null gesetzt, liefern alle Gleichungen, welche projektive Eigenschaften des Gebildes $f=0$ ausdrücken, oder weitere mit diesem projektiv zusammenhängende Gebilde darstellen.*

Insbesondere liefert das Verschwinden einer „Invariante" in engerem Sinne (d. h. einer Bildung, die nur die Koeffizienten von f und keine Variabeln enthält) die Bedingung dafür, daß das Gebilde $f=0$ eine bestimmte „projektive" Eigenschaft besitze.

Durch das Nullsetzen einer „Kovariante", die eine einzige Reihe von Punktkoordinaten enthält, wird ein weiteres Punktgebilde dargestellt, welches zu $f=0$ eine projektive Beziehung hat. Treten mehrere Reihen von Punktkoordinaten auf, so können die betreffenden Kovarianten durch geeignete mit $f=0$ zusammenhängende Korrespondenzen (oder auch Konnexe, Komplexe usw.) geometrisch gedeutet werden.

Das *identische* Verschwinden einer Kovariante (d. h. das Verschwinden aller ihrer Koeffizienten) liefert wiederum den Ausdruck einer projektiven Eigenschaft von $f=0$.

Für $n \geq 3$ treten in dem vollständigen Formensystem „Kontravarianten" und „Zwischenformen" auf (I B 2, Nr. 2). Als Kontravarianten bezeichnet man, für $n=3$, und im Falle, wo die Grundform nur eine Reihe von Veränderlichen enthält, die Bildungen, die, außer den Koeffizienten der Grundform, eine oder mehrere Reihen von Variabeln enthalten, die sich in bezug auf die Variabeln der Grundform „kontragredient" verhalten, und dementsprechend als Linienkoordinaten in der Ebene gedeutet werden können. Kommt nur *eine* Reihe solcher Variabeln vor, so ergibt sich durch Nullsetzen der Kontravariante die Tangentengleichung einer Kurve, die mit der Grundkurve in invarianter Beziehung steht. Für allgemeines n hat *A. Clebsch* gezeigt[225]), daß außer den Punktkoordinaten noch $n-2$ bemerkenswerte Arten (Stufen) von Variabeln die Eigenschaft haben, zugleich mit den Grundvariabeln eine lineare Transformation zu erleiden[226]); diese Variabeln lassen sich

225) Gött. Abh. 17 (1872); Math. Ann. 5 (1872), p. 427.

226) Diese verschiedenen Stufen von Größen spielen bereits in *Graßmanns* Ausdehnungslehre von 1844 (als „Ausdehnungsgrößen") eine wichtige Rolle.

als Koordinaten von Räumen $R_1, R_2, \ldots, R_{n-2}$ im R_{n-1} deuten. Als Kontravariante bezeichnet man eine invariante Bildung, welche eine oder mehrere Reihen von Variablen einer dieser Stufen enthält; im Falle einer einzigen Variablenreihe liefert sie, gleich Null gesetzt, ein aus geraden Linien, Ebenen usw. bestehendes Gebilde, welches mit $f = 0$ projektiv zusammenhängt.

Die „Zwischenformen" enthalten Variablenreihen verschiedener Stufen. Nach *A. Clebsch* (a. a. O.) kann man diesen Verbindungen eine feste Normalform geben, so daß es genügt, solche Verbindungen zu betrachten, welche von jeder Variablenstufe höchstens eine Reihe enthalten: die übrigen lassen sich aus diesen und deren Polaren zusammensetzen. Durch Nullsetzen solcher Formen werden weitere geometrische Gebilde dargestellt, die *Clebsch* allgemein als *„Konnexe"* bezeichnet hat[227].

Als „Kombinanten" bezeichnet man invariante Bildungen aus Formen gleicher Ordnung, welche sich nur um einen Faktor ändern, wenn man eine oder mehrere dieser Formen durch (unabhängige) lineare Kombinationen derselben ersetzt; ihr Nullsetzen liefert projektive Eigenschaften des durch die Grundformen bestimmten linearen Systems, oder auch weitere Gebilde, die zu diesem linearen System invariante Beziehung haben.

Entsprechendes gilt für die „Semikombinanten", welche sich auf Formen ungleicher Ordnung beziehen, die aber durch Multiplikation mit Hilfsformen auf dieselbe Ordnung gebracht worden sind, vorausgesetzt, daß die Koeffizienten dieser Hilfsformen in den zu betrachtenden Verbindungen nicht auftreten (I B 2, Nr. 24).

36. Deutung der linearen Invariantentheorie durch die affine Geometrie. Eine andere, vollständigere geometrische Deutung der Theorie der algebraischen Formen ergibt sich, wenn man die n Veränderlichen, die den linearen homogenen Substitutionen unterworfen werden, als *nicht*-homogene Punktkoordinaten im R_n betrachtet. Diese Darstellung hat in bezug auf die vorhergehende den Vorteil, daß es bei ihr auf die Veränderlichen und auf die Koeffizienten selbst und nicht bloß auf deren Verhältnisse ankommt; folglich auch auf die Form f und nicht nur auf die Gleichung $f = 0$. Dadurch können Eigenschaften, die bei der projektiven Deutung verloren gingen, eine

227) Einfachster Fall in der Ebene ($n = 3$), s. *Clebsch*, Göttinger Nachr. 18. Sept. 1872, p. 429, und Math. Ann. 6 (1873), p. 203. Der Begriff dieses Konnexes tritt wesentlich schon bei *J. Plücker* auf (Analytisch-geometrische Entwicklungen, Essen 1828—31, 2², § 2).

geometrische Bedeutung erlangen. Die allgemeine lineare Gruppe der n Veränderlichen wird als die umfassendste affine Gruppe des R_n mit festem im Endlichen gelegenen Punkte (dem Anfangspunkte der Koordinaten; vgl. Nr. 7) gedeutet. Alle Eigenschaften der Formen, welche bei linearen Substitutionen invariant sind, verwandeln sich jetzt in Beziehungen der affinen Geometrie; insbesondere ist eine relative Invariante eine Größe, die sich bei affinen Transformationen nur um einen (von der Transformation abhängigen) konstanten Faktor ändert (wie z. B. die Volumina der Körper).

Diese geometrische Darstellung hat in neuerer Zeit in der Zahlentheorie, z. B. in der arithmetischen Theorie der binären quadratischen Formen (I C 2c, *Vahlen*) Anwendung gefunden. Versinnlichen wir uns eine solche Form $f \equiv ax^2 + bxy + cy^2$ mit ganzzahligen Variabeln x, y durch ein „Punktgitter" (d. h. durch die Gesamtheit der Punkte, welche in irgend einem xy-Systeme ganzzahlige Koordinaten haben) und durch den Einheitskegelschnitt $f = 1$,[228]) so kommt die Frage nach der „Äquivalenz" zweier Formen darauf hinaus, ob die entsprechenden aus „Punktgitter und Einheitskegelschnitt" bestehenden Figuren affin (und zwar notwendigerweise äquiaffin) verwandt sind; oder auch, wenn man beide Formen auf dasselbe Punktgitter bezieht, ob die beiden Einheitskegelschnitte in der affinen Geometrie dieses Gitters[229]) einander äquivalent sind.

37. Ansatz für die analytische Behandlung einer jeden Geometrie durch ausschließliche Berücksichtigung der zugehörigen Invarianten. *Leibniz* hatte bereits die Idee einer Analysis erfaßt, welche alle geometrischen Gedanken mit Einfachheit und Vollendung zum Ausdruck bringen sollte; aber seine Bestrebungen konnten bei seinen Zeitgenossen noch kein Verständnis finden und blieben auch später lange vergessen. Im 19. Jahrhundert erweckten *A. F. Möbius* durch

---

228) *F. Klein,* Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, autogr. Vorles. (Göttingen 1896); vgl. insbes. 1, p. 86 ff.

229) Diese Geometrie hat als Fundamentalgruppe die Gruppe der ganzzahligen linearen Substitutionen

$$x' = \alpha x + \beta y,$$
$$y' = \gamma x + \delta y,$$

bei denen $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist. Punktgitter bei n Dimensionen werden in *H. Minkowskis* „Geometrie der Zahlen" (Leipzig 1896) verwendet, um Sätze über die Volumina nirgends konkaver Körper geometrisch zu erläutern; daraus ergeben sich arithmetische Anwendungen auf Systeme von n linearen Formen mit n Variabeln, und auf die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit n Variabeln. [I C 2, *Vahlen*, Nr. a bis e.]

seinen barycentrischen Calcül (1827) und *H. Graßmann* durch seine Ausdehnungslehre (1844) diesen Gedanken zu neuem Leben, sie hielten aber noch an der Auffassung fest, es wäre möglich, mit einem einzigen Kalkül überall durchzukommen. Heute dürfen wir sagen, daß das nicht der Fall sein kann, und daß *die Geometrien verschiedener Transformationsgruppen auch verschiedenartige analytische Hilfsmittel erfordern.* So beruht z. B. die Brauchbarkeit der *Hamilton*schen Quaternionen für viele Probleme der Geometrie und der mathematischen Physik darauf, daß in diesen Problemen die Gruppe der Euklidischen Drehungen um einen festen Punkt eine wichtige Rolle spielt, und daß für diese Gruppe das Multiplikationsgesetz der Quaternionen die einfachste analytische Darstellung $x' = a^{-1}xa$ liefert (I A 4, Komplexe Größen, *Study*, Nr. **12**).

Es ist also die Aufgabe, für jede Gruppe ein geeignetes Algorithmensystem zu schaffen. Dabei kann man den Zweck verfolgen, in der analytischen Behandlung der verschiedenen Gruppen an bestimmten allgemeinen Ideen festzuhalten; z. B. der Forderung zu genügen, daß in dem analytischen Apparat (d. h. in den Formeln) die Einführung willkürlicher Elemente so weit als möglich vermieden wird, dagegen aber alle wesentlichen Elemente der Frage und nur diese, d. h. die bezüglichen „Invarianten" eintreten. Wir kommen so zu den Algorithmen, welche auf *ausschließlicher Berücksichtigung der Invarianten* beruhen, d. h. zu der einer jeden Gruppe entsprechenden *Geometria intrinseca*[230]) oder *natürlichen Geometrie.* Allerdings hat ein derartiges Verfahren seine Schwierigkeiten, und einen wesentlichen Vorteil vermag es oft nur nach bedeutender Anstrengung, oder auch gar nicht zu bieten; es kann aber zuweilen eine tiefere Einsicht in die Struktur des Systems der geometrischen Sätze ermöglichen.

38. Spezielle Ausführungen für die metrische Geometrie.

a) Für die Hauptgruppe, d. h. für die metrische Geometrie, liefert die *ebene Trigonometrie* bereits einen Stoff, in dessen Behandlung nur relative und absolute Invarianten der zu betrachtenden Figuren (die Seitenlängen, und die Winkelgrößen mit ihren goniometrischen Funktionen) auftreten. Die gewöhnliche Trigonometrie des Dreiecks kann man nämlich als das Studium der zwischen den drei Seiten, den drei Sinus und den drei Kosinus der Winkel bestehenden rationalen ganzen Beziehungen auffassen (darunter auch die identischen Gleichungen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ einbegriffen). In bezug auf die drei

230) Wir entlehnen den Namen *E. Cesàros* „Lezioni di geometria intrinseca" (Napoli 1896). deutsch durch *G. Kowalewski* (Leipzig 1901). Vgl. Nr. 38, b).

Seitenlängen, die relative Invarianten sind, müssen diese Gleichungen homogen sein. Entsprechendes gilt für die *sphärische Trigonometrie* in bezug auf die Gruppe der Drehungen des R_3 um einen festen Punkt; dabei sind auch die Seiten absolute Invarianten[231]).

b) Der oben gemeinten Richtung ist das Bestreben zuzuschreiben, Kurven und Flächen zu definieren durch Beziehungen zwischen Größen, welche von keinem Koordinatensystem abhängen, sondern nur den einzelnen Kurven- bezw. Flächenpunkten zugehören, und daher erhalten bleiben, wenn das Gebilde seine Lage (nicht aber seine Gestalt) ändert. Derartige Größen sind: Bogenlängen, Krümmungsradien, Torsionsradien, Winkel der Tangente gegen eine feste Kurventangente, die man als „natürliche Koordinaten" benutzen kann; die Gleichungen zwischen diesen Größen hat *W. Whewell*[232]) „intrinsic equations" (esoterische, oder natürliche Gleichungen) genannt. In der Ebene sind die Kurvengleichungen in natürlichen Koordinaten Differentialgleichungen 3. Ordnung, welche die dreigliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen gestatten, und deren Integralkurven demnach alle kongruent sind; die natürlichen Koordinaten sind ihrerseits Differentialinvarianten jener Gruppe. Zu diesem Gebiete gehören namentlich die Untersuchungen von *E. Cesàro*[233]), welcher die infinitesimalen Beziehungen der Kurven und Flächen durch Voranstellung und systematische Anwendung der obigen invarianten Größen darlegt. Einen zusammenfassenden Bericht über die Lehre von den natürlichen Koordinaten lieferte *E. Wölffing*[234]).

---

231) Hinsichtlich einer Systematisierung aller Theoreme der ebenen und sphärischen Trigonometrie durch Voranstellung des invariantentheoretischen Gesichtspunktes verweisen wir auf das Programm von *E. Study* im Schlußwort der Abhandlung: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen (Leipzig Abh. 33 (1893), p. 81). Für die sphärische Trigonometrie, s. auch: *Klein,* Über die hypergeometrische Funktion (autogr. Vorl.), Göttingen 1894; insb. II A, Kap. 2. Eine auf der neueren Resultantentheorie beruhende elementare Untersuchung der Identitäten, die zwischen den linken Seiten der Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie bestehen, gibt *W. Franz Meyer,* Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 7 (1899), p. 147, ausführlicher J. f. Math. 115 (1899), p. 209.

232) On the intrinsic equation of a curve and its application, Cambr. Trans. 8 (1849), p. 659; ebenda 9 (1851), p. 150.

233) Lezioni di geometria intrinseca, s. Anm. 230). Die früheren Arbeiten von *Cesàro* sind in *Wölffings* Bericht (s. Anm. 234)) aufgezählt. Vgl. auch: Sulla geometria intrinseca degli spazi curvi, Napoli Atti (2) 6 (1894).

234) Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 142. Als Zwischenglieder zwischen den gewöhnlichen und den natürlichen Koordinaten werden die „halbnatürlichen Koordinaten" betrachtet, welche Invarianten von Untergruppen der Gruppe der Euklidischen Bewegungen sind.

c) Ein umfangreiches Programm, welches die ganze metrische Geometrie umfaßt, hat *E. Study* skizziert und bis zu einem gewissen Punkte durchgeführt[235]). Als *ganze Bewegungsinvariante* bezeichnet er eine ganze allseitig homogene Funktion der Koeffizienten irgend welcher ternärer algebraischer Formen $F(x_1 x_2 x_3 u_1 u_2 u_3)$, die bei Ausführung einer Bewegung auf die Punkte (x) und geraden Linien (u) der Ebene sich mit einem von den Transformationskoeffizienten abhängigen Faktor reproduziert. Die Frage nach allen Funktionen dieser Art, durch die sich die übrigen rational und ganz ausdrücken lassen, läßt sich nicht allgemein beantworten; man kann aber dem Problem eine speziellere und immer noch ziemlich allgemeine Form erteilen, nämlich: die Bewegungsinvarianten eines Systems linearer Formen (d. h. einzelner Punkte und gerader Linien) und die zwischen ihnen stattfindenden Relationen zu ermitteln. Unter diesen speziellen Bewegungsinvarianten, mit deren Hilfe sich die allgemeinsten symbolisch darstellen lassen, haben die „Hauptinvarianten" das größte Interesse, weil sie bei reellen Grundformen alle reellen Invarianten einbegreifen. Sie sind ganze rationale Funktionen gewisser elementarer Hauptinvarianten, welche projektive Simultaninvarianten der vorgelegten Formen und zweier weiterer, einer linearen und einer quadratischen, sind[236]), und deren es 8 Typen mit 32 Relationen zwischen ihnen gibt. Die Größen, mit denen es die Elementargeometrie vorzugsweise zu tun hat, sind absolute Invarianten, d. h. Quotienten von diesen Bewegungsinvarianten. *Study* zeigt wie sich z. B. die Entfernung zweier Punkte, der kürzeste Abstand eines Punktes von einer Geraden, die goniometrischen Funktionen des Winkels zweier Geraden, die Fläche des durch drei Punkte oder drei gerade Linien bestimmten Dreiecks usw. durch Bewegungsinvarianten ausdrücken lassen. Vermöge dieser Formeln gehen aus den identischen Relationen zwischen den Bewegungsinvarianten elementargeometrische Sätze hervor, von denen einige bekannt und häufig benutzt, andere aber in den bisherigen Untersuchungen noch

235) Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, Leipzig Ber. 48 (1896), p. 649. Diese Untersuchung erstreckt sich auf alle reellen Gruppen, die zwischen der Gruppe der Bewegungen und der projektiven Gruppe liegen. Für den R_3, s. Geometrie der Dynamen, § 17.

236) Durch diese beiden weiteren Formen werden nämlich die beiden Kreispunkte dargestellt (vgl. a. a. O. p. 653). Aber die Invarianten dieses erweiterten Systems gegenüber der allgemeinen projektiven Gruppe werden nicht durch die gewöhnliche Theorie der ternären Formen geliefert, da die beiden weiteren Formen nicht von einander unabhängige Koeffizienten haben; eine Übereinstimmung mit gewissen Invarianten der gewöhnlichen Theorie besteht bei den elementaren Bewegungsinvarianten, aber nicht bei den zusammengesetzten.

nicht aufgetreten sind. Die Elementargeometrie kann man also als ein Studium des Modulsystems auffassen, welches von den linken Seiten jener Identitäten gebildet wird.

39. Spezielle Ausführungen betreffend projektive Geometrie. Die invariantentheoretische Behandlung der projektiven Geometrie kommt wesentlich darauf hinaus, die lineare Invariantentheorie der algebraischen Formen (Nr. **34**) an die Spitze zu stellen, und aus den Relationen zwischen den zugehörigen Invarianten die verschiedenen projektiv-geometrischen Sätze abzuleiten. Obgleich aber diese Invariantentheorie als selbständige Disziplin schon weit fortgeschritten ist, so liegen doch genügende Untersuchungen über eine derartige vollständige Systematisierung der projektiven Geometrie bis jetzt nicht vor.

Im binären Gebiet ist das *Doppelverhältnis* von vier Elementen die fundamentale absolute Invariante der projektiven Geometrie. Es ist also dieser Richtung alles das zuzuschreiben, was auf ein *konsequentes Operieren mit Doppelverhältnissen* hinauskommt[237]).

E. Study hat diesen Begriff des Doppelverhältnisses allgemeiner aufgefaßt und eine Reihe von Ausdrücken betrachtet, die er ebenfalls Doppelverhältnisse nennt[238]), und die sich auf mehrere Weisen auf gewöhnliche Doppelverhältnisse eines binären Gebietes zurückführen lassen: jeder von ihnen ist die einfachste absolute Invariante einer gewissen Transformationsgruppe, welche ihrerseits durch jenen Ausdruck definiert ist. Durch derartige Doppelverhältnisse charakterisiert er:

1) Die Figur von vier verschiedenen Punkten auf einer allgemeinen Fläche 2. Ordnung gegenüber den kollinearen automorphen Transformationen dieser Fläche, so lange die Werte der zugehörigen Doppelverhältnisse alle endlich sind, d. h. so lange keine zwei der Punkte auf einer Erzeugenden der Fläche liegen[239]). Beim Kegel

---

237) Die projektiven nicht homogenen Koordinaten in den verschiedenen Grundformen erster, zweiter, dritter Stufe sind allerdings Doppelverhältnisse: sie hängen aber von den (willkürlichen) Grundelementen des Koordinatensystems ab.

238) Betrachtungen über Doppelverhältnisse, Leipzig Ber. 48 (1896), p. 199.

239) Die betreffenden *Study*schen Formeln stimmen zum Teil mit denen überein, die *L. Wedekind* für vier Punkte einer reellen nicht geradlinigen Fläche entwickelt hat (Math. Ann. 9 (1875), p. 209; 17 (1880), p. 1). Der Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Kugel geht übrigens auf *Möbius* zurück; vgl. die Anm. 72) und 198) erwähnten Schriften.

muß noch speziell angegeben werden, ob die vier Punkte in einer Ebene enthalten sind, oder nicht;

2) die Figur von vier Geraden im Raume gegenüber beliebigen projektiven Transformationen, so lange die Werte der zugehörigen *Graßmann*schen Doppelverhältnisse[240]) alle endlich sind;

3) die Figur von vier Raumpunkten gegenüber der konformen Gruppe, so lange die Werte ihrer Abstandsdoppelverhältnisse alle endlich sind, d. h. so lange keine zwei von ihnen auf einer Minimalgeraden liegen;

4) das System von vier Kugeln gegenüber den *Lie*schen Kugeltransformationen, so lange die Werte der zugehörigen Doppelverhältnisse alle endlich sind.

40. Spezielles über geometrische Anwendungen der Theorie der Elementarteiler. Einzelne Probleme aus der projektiven Geometrie haben eine endgültige und vollständige Lösung erst dann erhalten, als man den invariantentheoretischen Standpunkt berücksichtigt und zu ihrer Lösung invariantentheoretische Hilfsmittel herangezogen hat. So hat die „Theorie der Elementarteiler" ein brauchbares Mittel abgegeben, um eine Reihe projektiver Klassifikationen und Ausartungen zu untersuchen[241]).

Diese Theorie stammt aus dem Problem her (I B 2, *Meyer*, Nr. 3): „Zwei quadratische Formen f und φ von je n Veränderlichen durch eine lineare Transformation in eine einfache oder sogenannte *kanonische* Form überzuführen." Dabei ist das Verhalten der Determinante der linearen Verbindung $\lambda f + \mu\varphi$ von wesentlicher Bedeutung. Verschwindet sie nicht identisch und kann sie in n verschiedene Linearfaktoren zerlegt werden, so lassen sich beide Formen gleichzeitig als Aggregate von n Quadraten unabhängiger linearer Formen darstellen[242]); andernfalls muß man eine Reihe verschiedener Fälle unterscheiden, wobei es darauf ankommt, ob und wie oft ein mehrfacher Faktor jener Determinante gleichzeitig in allen Unterdeterminanten jedes einzelnen Grades auftritt (vgl. I B 2, *Meyer*, Nr. 3; I C 2 b, *Vahlen*; für $n = 4$ auch III C 2, *Staude*, Nr. 73). — Die vollständige Lösung dieses Problems gab *K. Weierstraß*, nachdem er

240) Ausdehnungslehre von 1844, § 165 = Werke 1^1, p. 271. Man vgl. auch die Anmerkung von *Study* in demselben Bande, p. 409.

241) Vgl. die zusammenfassende Darstellung von *P. Muth,* Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1895.

242) *A. Cauchy,* Sur l'équation à l'aide de la quelle..., Exerc. de math. 4 (1829), p. 140 = Oeuvres (2) 9 (Paris 1891), p. 174; *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), p. 1 = Werke 3 (Berlin 1884), p. 191.

ihr schon vorher nahe gekommen war[243]), in seiner Arbeit: „Über Scharen bilinearer und quadratischer Formen"[244]), und zwar nicht nur für quadratische, sondern auch für bilineare Formen von n Veränderlichen. Ist $\lambda a + \mu b$ ein Linearfaktor der Determinante D des Büschels $\lambda f + \mu \varphi$, und bedeutet l_ϱ $(\varrho > 0)$ den Exponenten der höchsten Potenz, zu welcher erhoben dieser Faktor in allen Unterdeterminanten ϱ^{ten} Grades von D enthalten ist $(\varrho = n, n-1, \ldots, n-h+1)$, so sind die Differenzen $e_\varrho = l_\varrho - l_{\varrho-1}$ alle positiv; setzen wir noch $e_{n-h+1} = l_{n-h+1}$, so enthält D die Potenz:

$$(\lambda a + \mu b)^{l_n} = (\lambda a + \mu b)^{e_n} (\lambda a + \mu b)^{e_{n-1}} \cdots (\lambda a + \mu b)^{e_{n-h+1}},$$

und wenn $\lambda' a + \mu' b$ usw. die übrigen Linearfaktoren von D sind, so ergibt sich:

$$D = (\lambda a + \mu b)^{e_n} \cdots (\lambda a + \mu b)^{e_{n-h+1}} (\lambda' a + \mu' b)^{e'_n} \cdots (\lambda' a + \mu' b)^{e'_{n-h'+1}} \ldots$$

Jeder einzelne der Faktoren, in welche D soeben zerlegt wurde, heißt ein „Elementarteiler" dieser Determinante, und ist eine (im allgemeinen irrationale) Invariante der beiden Formen f, φ. Für die Äquivalenz zweier Formenpaare gegenüber linearen Transformationen ist die Übereinstimmung der Elementarteiler der Determinanten ihrer Büschel die notwendige und hinreichende Bedingung. Als kanonische Formen, auf die sich ein vorgelegtes Formenbüschel in den einzelnen Fällen reduzieren läßt, lassen sich solche aufstellen, deren Koeffizienten die in den Elementarteilern auftretenden Konstanten, also relative Simultaninvarianten der beiden Formen f und φ sind[245]).

Den geometrischen Inhalt dieser Untersuchung hat *C. Segre* hervorgehoben[246]), indem er zeigte, das alles darauf hinauskommt, wie viele Formen von verschwindender Determinante nebst Unterdeterminanten bis zu einem bestimmten Grade im Büschel $\lambda f + \mu \varphi$ enthalten sind, und was für „Lagen" sie im Büschel besitzen, d. h. was für Doppelverhältnisse je zwei derselben mit f und φ bilden; diese Doppelverhältnisse sind absolute Invarianten, und werden durch Koeffizientenverhältnisse der *Weierstraß*schen kanonischen Formen geliefert.

Eine bemerkenswerte Anwendung dieser Theorie ist die systematische Klassifikation der Linienkomplexe 2. Grades, die *F. Klein* in seiner Dissertation[247]) begonnen hat, und die *A. Weiler*[248]) und

243) Berl. Monatsber. 1858, p. 208 = Werke 1 (Berlin 1894) p. 233.

244) Ebenda 1868, p. 310 = Werke 2 (Berlin 1895), p. 19.

245) Wegen weiterer Literatur s. I B 2, *Meyer*, Nr. 3.

246) Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Torino Mem. (2) 36 (1884).

C. Segre[249]) vervollständigt haben (I B 2, *Meyer*, Nr. 3; III C 10, *Waelsch*).

Als weitere geometrische Anwendung der Theorie der Elementarteiler hat *C. Segre* die kollinearen Transformationen eines R_n klassifiziert, und zwar durch Betrachtung der beiden bilinearen Formen in Punkt- und R_{n-1}-Koordinaten, deren eine die Kollineation analytisch darstellt, während die andere die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und R_{n-1} ausdrückt[250]). *L. Kronecker* und *G. Frobenius*[251]) haben *Weierstraß'* Theorie auf die Untersuchung der linearen Transformationen angewandt, welche eine quadratische, oder auch eine symmetrische oder alternierende bilineare Form in sich überführen; die betreffenden Resultate hat *C. Segre* für den Fall der Plückerschen M_4^2 der Raumgeraden, also für die Klassifikation der kollinearen und dualistischen Umformungen eines R_3 geometrisch ausgewertet[252]). Die Klassifikation der Flächen 4. Ordnung mit (eventuell auch zerfallendem) Doppelkegelschnitt (oder Rückkehrkegelschnitt) läßt sich ebenfalls auf ein Problem über Elementarteiler zurückführen, insofern diese Flächen als Projektionen des Durchschnittes zweier M_3^2, d. h. des Grundgebildes eines Büschels von M_3^2 des R_4 erhalten werden: es kommt folglich nur darauf an, diese Büschel zu klassifizieren, und auch das hat *C. Segre* auseinandergesetzt[253]). Fällt der Doppelkegelschnitt der Fläche mit dem Kugelkreise zusammen, so heißt die Fläche eine „Cyklide". Die Cykliden hat *G. Loria*[254]) als Durchschnitte eines quadratischen Kugelkomplexes mit dem ebenfalls quadratischen Komplexe der Nullkugeln (d. h. der Kugeln von verschwin-

---

247) Über die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form, Diss. Bonn 1868; abgedruckt in Math. Ann. 23 (1884), p. 539.

248) Über die verschiedenen Gattungen der Komplexe 2. Grades, Math. Ann. 7 (1874), p. 145.

249) Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche, Torino Mem. (2) 36 (1884).

250) Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Roma Lincei Mem. (3) 19 (1884). S. auch *A. B. Coble*, Amer. J. 27 (1905), p. 25.

251) Vgl. die I B 2, p. 332—33 angeführte Literatur.

252) Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale . . ., Torino Mem. (2) 37 (1885).

253) Étude des différentes surfaces du 4me ordre à conique double ou cuspidale . . ., Math. Ann. 24 (1884), p. 313.

254) Ricerche intorno alla geometria della sfera . . ., Torino Mem. (2) 36 (1884). S. die Benutzung dieser Theorie für die Zwecke der mathematischen Physik bei *M. Bôcher*, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie (Leipzig 1894).

dendem Radius) betrachtet, wodurch die Theorie der Elementarteiler auf eine vollständige Klassifikation der Cykliden gegenüber der Gruppe der reziproken Radien anwendbar wurde. Diese Klassifikation umfaßt auch die Cykliden 3. Ordnung (d. h. die Flächen 3. Ordnung, die durch den Kugelkreis einfach hindurchgehen). Fragen der Art waren an sich nicht neu, wurden aber erst durch die Theorie der Elementarteiler vollständig beantwortet.

41. Ausführungen betreffend die projektive Geometrie einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Determinante. Für die analytische Behandlung dieser Geometrie hat *E. Study* die zugehörige Invariantentheorie entwickelt[255]). Im System von beliebig vielen linearen Formen eines Gebietes $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe gibt es, sobald $n \geqq 3$ ist, zwei Typen irreduzibler ganzer Invarianten der projektiven Gruppe einer M_{n-2}^2: eine symmetrische von je zwei Formen und eine alternierende von je n Formen. Zwischen diesen Invarianten bestehen Relationen, die *Study* auf zwei Typen zurückführt. Für die Behandlung algebraisch-geometrischer Aufgaben mit Hilfe der Invarianten dieser Gruppe liegen Ansätze vor; z. B. lassen sich alle Linienkomplexe im Raume bestimmen, die von einem quadratischen Linienkomplexe rational abhängen und mit ihm invariant verknüpft sind, und ebenso die kovarianten Kugelkomplexe eines quadratischen Kugelkomplexes.

42. Geometrie der reziproken Radien. Apollonisches Problem. Die 6-gliedrige Gruppe der reziproken Radien in der Ebene ist nach Nr. 30, d) mit der projektiven Gruppe einer allgemeinen Fläche 2. Grades (d. h. mit der in voriger Nr. betrachteten Gruppe, für $n = 4$) gleichbedeutend. Zu dieser Gruppe gehört das „Apollonische Problem“: „Einen Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Kreise berührt“, für welches *E. Study* eine Lösung gegeben hat, die nur invariantentheoretische Hilfsmittel benutzt, so daß alle vermöge Transformationen dieser Gruppe äquivalenten Aufgaben gleichzeitig erledigt werden[256]).

Algebraisch kann das Problem in folgender Weise formuliert werden:

Vorgelegt sind die Gleichungen dreier Kreise $\Phi_i(x) = 0$ (in tetracyklischen, einer quadratischen Relation genügenden Koordinaten).

---

255) Über die Invarianten der projektiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Diskriminante, Leipz. Ber. 49 (1897), p. 443.

256) Das Apollonische Problem, Math. Ann. 49 (1897), p. 497.

Gesucht ist eine irrationale Kovariante der linearen Formen $\Phi_i(x)$, deren verschiedene Werte, gleich Null gesetzt, die Berührungskreise einzeln darstellen[257]).

Die *konstruktive Lösung* ist (bei reellen Figuren) den *Mascheroni*schen Konstruktionen[258]) insofern verwandt, als ausschließlich Kreise zur Verwendung kommen. Sie unterscheidet sich aber von diesen Konstruktionen wesentlich dadurch, daß der Mittelpunkt eines Kreises, als nicht-invariant mit dem Kreis verbunden, nicht benutzt werden darf. Statt des Zirkels ist also ein anderes Hilfsmittel, das *biegsame Kreislineal*, zu verwenden.

Außerdem unterscheidet *Study* zwischen linearen und quadratischen Konstruktionen.

Die linearen Konstruktionen beruhen auf folgende Postulaten:

1) Man kann drei vorgelegte Punkte durch einen Kreis verbinden.

2) Wenn zwei Kreise sich in einem bekannten Punkte schneiden, so ist auch der andere Schnittpunkt dieser Kreise rational bekannt.

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich z. B. die Aufgabe lösen, die Inversion zu konstruieren, die zu einem durch drei seiner Punkte bestimmten Kreise gehört. Ebenso kann man zwei Kreise durch ein Büschel verbinden, wenn diese Kreise durch die zugehörigen Inversionen gegeben sind, unabhängig davon, ob diese Kreise reelle Schnittpunkte haben oder nicht.

Die quadratischen Aufgaben kommen darauf hinaus, zwei Kreise miteinander zum Durchschnitt zu bringen; diese Aufgabe läßt sich durch lineare Konstruktionen auf den Fall zurückführen, die Schnittpunkte zweier orthogonaler Kreise zu finden, von denen der eine punktweise bekannt ist. Das ist äquivalent mit der Forderung, die Doppelelemente einer Involution auf einem punktweise bekannten Kreise zu bestimmen.

Als Aufgabe der konstruierenden Geometrie lautet dann das Apollonische Problem wie folgt: *Gegeben sind drei Kreise* (durch die mit ihnen verbundenen Inversionen). *Man soll durch lineare und möglichst wenige quadratische Konstruktionen die Kreise finden, die diese drei Kreise berühren.*

---

257) Ebenso werden z. B. die Isogonalkreise von vier linear-unabhängigen Kreisen durch Nullsetzen der verschiedenen Werte einer irrationalen Kovariante dargestellt.

258) *L. Mascheroni*, La geometria del compasso, Pavia 1797; neue Aufl. durch *G. Fazzari*, Palermo 1903. Deutsche Ausgabe durch *Grüson*, Berlin 1825.

Nach einer Reihe von Vorbereitungen wird die algebraische Aufgabe a. a. O. §§ 3—4, die konstruktive §§ 17—18 gelöst. Ohne Änderung der Formeln oder der Konstruktionen wird dadurch auch das Apollonische Problem für Kreise auf einer Kugelfläche gelöst; und Gleiches gilt für die etwas umfassendere Aufgabe: „Die ebenen Schnitte einer reellen nicht geradlinigen Fläche 2. Grades zu finden, die drei gegebene ebene Schnitte berühren"; der Begriff der Orthogonalität ist dabei durch den des Konjugiertseins in bezug auf diese Fläche zu ersetzen.

(Abgeschlossen im Juli 1907.)

III A B 5. PROJEKTIVE GEOMETRIE.*)

VON

A. SCHOENFLIES

IN KÖNIGSBERG.

Inhaltsübersicht.

*) Der Artikel war bereits Ostern 1901 eingeliefert, mußte jedoch aus redaktionellen Gründen zurückgestellt werden. Eine Ergänzung in analytischer Richtung wird später von *O. Ludwig* geliefert werden; von ihm sollen auch die Fortschritte berücksichtigt werden, die die synthetische Behandlung seit 1900 erfahren hat.

Lehrbücher*).

F. Amodeo, Lezioni sulle omografie binarie, Neapel 1888; 2. Aufl. 1889.

F. Aschieri, Geometria projettiva, Mailand 1884; 2. Aufl. 1888.

K. Bobek, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Nach den Vorträgen des Herrn *C. Küpper* bearbeitet, Leipzig 1889; 2. Aufl. 1897.

L. N. M. Carnot, De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801.

— Géométrie de position, Paris 1803.

— Essai sur la théorie des transversales, Paris 1806. (Die Schrift bildet den zweiten Teil des Werkes: Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales.)

M. Chasles, Traité de géométrie supérieure, Paris 1852; 2. Aufl. 1880.

L. Cremona, Elemente der projektivischen Geometrie, übersetzt von *R. Trautvetter,* Stuttgart 1882. (Das Original erschien 1872.)

F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, autorisierte deutsche Ausgabe von *H. Fleischer,* Leipzig 1903. (Das Original erschien 1898.)

W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3 Teile, Leipzig 1883, 1885, 1888 (dritte Auflage der darstellenden Geometrie). Teil 1, 4. Aufl., Leipzig 1904.

C. F. Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie, Leipzig 1869.

H. Hankel, Die Elemente der projektivischen Geometrie in synthetischer Behandlung, Leipzig 1875.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882.

Chr. Paulus, Grundlinien der neueren ebenen Geometrie, Stuttgart 1853.

H. Pfaff, Neuere Geometrie, Erlangen 1867.

M. Pieri, Geometria projettiva, Turin 1891.

J. V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, 2. Aufl. 2 Teile, Paris 1865 u. 1866.

Th. Reye, Die Geometrie der Lage, 2 Bde, Hannover 1866 u. 1867; 2. Aufl. 2 Bde, 1877 u. 1880; 3. Aufl., 3 Teile, Leipzig 1886—1892; 4. Aufl. Bd. 1, Leipzig 1898, Bd. 2, Stuttgart 1907.

A. Sannia, Lezioni di geometria projettiva, Neapel 1891; 2. Aufl. 1895.

H. Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften (Teil II von *Jacob Steiners* Vorlesungen über synthetische Geometrie), Leipzig 1866; 2. Aufl. 1876; 3. Aufl. 1898.

---

*) Die ausländischen sind, falls eine deutsche Übersetzung existiert, mit deutschem Titel zitiert.

H. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, Leipzig 1880.
R. Staudigl, Lehrbuch der neueren Geometrie, Wien 1871.
K. G. Ch. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847.
— Beiträge zur Geometrie der Lage, 2 Teile, Nürnberg 1856 u. 1857.
J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Berlin 1832 (Werke, herausgegeben von *C. Weierstraß* 1, p. 229 ff.).
J. Thomae, Ebene geometrische Gebilde vom Standpunkt der Geometrie der Lage betrachtet, Halle 1873.
Em. und *Ed. Weyr*, Die höhere Geometrie, 3 Teile, Prag 1871, 1874, 1875 (böhmisch).

Historische Monographieen.

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Paris 1837, 2. Aufl. 1875.
— Rapport sur les progrès de la géométrie, Paris 1870.
E. Kötter, Die Entwickiung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). Erster Band eines Berichtes, erstattet der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig 1901. (Bd. 5 (1898) des Jahresberichts, Heft 2.)
J. J. Obenrauch, Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie, Brünn 1897.

Abkürzungen.

Von folgenden Bezeichnungen ist vielfach Gebrauch gemacht worden. Es bedeuten

$$c_2, \ldots, c_n;\ F_2, \ldots, F_n$$

einen Kegelschnitt, resp. eine ebene oder räumliche Kurve n^{ter} Ordnung, sowie eine Fläche zweiter resp. n^{ter} Ordnung. Insbesondere sollen

$$K_2,\ E_2,\ H_2,\ P_2,\ R_2$$

einen Kegel zweiter Ordnung, ein Ellipsoid, ein Hyperboloid, ein Paraboloid und eine Regelschar darstellen.

Durch

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{V}$$

wird eine Projektivität, eine Kollineation, eine Reziprozität (Korrelation), eine Involution, sowie allgemein eine Verwandtschaft bezeichnet.

Punkte und Geraden werden durch große resp. kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, Ebenen durch kleine griechische.

A. Historische Einleitung[1]).

1. Die Zentralprojektion. Die Entstehung der projektiven Denkweise hat sich an die Lehre von der Perspektive angeschlossen. Nachdem *H. Lambert* und *G. Monge* aus der praktischen Kunst der Per-

1) Hierzu vergleiche besonders den ausführlichen Bericht von *E. Kötter*.

spektive die Wissenschaft der darstellenden Geometrie geschaffen hatten (*E. Papperitz*, III A B 6), war der Gedanke, das Studium der Projektionsmethoden zum Selbstzweck zu erheben, fast unmittelbar gegeben. Die tatsächliche Benutzung der Zentralprojektion für Beweise ebener Sätze reicht freilich erheblich weiter zurück. Bereits *B. Pascal* hat seinen Sechsecksatz dadurch gewonnen, daß er den c_2 als Projektion eines Kreises betrachtete. (Näheres bei *F. Dingeldey*, III C 1, Nr. 18.)

Von erheblichem Einfluß auf die projektiven Vorstellungen war die Einführung der *unendlich fernen* Punkte. Daß parallelen Geraden bei der Zentralprojektion Geraden durch einen Punkt (*Fluchtpunkt*) entsprechen, lehrte schon *G. Ubaldi* um 1600; doch hat erst *G. Desargues* 40 Jahr später parallele Geraden als Geraden durch *einen* unendlich fernen Punkt aufzufassen gelehrt. Die *Fluchtlinie* einer Ebene, als Ort aller Fluchtpunkte, erscheint zuerst bei *B. Taylor* und *J. H. Lambert* um 1750[2]). Alsbald entstand das methodische Bemühen, zur Vereinfachung der Beweise die Figuren so in eine andere Ebene zu projizieren, daß gewisse Elemente ins Unendliche rückten oder eine spezielle Form erhielten. Wesentlich waren folgende Methoden im Gebrauch[3]). Es wird ein Punkt P in einen P'_∞, oder eine Gerade g in die g'_∞ resp. ein Viereck in ein Parallelogramm projiziert; es wird eine g in die g'_∞ und zugleich ein c_2 in einen Kreis projiziert; es werden zwei c_2 in zwei Kreise, oder endlich ein c_2 in einen Kreis und ein Punkt P in dessen Mittelpunkt projiziert[4]). Allerdings gingen diese Methoden ursprünglich nicht über den Charakter von Kunstgriffen hinaus; ihre Umgestaltung zu einer allgemeinen projektiven Denkweise erfolgt erst durch *J. V. Poncelet*[5]).

---

2) Diese Zitate entnehme ich *Chr. Wieners* Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Leipzig 1884), das im Bd. I eine sehr ausführliche historische Einleitung enthält.

3) Mit diesen Methoden hat z. B. *Ferriot* den sogenannten Viereckssatz für den c_2 (Nr. 2) bewiesen, Gergonne Ann. 3 (1812), p. 166, und *C. J. Brianchon* den sogenannten *Desargues*schen Involutionssatz (Nr. 2 und 13), Mém. sur les lignes du second ordre, Paris 1817, p. 13; vgl. auch noch *O. Schlömilch* und *F. Schur*, Zeitschr. Math. Phys. 39 (1894), p. 117 u. 245, 247. Übrigens war die bewußte Idee der g_∞ damals noch nicht vorhanden, vgl. Anm. 23.

4) Auch die Methode der stereographischen Projektion wurde zu analogen Zwecken vielfach benutzt, insbesondere durch *M. Chasles*, der die Methode zugleich auf eine beliebige F_2 ausdehnte; Corr. sur l'éc. polyt. 3 (1814), p. 11. Übrigens handelte es sich hier um Übertragung von Sätzen aus der Ebene (Taktionsproblem) auf die F_2. Vgl. auch noch *G. Catalan* in Journ. de math. 19 (1854), p. 132.

5) Die Zusammenstellung dieser Methoden und ihre einheitliche Begründung findet man im Traité § 99 ff. Im § 121 gibt *Poncelet* auch den Ort aller Punkte

2. Carnots Theorie der Transversalen. *L. N. M. Carnot* ging von der Frage aus, welche Vorzeichenänderungen metrische Relationen erleiden, falls die in sie eingehenden Punkte, Geraden usw. unter Wahrung gewisser allgemeiner Bedingungen ihre Lage ändern[6]). Er betrachtet alle durch *kontinuierliche* Änderung entstehenden Figuren als vom gleichen Typus (*figures corrélatives*)[7]) und nutzt diese Auffassung so aus, daß er eine möglichst einfache Figur als Ausgangsobjekt wählt und an sie seine Schlüsse anknüpft, während man vor ihm für jede Figurenart eine besondere Betrachtung für erforderlich hielt. Durch die Tendenz, in der veränderlichen Figur das konstante Gesetz zu suchen, hat *Carnot* ebenfalls zur Vorbereitung der modernen Denkweise beigetragen[8]).

Die Methoden der Transversalen und ihre von der zufälligen Figur unabhängigen Relationen haben lange Zeit das geometrische Studium beeinflußt. Die wichtigste dieser Relationen bildet der folgende Satz: Wird ein ebenes oder räumliches Polygon $ABC\ldots N$ von einer Geraden resp. Ebene in $A'B'\ldots N'$ geschnitten, so ist immer

$$AA'\cdot BB'\cdot\ldots NN' = BA'\cdot CB'\cdot\ldots AN'.$$

Ein analoger Satz gilt für den Schnitt mit beliebig vielen Transversalen, sowie für den Schnitt eines Polygons mit einer Kurve c_n.[9])

---

von denen aus sich zwei c_2 in zwei Kreise projizieren lassen. Er fügt in § 131 hinzu, daß man zwei c_2, die eine doppelte Berührung haben, in zwei konzentrische Kreise projizieren kann. Vgl. auch *Chasles,* Traité des sections coniques, Paris 1865, p. 194.

6) Den äußeren Anlaß hierzu bildete seine Abneigung gegen die negativen Zahlen, die er grundsätzlich verwarf, und von denen er behauptete, daß ihr Gebrauch zu Fehlschlüssen führe; vgl. De la corrélation, p. 2 u. 38 und Géométrie de position, p. II. Widerlegungen von *Carnots* Bedenken gaben in neuerer Zeit noch *A. Terquem,* Nouv. Ann. de math. (2) 7 (1868), p. 437; *A. Cayley* und *J. J. Sylvester,* Mess of math. (2) 14 (1885), p. 92 u. 113 (*Cayley,* Collected papers 12, p. 305).

7) Als einfachsten Fall der figures corrélatives nennt er die ähnlich veränderlichen Figuren, De la Corrélation, p. 37. Das Wort *Corrélation* bedeutet die Beziehung beliebiger Figuren auf eine spezielle, deren Eigenschaften man kennt, p. 1.

8) Auf ihn geht auch die Einführung des vollständigen n-Ecks und n-Seits zurück.

9) *Carnot* beweist die Sätze trigonometrisch für das Dreieck und verallgemeinert sie dann durch den Schluß von n auf $n+1$. Vgl. De la corrélation, p. 118, 162, 291, 297, 437. Verallgemeinerungen der *Carnot*schen Sätze gab *A. Terquem,* Nouv. Ann. 10 (1851), p. 100. Einen Spezialfall des letztgenannten Satzes kannte schon *I. Newton* für die c_3.

Das Carnotsche Theorem kann als Spezialfall des Abelschen aufgefaßt werden, für den Fall, daß die c_n in lauter Geraden zerfällt. Vgl. *Clebsch-Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie 2, Leipzig 1876, p. 754 u. 830.

Handelt es sich z. B. um den Schnitt einer c_3 mit einem Dreieck ABC, und liegen auf den Seiten AB, BC, CA die Schnittpunkte $PP'P''$, $QQ'Q''$, $RR'R''$, so ist

$$\frac{AP\cdot AP'\cdot AP''\cdot BQ\cdot BQ'\cdot BQ''\cdot CR\cdot CR'\cdot CR''}{BP\cdot BP'\cdot BP''\cdot CQ\cdot CQ'\cdot CQ''\cdot AR\cdot AR'\cdot AR''}=1.$$

Diese Sätze sind von den Geometern im Anfang des 19. Jahrhunderts vorwiegend benutzt worden, besonders auch zur Ableitung solcher Sätze, die man später auf Grund der projektiven Methoden ableitete[10]) *M. Chasles*[11]) gab mit ihrer Hilfe die erste geometrische Ableitung der beiden Geradenscharen eines H_2, *Carnot* und *J. V. Poncelet*[12]) benutzten sie zum Beweis des Pascalschen Satzes, *C. J. Brianchon*[13]) gründete auf sie die Konstruktion eines c_2 aus fünf Punkten resp. Tangenten, vor allem aber leitete man den sogenannten *Desargues*schen Involutionssatz (Nr. **13**), d. h. den Satz, daß ein Viereck und ein ihm umgeschriebener c_2 auf jeder Geraden eine Involution bestimmen, sowie den allgemeinen Viereckssatz am c_2, der die von vier Punkten und ihren Tangenten gebildeten Vierecke und ihre gemeinsame Diagonalfigur betrifft, und damit die Polarität aus ihnen ab[14]). *Poncelet*[15]) benutzte sie sogar bereits zur Konstruktion der c_3 aus gegebenen Punkten; in neuerer Zeit hat insbesondere *P. Serret*[16]) die Transversalentheorie zur Aufstellung von Schnittpunktsätzen über algebraische Gebilde verwertet.

Theoretische Verallgemeinerungen der *Carnot*schen Sätze sind in neuerer Zeit mehrfach gegeben worden. *A. Gob*[17]) hat den Satz, der ein Dreieck und eine c_n betrifft, auf eine Kurve n^{ter} Klasse dualisiert, und *C. A. Laisant*[18]) hat sich die Frage gestellt, unter welchen Be-

10) Eine Ableitung der Transversalensätze auf Grund projektiver Tatsachen findet sich bei *A. Jacobi*, J. f. Math. 31 (1846), p. 53.

11) Corr. sur l'éc. polyt. 2 (1812), p. 440 u. 466.

12) Traité 2, § 148.

13) Mém. sur les lignes du second ordre, Paris 1817.

14) Vgl. besonders den Bericht von *E. Kötter*, p. 23 u. 49.

15) Die erste Mitteilung findet sich in der Corr. Quetelet 7 (1832), p. 79. Seine Schrift: Analyse des transversales appliquée aux courbes et surfaces algébriques enthält eine eingehende Theorie der c_3 auf Grund der Transversalensätze; vgl. den Traité 2, p. 122 ff.

16) Vgl. besonders Géométrie de direction, Paris 1869, ferner z. B. Paris C. R. 82 (1876), p. 270. Jedes windschiefe Zehneck, dessen Seiten sich auf einer Ebene schneiden, ist in eine F_2 einschreibbar usw.

17) Assoc. Franç. Besançon 22 (1893), p. 258. Vgl. auch *A. Cazamian* in Nouv. Ann. (3) 14 (1895), p. 30; *F. Ferrari*, ebenda, p. 41.

18) Nouv. Ann. (3) 9 (1890), p. 5.

dingungen man die *Carnot*schen Sätze umkehren, d. h. aus der Schnittpunktsrelation, wenn sie für *jedes* Polygon existiert, auf die Existenz der c_n schließen kann. Dies ist nur der Fall, wenn die Zahl der Polygonschnittpunkte die Zahl der Punkte, die die c_n bestimmen, um eine Einheit übersteigt, was nur für $n = 1$ und $n = 2$ der Fall ist. Analoges gilt im Raum für Flächen; hier ist außer $n = 1$ und $n = 2$ auch $n = 6$ ein möglicher Wert[19]).

3. Das Prinzip der Kontinuität. Die Vervollkommnung, die die analytische Geometrie durch *G. Monge* erfahren hatte, stellte die Geometer vor die Aufgabe, ihren Begriffen dieselbe Allgemeinheit zu geben, die die analytische Methode durch die Unbestimmtheit der Koeffizienten erreicht. Dieser Forderung hat in allgemeinster Weise *J. V. Poncelet* durch das *Prinzip der Kontinuität* entsprochen, das die Resultate von der zufälligen Anlage der Figur unabhängig erklärt, und in dem *Spezialfall allgemeinen Charakters* den *zureichenden Vertreter* des *allgemeinen* Falles sieht[20]). Für den c_2 hatte übrigens schon *G. Desargues* den Übergang von der alten zur modernen Denkweise vollzogen, indem er Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel und das System zweier Geraden als Arten derselben Kurvengattung (des Schnitts einer Ebene mit einem Kreiskegel) betrachtete. Die analoge allgemeine Auffassung durchzieht *Newtons* Theorie der ebenen c_3[21]); endlich sollen ja auch *L. N. M. Carnots* korrelative Figuren durch kontinuierliche Änderung ineinander übergehen können[22]). Erst *Poncelet* hat aber diese Auffassung zu einem grundlegenden Prinzip erhoben und davon umfassende und systematische Anwendung gemacht. Jetzt liegt das Prinzip der Kontinuität dem gesamten geometrischen Denken zugrunde.

Erstens soll das Prinzip, wie schon bei *Desargues*, die Einheitlichkeit der durch *Schneiden* und *Projizieren* entstehenden Figurenarten ausdrücken; es führt so zur Konzeption der unendlich fernen Geraden und der unendlich fernen Ebene[23]). Es soll zweitens die

---

19) Die zugehörigen Polygone sind Vierecke, Fünfecke und Vierzehnecke.

20) Vgl. besonders den Traité, § 111, 135—139, 406, 407, 638 sowie Vorrede, p. XII ff.

21) Enumeratio linearum tertii ordinis, London 1706.

22) De la corrélation, p. 6 u. 37.

23) Traité, § 96 u. 580. Übrigens waren die Analytiker mit der Hinzurechnung der „unendlichen Wurzeln" einer Gleichung und mit der Idee der g_∞ keineswegs vorangegangen; so beruft sich z. B. *Gergonne* in seinen Annalen 17 (1827), p. 216 ausdrücklich auf *Poncelet*. Vgl. auch *Plücker*, Journ. f. Math. 5 (1829), p. 8 (Ges. Abhandlungen 1, p. 131). Die strengere Auffassung, daß die

volle Gleichwertigkeit und Einheitlichkeit aller Gebilde aussprechen, die unter Wahrung gewisser allgemeiner, ihre Natur und ihre Eigenschaften betreffenden Bedingungen, durch *kontinuierliche Deformation* auseinander hervorgehen; so benutzt es z. B. zur Ableitung der Schnittpunktssätze einer c_n und c_m den speziellen Fall von resp. m und n Geraden[24]). Drittens aber und hauptsächlich sollte es die Allgemeingültigkeit der geometrischen Resultate und Methoden auch auf die Fälle ausdehnen, in denen die analytische Darstellung auf *imaginäre* Größen führt. Dies geschieht zunächst so, daß *Poncelet* das Prinzip auf solche Fälle beschränkt, in denen sich das Endresultat an reelle Gebilde knüpft, während das Imaginäre nur in die Definitionen oder Beweise eingeht, und er erreicht dies, indem er die am Imaginären haftende Definition dieser Gebilde an solche reellen Eigenschaften knüpft, die beim kontinuierlichen Übergang vom reellen zum imaginären invariant bleiben (vgl. Nr. **19**). Die konsequente Anwendung des Prinzips führt jedoch vielfach über diese Fälle hinaus. *Poncelet* operiert sogar mit imaginären Projektionsmethoden, indem er c_2, die sich schneiden, als Projektionen solcher betrachtet, die sich nicht schneiden, und auch hier verfolgt, was beim Übergang vom Schneiden zum Nichtschneiden ungeändert bleibt. Er gelangt so insbesondere zu den beiden unendlich fernen *imaginären Kreispunkten*, die alsbald für das gesamte geometrische Denken eine fundamentale Bedeutung gewannen, wenn auch ihre volle Tragweite erst später auf Grund ihrer analytisch-metrischen Natur zum Bewußtsein gelangte[25]). Er führt sie als die Punkte ein, durch

---

Zulässigkeit der unendlich fernen Elemente zu erweisen ist, und daß der Beweis darauf beruht, daß sie den fundamentalen Schnittpunktsaxiomen genügen, gehört erst einer weit späteren Zeit an. Sie ist im wesentlichen schon bei *G. K. Ch. v. Staudt,* Geometrie der Lage, p. 23 vorhanden.

Durch die Adjunktion der uneigentlichen Elemente wird die projektive Ebene eine *einseitige* Fläche (*Dehn-Heegard* III A B 3, Nr. 2), worauf *L. Schläfli* in einem an *F. Klein* gerichteten Brief hinwies, Math. Ann. 7 (1874), p. 550. Eine ganz im Endlichen enthaltene der projektiven Ebene gestaltlich gleichartige Fläche gab *W. Boy* an, Dissertation Göttingen 1901 (Modell erschienen bei M. Schilling, Halle a/S.).

Ähnliches gilt für jeden projektiven Raum; er stellt stets ein Gebilde von speziellem Zusammenhang dar; vgl. *Enriques* III A B 1, Nr. **36** ff.

24) Traité, § 538 u. 598; vgl. auch § 639. Näheres über die Verwendung des Kontinuitätsprinzips für analoge Schnittpunktsätze bei *Zeuthen* III C 3, Nr. 5.

25) *Poncelet* operiert zwar meist nur mit den beiden imaginären unendlich fernen Punkten, die *zwei* Kreise gemein haben, hat aber die daraus fließende Folgerung, daß *alle* Kreise einer Ebene durch dieselben zwei imaginären Punkte gehen, an einer Stelle bestimmt ausgesprochen. „Des cercles placées arbitrairement sur un plan ne sont donc tout à fait indépendants entre eux, comme on

die alle Kreise gehen, erkennt konzentrische Kreise als solche, die in ihnen eine doppelte Berührung haben, erkennt, daß alle c_2, die einen Brennpunkt gemein haben, zwei sich in ihm schneidende gemeinsame Tangenten besitzen, entdeckt den Kugelkreis (Nr. 4) und seine Bedeutung als gemeinsame Berührungskurve für konzentrische Kugeln, überträgt die Sätze über Kugeln auf beliebige F_2, deren Schnittkurve in zwei c_2 zerfällt, gelangt zu dem Resultat, daß es sogar sechs Scharen von Kreisschnitten einer F_2 gibt, von denen jedoch nur zwei reell sind, erhebt sich zu der Vorstellung, daß jede F_2 zwei Scharen geradliniger Erzeugungslinien enthält, usw. usw.[26]).

B. Allgemeine Begriffe und Methoden.

4. Die Begründung der projektiven Denkweise durch Poncelet. Die Wissenschaft der projektiven Geometrie erstand, als *J. V. Poncelet* seinen *Traité des propriétés projectives des figures* veröffentlichte[27]). In erster Linie sollte er freilich dem Zweck dienen, auf Grund des Prinzips der Kontinuität die Sätze über die c_2 und F_2 durch Projektionsmethoden auf Sätze über Kreise und Kugeln zurückzuführen. Sein tieferer Gehalt, seine Bedeutung für die moderne Denkweise liegt aber darin, daß an seiner Spitze die auch heute noch grundlegende Frage nach allen denjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde steht, die bei Zentralprojektion erhalten bleiben. Als solche erkannte *Poncelet* nicht bloß diejenigen der Lage (deskriptive Eigenschaften), sondern auch Eigenschaften metrischer Natur[28]). Er gibt als allgemeinste metrische Funktion projektiven Charakters einen Quotienten an, dessen Zähler und Nenner aus Produkten einzelner Strecken besteht, die

---

pourrait le croire au premier abord; ils ont idéalément deux points imaginaires communs à l'infini . . . Traité § 94. Vgl. auch die Ergänzungen von *O. Ludwig*.

26) Vgl. besonders Traité, § 53, 77, 92, 95, 238, 453, 594, 619, 630 usw. Zu den Kreisschnitten gelangt *Poncelet*, indem er die Schnittkurve der unendlich fernen Ebene ε_∞ mit F_2 und der Kugel betrachtet und den Satz benutzt, daß für jede gemeinsame Sehne dieser beiden c_2 alle durch sie hindurchgehenden Ebenen die Kugel und die F_2 in ähnlichen Kurven schneiden; a. a. O. § 619. Die Existenz des Kugelkreises erscheint als gelegentliches Resultat in § 630.

27) Die Ideen, die in ihm niedergelegt sind, stammen bekanntlich aus dem Jahre 1813, aus der Zeit, in der *Poncelet* Kriegsgefangener in Rußland war. „Cet ouvrage est le résultat des recherches que j'ai entreprises, dès le printemps de 1813, dans les prisons de la Russie" heißt es in den ersten Worten der Vorrede.

28) Die Unterscheidung metrischer und deskriptiver Eigenschaften war im Anfang des 19. Jahrhunderts allgemein üblich. Man verlangte sogar schon, daß der Teil der Geometrie, der vom metrischen unabhängig ist, aus reinen Lagebeziehungen zu begründen sei, vgl. z. B. *Gergonne* in seinen Annalen 16 (1826), p. 209.

folgendermaßen formal bestimmt sind. Im Zähler und Nenner muß jeder Streckenendpunkt gleich oft auftreten, und jeder Strecke des Zählers muß eine auf *derselben* Geraden liegende Strecke des Nenners entsprechen und umgekehrt[29]). Aus diesem umfassenden Theorem folgt der projektive Charakter für harmonische Punkte und das Doppelverhältnis[30]), für die Gleichungen der Involution und ihr Auftreten am Viereck und dem ihm umgeschriebenen c_2, für die Sätze der Transversalentheorie, für die Eigenschaften der Polarität usw. usw. Ein weiterer Erfolg *Poncelets* war die Einführung und Diskussion der perspektiven Lage für *inzidente* ebene resp. räumliche Systeme (Nr. **11**); er erhielt sie durch Verallgemeinerung der ähnlichen Lage von Kreisen und Kugeln, bei denen er im Ähnlichkeitspunkt das Perspektivitätszentrum und in der g_∞ resp. ε_∞ die Achse und Ebene der Perspektivität erkannte. Er gelangt so zur allgemeinen Auffassung zweier c_2 derselben Ebene als perspektiver Gebilde, so daß ein Schnittpunkt zweier gemeinsamen Tangenten das Zentrum und eine gemeinsame Sehne die Achse der Perspektivität ist[31]), und schließt daran die Erkenntnis, daß alle c_2 mit gemeinsamem Brennpunkt zwei gemeinsame imaginäre Tangenten besitzen[32]). Er gelangt endlich auch zur Reliefperspektive, erkennt, daß man jede F_2 als reliefperspektives Bild einer Kugel auffassen kann, erhält daraus wieder Sätze über F_2 mit gemeinsamem c_2, gewinnt aus dem Satz, daß zwei perspektiv liegende F_2 die Ebene der Perspektivität in demselben c_2 schneiden, die Idee des Kugelkreises[33]), folgert daraus wieder, daß alle ähnlichen und ähnlich gelegenen F_2 als Reliefprojektionen von Kugeln betrachtet werden können, usw. usw. (Vgl. auch Nr. **3**.)

5. Polarität, Reziprozität und Dualität. Soweit die Polarität[34]) am c_2 die harmonischen Beziehungen und die Tangenten umfaßt,

---

29) Vgl. § 10 ff., besonders § 20.

30) Beispiele für metrische Beziehungen von n Punkten gibt *A. Terquem*, Nouv. Ann. 6 (1847), p. 68.

31) Vgl. Traité, § 290 ff. Insbesondere hat er auch die in Nr. **3** genannten Sätze über c_2 mit gemeinsamem Brennpunkt in der Weise abgeleitet, daß er sie als c_2 in perspektiver Lage mit dem Brennpunkt als Perspektivitätszentrum deutete. In welcher Weise man Ecken und Seiten des beiden c_2 gemeinsamen Vierecks und Vierseits als Achse und Zentrum wählen kann, hat *Em. Weyr* erörtert, Wien Ber. 57 (1868), p. 449. Die obigen Methoden erörtert auch *A. Larmor*, Quart. Journ. 21 (1886), p. 339.

32) Vgl. auch *M. Chasles*, Corr. Quetelet 5 (1829), p. 18.

33) Traité § 593 und 630 ff.

34) Der Name „Pol" stammt von *Servois*, „Polare" von *J. D. Gergonne*, vgl. Gerg. Ann. 1 (1810), p. 337 u. 3 (1812), p. 287.

wurde sie bereits von *Ph. de la Hire* erkannt, der sie aus den analogen, schon den Griechen geläufigen Kreissätzen durch Projektion ableitete[35]). Die Vierecksätze (Nr. 2) gab in vollständiger Form zuerst *C. Mac Laurin*[36]). Noch im Beginn des neunzehnten Jahrhunderts stand die Ableitung der Polareigenschaften der c_2 im Vordergrund des Interesses; bald ist es der *Pascal*sche Satz, bald die Transversalentheorie, bald der Vierecksatz, bald die Involution, die den Ausgangspunkt bildet.

Die Polareigenschaften der F_2 gehen auf *G. Monge*[37]) zurück, der sie analytisch ableitete und in seinen Vorlesungen an der École polytechnique zuerst vortrug. Eine erste geometrische Ableitung, die die Polarität bezüglich der c_2 und sonst nur die volle Figur der perspektiven Dreiecke im Raum benutzt, stammt von *C. J. Brianchon*[38]); auf ihn geht auch die Erkenntnis zurück, daß man die Polarität zur Übertragung von Lehrsätzen benutzen kann[39]). Auf diese Weise hat *Brianchon* seinen Sechsecksatz aus dem des *B. Pascal* abgeleitet. Die allgemeine Bedeutung und Tragweite dieser Methode hat aber erst *J. V. Poncelet*[40]) erfaßt, indem er von der Polarfigur des Sechsecks zu der eines n-Ecks und von ihr zur Polarfigur einer beliebigen Kurve aufstieg, und deren *wechselseitiges* Verhältnis erkannte, daß nämlich einem Punkt und seiner Tangente auf der einen eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt auf der anderen entspricht (*Methode der reziproken Polaren*). Er knüpft hieran die doppelte Auffassung einer Kurve als

35) Sectiones conicae in novem libros distributae, Paris 1685; vgl. *Chasles*, Aperçu historique, p. 122 ff.

36) De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus 1748, p. 31. Dies Werk erschien erst nach *Mac Laurins* Tod als Appendix zu seiner Algebra. Der Satz vom eingeschriebenen und umgeschriebenen Viereck (ohne die Diagonalenfigur) findet sich schon bei *R. Simson*, Sectionum conicarum libri V, Edinburgh 1735, p. 197; vgl. *Kötter*, Bericht, p. 33 u. 50.

37) Sie wurden durch seine Schüler bekannt, die sofort eine Reihe von Einzelsätzen aufstellten; sie beschäftigen sich auch schon mit dem Ort, den eine Ebene umhüllt, wenn ihr Pol gewisse Kurven oder Flächen beschreibt, und erkannten insbesondere, daß einer Raumkurve eine abwickelbare Fläche entspricht. Vgl. z. B. Férussac Bull. 11 (1829), p. 1; 15 (1831), p. 218. Näheres bei *Staude* III C 2, Nr. 38 ff.

38) Journ. de l'éc. polyt., Heft 13 (1806), p. 297.

39) Dieser Gedanke tritt auch schon bei *D. Encontre* und *Stainville* auf; Gerg. Ann. 1 (1810), p. 122 u. 190.

40) Vgl. Mém. sur la théorie genérale des polaires réciproques, J. f. Math. 4 (1829), p. 1. Die Arbeit war bereits 1824 der Pariser Akademie vorgelegt worden.

Punkt- und Tangentengebilde[41]), sowie das wechselseitige Entsprechen ihrer Singularitäten[42]), und erhebt sich zu der allgemeinen Idee, daß sich jeder von Punkten und Geraden handelnde deskriptive Satz *reziprok* übertragen läßt. Er bemerkt auch, daß die Polarität bezüglich einer F_2 zu einer *räumlichen Reziprozität* und einem analogen Entsprechen der Flächen führt, so daß die Regelflächen sich selbst reziprok sind, den Raumkurven mit ihren Tangenten und Schmiegungsebenen die abwickelbaren Flächen mit ihren Erzeugenden und den Punkten ihrer Wendekante entsprechen, usw. usw.[43]).

Auf Grund der ersten *Poncelet*schen Resultate und seiner Entdeckung der *Reziprozität* bezüglich der c_2 und F_2 hat alsbald *J. D. Gergonne*[44]) die *Dualität* als allgemeines Grundgesetz „der Ausdehnung" formuliert, so daß der gewöhnlichen Geometrie, in der der Punkt das Grundgebilde ist, eine Geometrie gegenübersteht, für die in der Ebene die Gerade, im Raume die Ebene das Grundgebilde abgibt. Diesem Gesetz legt er *axiomatischen* Charakter bei, er weist aber doch darauf hin, daß seine Richtigkeit aus *Poncelets* Methode der reziproken Polaren folge[45]). Auch haben wohl einige Untersuchungen, in denen die Dualität der Polyeder und der sphärischen Trigonometrie deutlich herausgearbeitet war, zu *Gergonnes* Konzeption beigetragen[46]). Die besondere Bedeutung des Dualitätsgedankens liegt in seiner über die Methode der reziproken Polaren hinausgehenden Allgemeinheit und Unmittelbarkeit; wenn wir heute projektiv und dualistisch denken,

---

41) Der Name „Klasse" einer Kurve stammt von *J. D. Gergonne*; vgl. Gerg. Ann. 18 (1828), p. 151.

42) Dies wird schon im Traité, p. 234, gestreift. Näheres bei *Berzolari* III C 4, Nr. 8.

43) Es gibt entsprechende Gebilde eines Polarsystems, die sich zugleich in gewissen Kollineationen entsprechen; es sind aber nur c_2 und F_2. Vgl. *G. Fouret* und *M. d'Ocagne,* Bull. S. M. F. 13 (1885), p. 204; 14 (1886), p. 18; sowie *A. del Re,* Palermo, Rend. 2 (1888), p. 87.

44) Gerg. Ann. 16 (1826), p. 209; 18 (1828), p. 149. An den ersten Aufsatz schloß sich im Band 17 u. 18 eine lebhafte Polemik zwischen *Poncelet* und *Gergonne* über die Tragweite und die Stellung der beiderseitigen Prinzipien, die man in ihrem wesentlichen Teil im Anhang zum Traité (2. Aufl. 2, p. 351) abgedruckt findet. Die richtigen Begriffe Ordnung und Klasse hat übrigens *Gergonne* erst im zweiten Artikel eingeführt.

45) Ein von der Polarentheorie unabhängiger Beweis beruht bekanntlich auf dem Fundamentalsatz für die reziproke Beziehung (Nr. 8).

46) Vgl. *Sorlin,* Gerg. Ann. 15 (1824), p. 273, sowie eine Arbeit von *Gergonne* selbst 15 (1824), p. 157, in der sogar schon das System der „doubles colonnes" auftritt, und die an eine analoge eines ungenannten Autors anschließt; Bd. 9 (1818) p. 321. Vgl. auch 11 (1820), p. 326 u. 12 (1821), p. 69.

dürfen wir das Verdienst *Poncelet* und *Gergonne* zu gleichen Teilen beilegen.

Bereits *Poncelet*[47]) hat die Reziprozität zur Übertragung *metrischer* Eigenschaften benutzt, indem er als Grundgebilde Kreis und Kugel wählte; er hat in seinem bekannten Streit mit *Gergonne* auch aus diesem Grunde die Überlegenheit der Methode der reziproken Polaren behauptet[48]). *M. Chasles*[49]) hat sich zur Übertragung metrischer Relationen der Parabel und des Paraboloids bedient. Später hat dann noch *A. Mannheim*[50]) metrische Beziehungen zwischen den Krümmungsverhältnissen reziproker Kurven abgeleitet, und zwar für Kreis resp. Kugel als Grundgebilde (vgl. auch Nr. 9).

6. Der allgemeine Verwandtschaftsbegriff. Bereits *I. Newton*[51]) und *Ph. de la Hire*[52]) benutzten zur Ableitung von Sätzen über c_2 eine Punktverwandtschaft, die sich durch Umlegen von zwei perspektiv liegenden Ebenen um ihre Schnittlinie ergibt. *G. Walker*[53]) benutzt zu dem gleichen Zweck eine Verwandtschaft, bei der jeder Punkt als Schnitt entsprechender Strahlen projektivischer Büschel zu betrachten ist, die eine Kollineation vermitteln. *L. Euler*[54]) besaß bereits den klaren Begriff affiner Raumtransformation. Um 1800 scheint der Begriff der geometrischen Transformation allgemein geläufig gewesen zu sein; man benutzte besonders diejenigen, die auf proportionale Koordi-

47) J. f. Math. 4 (1829), p. 51. Er überträgt z. B. Streckenrelationen in solche zwischen den Winkelsinus, und Kugelsätze in solche über Rotationsflächen. Vgl. auch Corresp. Quetelet 7 (1832), p. 118; Férussac Bull. 8 (1828), p. 109; 9, p. 110 u. 292, sowie *Bobillier*, Gerg. Ann. 18 (1827), p. 270.

48) Férussac Bull. 8 (1827), p. 110. *Gergonne* hatte das Dualitätsprinzip nur für die Eigenschaften der Lage (situation) aufgestellt.

49) Corr. Quetelet 5 (1829), p. 281 u. 6 (1830), p. 1. Vgl. dazu auch *Poncelet* in Corr. Quetelet 7 (1832), p. 118 u. 141. *Chasles* hat im Aperçu hist. p. 226 auch auf die *imaginäre* Kugel als Grundgebilde hingewiesen.

50) *Mannheim* überträgt z. B. die *Euler*sche Relation auf die Krümmungsradien der Schnittkurven, deren Ebenen durch eine Gerade gehen. Vgl. Journ. de math. (2) 11 (1866), p. 193. Andere Transformationen metrischer Relationen enthält seine Schrift: Transformations des propriétés métriques des figures, Paris 1857. Eingehender hat kürzlich noch *L. Ripert* die Dualisierung allgemeiner und metrischer Eigenschaften durchgeführt, Nouv. Ann. de math. (3) 17 (1898), p. 446; 18 (1899), p. 101 u. 306.

51) Vgl. dazu *C. Juel*, Nyt Tydskr. f. Math. 2 (1891), p. 3.

52) Sectiones conicae, 1685.

53) Vgl. über *G. Walker* und seinen treatise of conic sections (1794) einen Artikel von *C. Taylor* in Quart. Journ. 14 (1877), p. 25.

54) Introductio in analysin infinitorum 2, § 442. Er hat auch das Wort „Affinität" eingeführt. Vgl. auch *Möbius*, Baryc. Calcül, § 147 (Ges. Werke 1, p. 180).

natenänderung, auf Drehung des Koordinatensystems usw. hinauslaufen[55]). Erst *A. F. Möbius*[56]) hat jedoch diesem Begriff eine allgemeinere Bedeutung gegeben und sein Studium zum Selbstzweck erhoben; er ging davon aus, diejenige allgemeinste Verwandtschaft zu suchen, die die Ähnlichkeit, die Gleichheit und die Affinität als spezielle Fälle enthält. Er definiert sie so, daß Punkten, die auf einer Geraden oder Ebene liegen, wieder Punkte entsprechen, die auf einer Geraden resp. Ebene liegen, und bezeichnet sie als *Kollineation*[57]). Er zeigte bereits, daß die ebene Kollineation durch vier, die räumliche durch fünf Paare entsprechender Punkte allgemeiner Lage[58]) bestimmt ist. Den Beweis gründet er auf die nach ihm benannte „Netzkonstruktion". Bildet man nämlich aus je vier Punkten einer Ebene durch Verbinden und Schneiden alle weiteren Punkte, so gelangt man dadurch zu einem überall dichten[59]) Netz von Paaren entsprechender Punkte, womit *Möbius* den Beweis für erledigt ansah. Bei strengerer Auffassung bedarf jedoch dieser Beweis noch des Begriffs des Grenzpunktes. In der Tat wird, wenn man noch die Grenzpunkte zu Hilfe nimmt, jedem Punkt sein entsprechender zugewiesen (Näheres in Nr. 17).

Möbius zeigte auch bereits, daß zwei kollineare Ebenen stets in perspektive Lage gebracht werden können[60]) (Nr. 9).

Im Anschluß an *Möbius* hat bereits *A. J. Magnus*[61]) *alle* einein-

55) Vgl. z. B. die Anzeige von *Poncelets* Traité in Férussac Bull. 1 (1822), p. 5, sowie den Traité selbst, Vorrede, p. XXI. *M. Chasles* übertrug mittels affiner Transformation Sätze über Kugeln auf Ellipsoide. Er benutzte insbesondere auch solche speziellen Transformationsmethoden, die auf Kollineationen hinauslaufen, vgl. J. de math. 2 (1837), p. 388. Transformationsmethoden, die mit der Reziprozität gleichwertig sind, erörtert er im Aperçu hist., p. 223.

56) *Möbius* gelangte zur Idee der Kollineation an der Hand der Tatsache, daß das Fundamentaldreieck seiner baryzentrischen Koordinaten auf viele Resultate ohne Einfluß ist, und man daher die Koordinaten auf verschiedene Dreiecke beziehen kann, worin die kollineare Beziehung enthalten ist. Die Darstellung selbst, die eine eingehende Darlegung der Gesetze der Kollineation enthält, erschien im J. f. Math. 4 (1829), p. 101 (Ges. Werke 1, p. 447).

57) Die analytischen Formeln, die einer Kollineation entsprechen, finden sich schon bei *E. Waring*; er führt sie als Verallgemeinerung spezieller *Newton*scher Formeln ein und zeigt, daß der Grad einer Kurve erhalten bleibt. Vgl. *Chasles,* Aperçu hist., p. 218 Anm.

58) d. h. keine 3 auf g, keine 4 in ε.

59) Punkte heißen überall dicht in einem Gebiet, wenn jede dem Gebiet angehörige noch so kleine Kreisfläche mindestens einen von ihnen (also auch unendlich viele) enthält (vgl. I A 5, *Schoenflies* Nr. 11).

60) Baryc. Calcül § 230. Für kollineare Räume ist es nicht der Fall (Nr. 9).

61) J. f. Math. 8 (1832), p. 52.

deutigen Punktverwandtschaften zu bestimmen gesucht. Er fand außer der Kollineation noch die quadratische Verwandtschaft, die er irrtümlich für die allgemeinste hielt (Nr. 26).

7. Das Doppelverhältnis. Sind $ABCD$ vier Punkte einer Geraden, so wird der Quotient

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=(ABCD)$$

im Anschluß an *A. F. Möbius*[62]) als ihr *Doppelverhältnis* (*Dv*) bezeichnet. Ebenso besitzen vier Geraden $abcd$ durch einen Punkt, resp. vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ durch eine Gerade je ein *Dv* $(abcd)$ resp. $(\alpha\beta\gamma\delta)$, dessen Wert gleich dem analogen aus den Sinus der bezüglichen Winkel gebildeten Quotienten ist; man hat also

$$(abcd)=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)};$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta)=\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}:\frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}.$$

Der für die projektive Geometrie grundlegende Satz, daß vier Geraden durch einen Punkt dasselbe *Dv* haben, wie die vier Punkte auf einer sie schneidenden Transversalen, daß also das *Dv* projektiver Natur ist (Nr. 4), war bereits *Pappus* bekannt[63]).

Die theoretische Würdigung und Erörterung des *Dv* knüpft sich an *A. F. Möbius.* Sie beruht auf einigen grundlegenden Streckenrelationen, nämlich

$$AB+BA=0,\qquad AB+BC=AC$$

und der für vier Punkte einer Geraden stets erfüllten Identität[64])

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0.$$

Aus ihnen folgt, daß es zu den 24 Permutationen von $ABCD$ nur sechs verschiedene Werte des *Dv* gibt, deren jeder vier dieser Permutationen entspricht; wird $(ABCD)=\lambda$ gesetzt, so lassen sich die sechs Werte durch

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

---

62) Barycentr. Calcül, § 180ff.; vgl. auch J. f. Math. 4 (1829), p. 101; (Ges. Werke 1, p. 219 u. 447). *Möbius* sagt allerdings Doppelschnittverhältnis. *M. Chasles* hat für das *Dv* später den Namen *anharmonisches* Verhältnis eingeführt; Aperçu hist. p. 35. Über das *Dv* von vier Punkten einer Ebene vgl. Nr. 8.

63) Dieser Satz bildet das 129. Lemma zu den Porismen von *Euklid*; vgl. Pappi Alexandrini collectiones, herausgegeben von *F. Hultsch,* 2, Berlin 1877, p. 873.

64) Diese Identität kannte schon *L. Euler,* Petersb. Novi Commentarii 1 (1750), p. 49.

darstellen[65]). *Möbius* hat auch bereits den Produktsatz für die drei *Dv* von fünf Punkten gegeben, daß nämlich

$$(ABDE)(ABEC)(ABCD) = 1$$

ist, und gezeigt, daß sich ein *Dv* von vier Punkten *ABCD* durch die *Dv* ausdrücken läßt, die jeder von ihnen mit drei festen Punkten bestimmt[66]). Sind λ_a, λ_b, λ_c, λ_d die bezüglichen vier *Dv*, so ist

$$(ABCD) = \frac{(\lambda_a - \lambda_c)(\lambda_b - \lambda_d)}{(\lambda_b - \lambda_c)(\lambda_a - \lambda_d)}.$$

Diese Tatsache kann als Ausgangspunkt für die Theorie der projektiven Beziehung (Nr. 8) verwendet werden.

Wenn für die Punkte *ABCD* von den sechs Werten ihrer *Dv* je zwei einander gleich werden, heißen die Punkte *harmonisch*[67]); für sie ist $\lambda = -1$[68]). Sie zerfallen in zwei Paare *zugeordneter* Punkte, die einander (harmonisch) *trennen;* analog kann man harmonische Strahlen und Ebenen definieren. Der für die projektive Geometrie wichtigste Satz über harmonische Punkte lautet, daß in jedem vollständigen Vierseit zwei Gegenecken mit zwei Diagonalpunkten je ein Paar zugeordneter harmonischer Punkte bilden[69]). Für harmonische Punkte und Strahlen besteht eine große Zahl elementarer Relationen[70]).

Werden je drei Werte der sechs *Dv* einander gleich, so heißen *ABCD äquianharmonisch*[71]); solche Punkte sind jedoch niemals reell. Für sie ist λ einer dritten Einheitswurzel gleich.

---

65) Barycentrischer Calcül, § 184 (Ges. Werke 1, p. 221). Über die Gleichung, der die sechs Werte des *Dv* genügen, und ihre Eigenschaften vgl. die analytischen Ergänzungen von *O. Ludwig.*

66) Baryc. Calcül § 185. Bei n Geraden einer Ebene existieren $2n - 8$, bei n Ebenen $3n - 15$ unabhängige *Dv*, in denen die übrigen rational sind. Für Relationen zwischen *Dv* vgl. besonders auch *Chasles,* Traité de géom. sup.; *Battaglini,* Giorn. di mat. 1 (1863), p. 41, 97, 161, sowie die oben genannten Lehrbücher.

67) Für die Bezeichnung verweist *Steiner* auf *de la Hire*, Sectiones conicae, 1685.

68) Bei anderer Anordnung der Paare ergeben sich die Werte $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 2$.

69) Hierauf gründet sich die *lineale* Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen. *Steiner* (Werke 1, p. 290) führt sie auf *de la Hire* zurück. *E. Busche* gibt eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion für $\lambda = -n$, wo n eine ganze Zahl ist; Math. Ann. 41 (1893), p. 591.

70) Vgl. z. B. *M. Chasles,* Géom. supér. chap. IV; ferner *G. Dostor,* Ann. nouv. 10 (1851), p. 78. Vgl. auch Elementargeometrie, *J. Sommer,* III A B 10.

71) Diese Bezeichnung stammt von *L. Cremona,* Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Bologna 1862, p. 21.

F. Folie[72]) hat den Begriff des *Dv* auf $2n$ Punkte $ABC\ldots KL$ einer Geraden ausgedehnt, indem er es durch den Quotienten $AB \cdot CD \ldots KL : BC \cdot DE \ldots LA$ definiert; übrigens ist ein solches *Dv* durch einfache *Dv* ausdrückbar[73]).

Der Begriff des *Dv* kann auf Elementargebilde höherer Stufe ausgedehnt werden, indem man die Strecken und die ebenen Winkel durch die Dreiecksflächen und die körperlichen Winkel ersetzt. Auf die Möglichkeit einer solchen Verallgemeinerung wies bereits *Poncelet* hin. *Möbius*[74]) hat alsdann für sechs und mehr Punkte einer Ebene Produkte von Dreiecksverhältnissen angegeben, die projektiven Charakter haben. Das genaue Analogon der Streckenrelation, die dem *Dv* zugrunde liegt, gab *K. W. Clifford*[75]); für sechs Punkte einer Ebene ist

$$ABC \cdot DEF - ABD \cdot EFC + ABE \cdot FCD - ABF \cdot CDE = 0,$$

und dies ist eine projektive Relation. *Clifford* hat auch bereits das Analogon des Satzes von *Pappus* aufgestellt; er zeigte, daß gewisse Quotienten von je vier Dreiecksflächen, die auf sechs Ebenen eines Bündels durch ihre Schnittlinien mit irgendeiner anderen siebenten Ebene ausgeschnitten werden, von der Lage der siebenten Ebene unabhängig sind, und hat auf Grund davon die fundamentalen projektiven Beziehungen übertragen. Ein Fünfpunktverhältnis dieser Art gab *C. W. Merrifield*[76]); es ist das Dreiecksverhältnis

$$\mu = (ABC \cdot BCD \ldots EAB) : (ACE \cdot BDA \ldots EBD),$$

das bei allen 720 Permutationen nur zwölf Werte annimmt. Relationen für solche Dreiecksverhältnisse finden sich in großer Zahl bei *G. Battaglini*[77]); neuerdings hat besonders *E. Busche*[78]) ihr Verhalten gegenüber den 720 Permutationen untersucht. *J. Brill*[79]) hat kürz-

72) Brüssel Bull. belg. (2) 44 (1877), p. 469 u. 45 (1878), p. 88. Eine Erweiterung auf n Punkte gab auch schon *A. Terquem*, Nouv. Ann. 6 (1847) p. 68.

73) Eine andere Erweiterung gibt *Ch. Beyel* in der Weise, daß er das *Dv* aus einfachen additiv zusammensetzt. Er benutzt es zur Erzeugung von c_n mit $(n-1)$-fachem Punkt, Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889), p. 375.

74) Barycentrischer Calcül, § 222. Für die perspektive Lage wurde sie von *E. Heis* abgeleitet; Arch. f. Math. 31 (1858), p. 31.

75) London Math. Soc. Proc. 2 (1869), p. 3. *Clifford* gibt analoge Relationen für Größen, die je durch drei Geraden einer Ebene, oder durch drei Geraden resp. drei Ebenen eines Bündels bestimmt sind. Im Bündel treten die Sinus der durch je drei Ebenen oder Strahlen bestimmten körperlichen Winkel auf.

76) Mess. of math. (2) 6 (1875), p. 94; vgl. auch sein Note-book für 1870.

77) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 298.

78) J. f. Math. 114 (1894), p. 1.

79) Quart. Journ. 29 (1897), p. 286.

lich ebenfalls die obenerwähnte *Clifford*sche Verallgemeinerung des Satzes von *Pappus* ausgesprochen. Eine Ausdehnung des *Dv* auf sechs und neun Strahlen eines Bündels findet sich bei *F. Folie* und *Ch. Le Paige*, nebst Anwendungen auf F_2 und F_3[80]). (Näheres bei *O. Ludwig*.)

8. Die Grundgebilde und ihre projektive Beziehung. Hatte *J. V. Poncelet* die projektive Denkweise begründet, *A. F. Möbius* den Begriff der kollinearen Verwandtschaft geschaffen, so verdanken wir *J. Steiner*[81]) die Schöpfung der *Grundgebilde* als *Operationsmittel* und die *projektiven Erzeugungsmethoden*, d. h. die Kunst, aus den einfachen Grundgebilden durch bloßes Schneiden und Verbinden neue Gebilde abzuleiten, und so zu immer höheren geometrischen Gebilden aufzusteigen.

Grundgebilde erster Stufe sind 1) die *Punktreihe* $u(A)$ als Gesamtheit aller Punkte A auf einer Geraden u, die auch *Träger* der Punktreihe heißt, 2) der *Strahlenbüschel* $M(a)$ als Gesamtheit aller Geraden a einer Ebene durch einen Punkt M, den *Mittelpunkt* des Büschels, und 3) der *Ebenenbüschel* $u(\alpha)$ als Gesamtheit aller Ebenen α durch eine Gerade u, die *Achse* des Ebenenbüschels. Grundgebilde zweiter Stufe sind 1) das *Punktfeld* $\varepsilon(A)$ und das *Strahlenfeld* $\varepsilon(a)$, d. h. die Gesamtheit aller Punkte resp. Geraden einer Ebene ε, sowie 2) der *Bündel*, der insbesondere *Strahlenbündel* $S(a)$ oder *Ebenenbündel* $S(\alpha)$ heißt, je nachdem er als Gesamtheit aller Geraden oder aller Ebenen durch einen Punkt S aufgefaßt wird[82]). Grundgebilde dritter Stufe endlich ist der *Punktraum* $\Sigma(A)$ als Gesamtheit aller Punkte, sowie der *Ebenenraum* $\Sigma(\alpha)$ als Gesamtheit aller Ebenen; beide zusammen werden auch *räumliches System* Σ genannt. Die Grundgebilde stehen einander *dualistisch* gegenüber; und zwar Punktreihe und Ebenenbüschel, Punktfeld und Ebenenbündel, Strahlenfeld und Strahlenbündel, Punktraum und Ebenenraum, während der Strahlenbüschel sich selbst entspricht[83]). Diese Tatsache bewirkt, daß die projektiven Beziehungen

80) Brux. Bull. Belg. (2) 48 (1879), p. 41. Gewisse sechs Punkte der F_2 bestimmen mit jedem anderen Punkt sechs Strahlen von konstantem *Dv*; analog gewisse Gruppen von neun Punkten einer F_3 mit jedem anderen ihrer Punkte. Auch die Erzeugungsmethoden werden übertragen.

81) *Steiner* gibt für die Entstehung seiner Ideen das Jahr 1828 an. Vgl. Syst. Entw. Vorrede (p. 235 d. ges. Werke).

82) Auch der Name *Stern* ist im Gebrauch, besonders bei den italienischen Geometern.

83) In der Dualität bezüglich Ebene und Bündel entsprechen sich Punktreihe und Strahlbüschel, resp. Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

und die Erzeugungsmethoden dualisierbar sind; sie ist deshalb eines der fruchtbarsten *Übertragungsprinzipien* im Gebiet der Kurven und Flächen geworden[84]. (Über Involutionen als Grundgebilde vgl. Nr. 13.)

Eine Punktreihe u (A) und ein Büschel M (a) heißen *perspektiv* gelegen oder bezogen, wenn die Punktreihe ein *Schnitt* des Büschels ist, d. h. wenn jedem Strahl a des Büschels sein Schnittpunkt A mit u zugewiesen wird[85]. Ebenso heißen zwei Punktreihen u (A) und u' (A') perspektiv bezogen, wenn sie Schnitte desselben Büschels sind; zwei entsprechende Punkte A und A' liegen auf demselben Büschelstrahl und im Schnittpunkt von u und u' liegen zwei entsprechende Punkte vereinigt. Das Analoge gilt für Ebenenbüschel und Punktreihe, sowie für Ebenenbüschel und Strahlenbüschel. Ein Bündel S und eine Ebene ε heißen perspektiv gelegen oder bezogen, wenn jedem Strahl a von S in ε sein Schnittpunkt A und jeder Ebene β von S ihre Schnittgerade b in ε entspricht, und analog ist es für zwei Ebenen, resp. zwei Bündel. Hebt man durch Verschieben der Punktreihen, Ebenen usw. die perspektive Lage auf, während die vorhandene Beziehung der Elemente erhalten bleibt, so ergibt sich die *projektive* Beziehung. In dieser Weise hat *J. Steiner*[86] die projektive Beziehung zweier Punktreihen oder Büschel zuerst eingeführt.

Wird die Lage der Grundgebilde *im Raum als unveränderlich* angesehen, so muß ihre projektive Beziehung auf andere Weise begründet werden. Für zwei einstufige Grundgebilde kann sie auf drei verschiedene Arten definiert werden. Diejenige Definition, die sich aus der ursprünglichen perspektiven Lage unmittelbar ergibt, und die ebenfalls bereits bei *J. Steiner* auftritt, stützt sich auf den *Pappus*schen Satz von der projektiven Natur des *Dv* und nennt demgemäß zwei Punktreihen oder Büschel *projektiv* bezogen, wenn die Elemente sich eineindeutig entsprechen, und die *Dv* entsprechender Elemente einander gleich sind[87]. *Die projektive Beziehung ist durch drei Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt* (*Fundamentalsatz*)[88]. Die Stetigkeit ist eine Folge dieser Definition; eine weitere Folge ist, daß zwischen den Abszissen entprechender Punkte zweier projektiven Punkt-

84) Von zwei Sätzen, die durch dualistische Übertragung auseinander hervorgehen, wird im folgenden immer nur einer angeführt.

85) Der Büschel wird als *Projektion* oder *Schein* der Punktreihe bezeichnet.

86) Syst. Entw. § 6. Die projektive Beziehung irgendwelcher Gebilde bezeichnet *M. Chasles* als *Homographie*, die perspektive bezeichnet schon *Poncelet* als *Homologie*.

87) Vgl. auch *A. F. Möbius*, Barycentr. Calcül, § 194.

88) Hierzu und für das Folgende vgl. auch III AB 1, Nr. 20, 21, (*Enriques*)

reihen eine *bilineare* Relation besteht. Diese bilineare Relation bildet die *analytische* Grundlage der projektiven Beziehung; auch *M. Chasles*[89]) hat zur Definition von vornherein Streckenrelationen benutzt, die der bilinearen Relation äquivalent sind[90]). Wenn $ABC \dots MN \dots$ und $A'B'C' \dots M'N' \dots$ entsprechende Elemente sind, so wird dies durch

$$ABC \dots MN \dots \pi A'B'C' \dots M'N' \dots$$

bezeichnet[91]). *M. Chasles*[92]) hat später das Postulat aufgestellt, daß jede eineindeutige nicht transzendente Beziehung eine projektive sei. Dies kann im komplexen Gebiet bekanntlich bewiesen werden; doch läßt es sich, wenn man nur im Reellen bleibt, in dieser allgemeinen Form nicht aufrecht erhalten, wie von *C. F. Geiser* an einem Beispiel gezeigt wurde[93]).

2) Will man die projektive Geometrie von der euklidischen Metrik und den Kongruenzaxiomen unabhängig aufbauen[94]), so darf man weder das *Dv* zugrunde legen, noch das Bewegungsmoment, das im ursprünglichen Ausgangspunkt bei *Steiner* vorhanden ist. Eine Definition, die dem Rechnung trägt, ist zuerst von *K. G. C. v. Staudt* auf-

---

89) Aperçu hist., p. 32; vgl. auch den Traité.

90) Das *Dv* als Invariante der bilinearen Beziehung erkannte zuerst *A. Cayley*, Paris C. R. 41 (1855), p. 1097 (Collect. Papers 2, p. 566).

91) Diese Bezeichnung ist auch für entsprechende Elemente von Ebenen, Bündeln, Räumen im Gebrauch.

92) Paris C. R. 41 (1855), p. 1097. *Chasles* hat dort noch ein analoges Prinzip aufgestellt; es betrifft die eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten einer Punktreihe und den Punkte*paaren* einer anderen und besagt, daß die Punktepaare eine zur Punktreihe projektive Involution bilden (Nr. **13**).

93) Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 25. Der Satz, daß zwei Tangenten einer Ellipse von einer dritten beweglichen in projektiven Punktreihen geschnitten werden, müßte sich nämlich sonst auf jedes konvexe Oval ausdehnen lassen.

Die algebraische Gleichung, die *Chasles* implizite für beide Veränderliche voraussetzt, kann nämlich für jede von ihnen immer nur eine einzige reelle Wurzel haben. Trotzdem hat das *Chasles*sche Prinzip wie auch das allgemeine Korrespondenzprinzip eine Fülle wertvoller Resultate geliefert; augenscheinlich deshalb, weil man es nur dann anzuwenden pflegt, wenn wirklich die *Gesamtzahl* der möglichen Punktzuordnungen (einschließlich der imaginären) bekannt ist, man also tatsächlich im komplexen Gebiet operirt. (Vgl. *Zeuthen* III C 3, Nr. **12** u. **13**.)

Einen Beweisversuch des obigen *Chasles*schen Prinzips gab *W. Fiedler*, Zeitschr. Math. Phys. 6 (1861), p. 1, indem er ohne weiteres aus dem algebraischen Charakter der Relation auf ihre bilineare Form schloß. Vgl. auch *H. Schoute*, Diss. Leiden (1870).

94) Hierfür ist neben methodischen Gesichtspunkten die Rücksicht auf die nichteuklidische Geometrie maßgebend (*Enriques*, III AB 1).

gestellt worden (Nr. 17); eine zweite, die von *L. Cremona*[95]) stammt, bezeichnet zwei Punktreihen oder Büschel als projektiv, wenn sie das erste und letzte Glied in einer Kette von lauter perspektivisch liegenden Elementargebilden sind[96]). Diese Formulierung ist auf Ebene und Raum übertragbar. Wichtig ist noch die geringste Zahl der Glieder der Kette, deren man zur Vermittelung der projektiven Beziehung bei gegebenen Gebilden bedarf[97]).

Die im obigen Sinn gefaßte projektive Beziehung *zweier Ebenen* ε und ε' ist identisch mit der *kollinearen* Beziehung, die schon bei *A. F. Möbius* (Nr. 6) auftritt. Sie ist daher so definierbar, daß jedem Punkt A ein Punkt A' und jeder Geraden g eine Gerade g' entspricht, und vereinigte Lage von Punkt und Gerade wieder vereinigte Lage bedingt, d. h. wenn P auf g liegt, so liegt P' auf g'. Wie man eine solche kollineare Beziehung *konstruktiv* herstellen kann, hat zuerst *F. Seydewitz*[98]) gezeigt, indem er zwei Büschel jeder der beiden Ebenen so aufeinander bezog, daß für *beide* Beziehungen der gemeinsame Büschelstrahl dem gemeinsamen Strahl entspricht, und daß je zwei entsprechende Büschel und Punktreihen einander projektiv sind. Der Hauptsatz der Theorie lautet, daß die kollineare Beziehung durch vier Paare entsprechender Punkte oder Geraden allgemeiner Lage[99]) bestimmt ist. Er ist eine unmittelbare Folge des obigen Fundamentalsatzes. Setzt man, wie es bei *Möbius* geschieht, die projektive Beziehung der Gebilde erster Stufe nicht voraus, so bedarf der Beweis des Hauptsatzes, der durch die *Möbius*sche Netzkonstruktion geführt wird (Nr. 6), außerdem eines Stetigkeitsaxioms (vgl. Nr. 17). Entsprechende Punktreihen und Büschel in ε und ε' sind zueinander projektiv. Nach *H. Schröter*[100]) ist jedes Paar entsprechender Punkte A, A' dadurch ersetzbar, daß zwei Punkten P, Q von ε in ε' Punkte entsprechen sollen, die auf gegebenen Geraden p', q' liegen. Durch acht

---

95) Elemente der projektivischen Geometrie, § 33; vgl. auch *J. Thomae*, Ebene Gebilde, p. 16, sowie *F. Aschieri*, Bologna Mem. (4) 1 (1881), p. 145.

96) Die Benutzung einer Kette perspektiver Beziehungen zur Vermittelung der projektiven Beziehung tritt schon bei *Staudt* auf; Geom. d. Lage, p. 55. Er erschließt sie dort auf Grund seines Fundamentalsatzes; vgl. Nr. 17.

97) Für ebene Systeme reichen nach *V. Dantscher v. Kollesberg* (Innsbr. Ber. 18 (1889), p. 68) drei Perspektivitäten aus. Für räumliche Systeme hat *F. Aschieri* eine Kette aufgestellt, Ist. Lomb. Rend. (2) 18 (1885), p. 989. Nach einer Bemerkung von *C. Segre* ist die kleinste Zahl im R_n gleich $n - m$, wenn die Doppelelemente einen R_m bilden, Fortschr. d. Math. 17 (1888), p. 613.

98) Arch. f. Math. 7 (1846), p. 113; 8 (1846), p. 1.

99) D. h. keine drei P auf g, keine drei g durch P.

100) J. f. Math. 62 (1863), p. 219.

Punkte von ε und acht Geraden in ε' ist also die Beziehung ebenfalls eindeutig bestimmbar.

Die projektive oder kollineare Beziehung zweier Räume kann ebenfalls auf das eineindeutige Entsprechen in Verbindung mit der vereinigten Lage gegründet werden. Je zwei entsprechende Gebilde erster resp. zweiter Stufe beider Räume sind projektiv. Die räumliche Kollineation ist durch fünf Paare entsprechender Punkte, die sich in allgemeiner Lage befinden, bestimmt[101]). Der direkte Beweis des Satzes kann ebenfalls durch Netzkonstruktion in Verbindung mit einem Stetigkeitsaxiom geführt werden. Setzt man die Sätze über projektive Beziehung der Gebilde erster resp. zweiter Stufe voraus, so bedarf der Beweis eines solchen Axioms nicht mehr.

In kollinearen Räumen sind je zwei entsprechende Figuren entweder stets gleichstimmig oder stets ungleichstimmig[102]).

Eine Gruppe von vier in bestimmter Anordnung vorgestellten Punkten $ABCD$ einer Geraden wird nach dem Vorgang von *K. G. C. v. Staudt* als *Wurf* bezeichnet; durch ihre Einführung bezweckte er, den Begriff des *Dv* ohne Hilfe der Metrik zu definieren, was ihm auch gelungen ist. Er hat so einen Fortschritt prinzipieller Art vollzogen (Nr. **21**). Man kann auf Grund davon die obige metrische Definition der Projektivität so übertragen, daß man Gebilde kollinear nennt, wenn entsprechende Würfe projektiv sind. *G. Kohn*[103]) hat eine formale Verallgemeinerung dieses Begriffes auf Ebene und Raum vorgenommen. Ist die kollineare Beziehung von ε und ε' durch $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben, so bestimmt ein Punkt E mit $ABCD$ einen c_2, und damit auf ihm gewisse aus diesen fünf Punkten gebildete *Dv*. Es gibt dann in ε' zu c_2 einen eindeutig bestimmten c'_2 durch $A'B'C'D'$ und auf ihm einen Punkt E', der E entspricht und mit $A'B'C'D'$ auf c_2' die gleichen *Dv* bestimmt[104]). Man kann daher $ABCDE$ als einen *Punktwurf* der fünf Punkte bezeichnen, der bei kollinearer Beziehung invariant ist (vgl. Nr. **11**). Falls DE die Geraden BC, CA, AB in

101) Die Konstruktion entsprechender Punkte bei 5 gegebenen Punktepaaren gab *Poudra*, Nouv. Ann. de math. 19 (1860), p. 108.

102) Vgl. *G. Hauck*, Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 381; *C. Rodenberg*, ebenda 30 (1885), p. 114. Der Gegensatz ist derselbe, wie der zwischen rechter Hand und linker Hand. Für perspektiv liegende Räume hatte ihn schon *Staudt* kurz berührt, Geom. d. Lage, § 136.

103) Math. Ann. 46 (1895), p. 285. Der Begriff läßt die Ausdehnung auf den R_n zu, indem man dessen Normalkurve benutzt. Vgl. I B 2, *Fr. Meyer*, Nr. **25**, p. **394**.

104) Daß die kollineare Beziehung durch Zuweisung entsprechender c_2 und c_2' vermittelbar ist, findet sich schon bei *Möbius*, J. f. Math. 4 (1829), p. 134 (Ges. Werke 1, p. 473), und bei *F. Seydewitz*, Arch. f. Math. 8 (1846), p. 1.

A_1, B_1, C_1 trifft, so stellt auch $A_1 B_1 C_1 DE$ diesen Wurf dar. Diese Definition läßt sich auf den Raum übertragen. Die Lage der Punkte F, F' gegen die fünf Punkte $ABCDE$, die nebst $A'B'C'D'E'$ die Kollineation zwischen Σ und Σ' bestimmen, kann dadurch bestimmt werden, daß zu der durch $ABCDEF$ bestimmten c_3 die c_3' und auf ihr F' entsprechend bestimmt wird; es sind dann die *Würfe* $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ projektiv.

Zwei Ebenen ε und ε' heißen *reziprok* aufeinander bezogen, wenn jedem Punkt A, der auf b liegt, eine Gerade a' durch B' entspricht; analog heißen zwei Bündel S, S' reziprok, falls jedem Strahl a der Ebene β eine Ebene α' durch b' entspricht, und zwei Räume Σ, Σ', falls jedem Punkt A der Ebene β eine Ebene α' durch B' entspricht; damit entspricht von selbst jeder Geraden g eine Gerade g'[105]). Bereits *A. F. Möbius*[106]) hat die reziproke Beziehung zweier Ebenen aus der kollinearen abgeleitet; eine eingehendere Untersuchung hat sie jedoch erst durch *F. Seydewitz*[107]) gefunden. Die Sätze über kollineare Gebilde lassen sich durch Dualisierung auf reziproke Gebilde übertragen; insbesondere ist die reziproke Beziehung zweier Ebenen oder Bündel durch vier und die zweier Räume durch fünf Paare entsprechender Elemente bestimmt. Hierin ist zugleich ein independenter Beweis des allgemeinen ebenen und räumlichen Dualitätsgesetzes enthalten[108]). Im Anschluß an *M. Chasles* wird die Reziprozität vielfach als *Korrelation* bezeichnet.

Die kollineare und reziproke Beziehung zweier Räume Σ und Σ' kann auch durch projektivische Regelscharen vermittelt werden; man kann drei Strahlen der einen dreien der anderen zuweisen und alsdann noch festsetzen, ob die Beziehung kollinear oder reziprok sein soll.

Zwei Punkte A und B' resp. zwei Geraden a' und b heißen *konjugiert* in $\varepsilon, \varepsilon'$, falls A auf b', also auch B' auf a liegt, und analog für den Raum; sie heißen auch *Nullpaare*, und zwar deshalb, weil die bilineare ternäre Form, die analytisch die Reziprozität darstellt, für solche Paare von Punkten oder Geraden verschwindet. Gemäß dem obigen Satz von *H. Schröter*[109]) ist eine Reziprozität auch dann bestimmt, wenn irgendein Paar entsprechender Elemente A, a', resp. A, α' durch *zwei* Paare konjugierter Punkte ersetzt wird. Die Theorie der

105) Genauer entsprechen allen Punkten auf g alle Ebenen durch g'.

106) Baryc. Calcül § 288 ff.

107) Vgl. das Zitat in Anm. 104.

108) Über die Voraussetzungen dieses Beweises vgl. Nr. 17.

109) J. f. Math. 62 (1863), p. 219. Für die bezüglichen Konstruktionen vgl. besonders *F. London*, Math. Ann. 38 (1891), p. 334.

Nullpaare ist sonst wesentlich auf analytischer Grundlage entstanden[110]); ich erwähne hier nur noch den zuerst von *A. Clebsch*[111]) gegebenen Satz, daß fünf Nullpaare ein von ihnen abhängiges sechstes linear bestimmen (Nr. 24). Das Nähere bei *O. Ludwig*.

9. Metrische Eigenschaften der projektiven Beziehung. Für projektive Punktreihen und Büschel folgen aus der Gleichheit entsprechender *Dv* eine Fülle von metrischen Relationen für entsprechende Elementengruppen[112]). Von mehr prinzipieller Bedeutung sind die folgenden. Sind g und g' projektive Punktreihen, so entspricht dem unendlichfernen Punkt Q_∞ von g im allgemeinen ein endlicher Punkt Q' von g', ebenso dem Punkt R'_∞ von g' ein endlicher Punkt R von g. Die Punkte R und Q' heißen *Fluchtpunkte;* es hat $RA \cdot Q'A'$ für alle Punktpaare A, A' einen konstanten Wert. Dies konstante Produkt heißt *Potenz* der projektiven Beziehung. Es gibt zwei Punktepaare G, G' und H, H', so daß

$$RG = Q'G' = HR = H'Q'$$

ist; sie heißen *Potenzpunkte.*

Für zwei projektive Büschel M und M' gibt es je ein Paar entsprechender *rechtwinkliger* Strahlen s, t, resp. s', t', und es ist für je zwei Strahlen a, a' das Produkt $\operatorname{tg}(ta) \cdot \operatorname{tg}(s'a')$ konstant; es heißt wieder die *Potenz* der projektiven Strahlen. Auch für die Büschel existieren Strahlenpaare g, g' und h, h', so daß zugleich

$$(sg) = (t'g') = (hs) = (h't')$$

ist; sie heißen *Potenz*strahlen. Die gleichen Winkel (st) und $(s't')$ repräsentieren übrigens nur einen speziellen Fall eines doppelten Systems gleicher Winkel; zu a, a' gibt es zwei Paare c, c' resp. d, d', so daß $(ac) = (a'c')$ und $(ad) = (d'a')$ ist. Analog gibt es für zwei Punktreihen ein doppeltes System gleicher Strecken.

In zwei kollinearen Ebenen ε und ε' entspricht den unendlichfernen Geraden q_∞ und r'_∞ im allgemeinen je eine endliche Gerade q resp. r, die man *Fluchtlinien* nennt. *F. Seydewitz*[113]) zeigte, daß es in

---

110) Vgl. besonders *J. Rosanes,* J. f. Math. 88 (1879), p. 241 und 90 (1881), p. 303.

111) Math. Ann. 6 (1873), p. 205. Ein Beispiel solcher sechs Paare bilden die Schnittpunkte einer Ebene mit einer Doppelsechs auf einer F_3; vgl. *R. Sturm,* Math. Ann. 22 (1883), p. 574 und III C 7, *Fr. Meyer,* Flächen 3. Ordnung.

112) Vgl. besonders *M. Chasles*, Traité de géom. sup., sowie *A. Jacobi,* J. f. Math. 31 (1846), p. 40; *E. Heis,* Arch. f. Math. 31 (1858), p. 37; *G. Battaglini,* Giorn. di mat. 1 (1863), p. 1, 41, 97, 161; *G. Veronese*, Giorn. di mat. 17 (1879), p. 181.

113) Vgl. Arch. f. Math. 8 (1846), p. 10; vgl. auch *G. Battaglini,* Giorn. di

ε und ε' zwei Paare entsprechender kongruenter Büschel gibt, und daß die Verbindungslinie ihrer Zentra F, F_1 resp. F', F_1' auf der Fluchtlinie senkrecht steht; ebenso gibt es zwei Paare kongruenter Punktreihen, und ihre Träger laufen in jeder der beiden Ebenen der Fluchtlinie parallel. Zwei kollineare ebene Felder können daher stets in perspektive Lage gebracht werden[114]. *H. J. St. Smith*[115]) hat dem hinzugefügt, daß das Kreisbüschel mit den Nullkreisen F, F_1 in ein Kreisbüschel mit den Nullkreisen F', F_1' übergeht[116]); allgemein jeder c_2, für den F und F_1 Brennpunkte sind, in einen analogen c_2' mit F' und F_1' als Brennpunkten. Diese beiden Scharen entsprechender konfokaler c_2 beherrschen die metrischen Beziehungen von ε und ε'[117]).

Für zwei kollineare Bündel gibt es je ein Dreikant von drei entsprechenden rechtwinkligen Strahlen, das stets reell ist; ferner je zwei Paare kongruenter homologer Ebenenbüschel und Strahlenbüschel, deren Träger symmetrisch zu den Dreikantebenen liegen und gegenseitig aufeinander senkrecht stehen[118]).

In zwei kollinearen Räumen Σ und Σ' entspricht den unendlichfernen Ebenen ε_∞ und η'_∞ je eine im Endlichen gelegene Ebene ε' und η, die *Fluchtebene* heißt. Ihre metrischen Beziehungen sind vielfach untersucht worden[119]). Es gibt unendlich viele kongruente Punktreihen; ihre Träger bilden Parallelstrahlenbüschel in je zwei homologen den Fluchtebenen parallelen Ebenen[120]).

Sind α und α' entsprechende Ebenen, so gibt es stets ein zu ihnen senkrechtes Paar entsprechender Geraden b, b'; diese für die

mat. 4 (1866), p. 97, 174; *A. Transon,* Nouv. Ann. de math. (2) 8 (1869), p. 227; *E. Isè*, Acc. Pontan. Atti 24, Nr. 3 (1894).

114) Einen Beweis auf Grund der gleichen Strahlbüschel gibt *G. Kilbinger,* Zeitschr. f. Math. 42 (1897), p. 104.

115) London Math. Soc. Proc. 2 (1869), p. 196 (Collected papers 1, p. 545).

116) Die Nullkreise sind die beiden dem Büschel angehörigen Kreise vom Radius Null; sie sind zugleich die beiden Grundpunkte des orthogonalen Kreisbüschels.

117) Spezielle metrische Eigenschaften gibt auch *A. Cayley,* Quart. Journ. 3 (1860), p. 177 (Collect. Papers 4, p. 442).

118) Vgl. *F. Seydewitz*, Arch. f. Math. 9 (1847), p. 166, wo sich auch weitere Relationen finden; ferner *H. Faure*, Nouv. Ann. 17 (1858), p. 181; 18, p. 381; 19, p. 189. *H. Smith* hat diese Beziehungen aus der Betrachtung der Nullkegel abgeleitet; vgl. das Zitat in Anm. 86. Eine einfache geometrische Ableitung gibt *H. Schröter*, Theor. d. Oberfl., p. 377.

119) *Maegis,* Diss. Königsberg 1868; *F. Richelot*, Journ. f. Math. 70 (1869), p. 137; *G. Wenzel*, Diss. Breslau 1870; besonders aber von *H. Smith* (vgl. Anm. 115) und im Anschluß an ihn von *Th. Reye*, Math. Ann. 46 (1895), p. 423.

120) Nach *R. Sturm* bilden diese Träger eine Kongruenz (2, 2), doch sind alle anderen Geraden imaginär, Math. Ann. 28 (1886), p. 261.

metrischen Beziehungen wichtigen Geraden bilden je einen Komplex $\mathfrak{C}_2$, der identisch ist mit dem Achsenkomplex einer Schar konfokaler F_2, und dessen Haupttetraeder in Σ aus der ε_∞ und drei orthogonalen Ebenen besteht. Diese zwei Scharen konfokaler F_2 entsprechen einander und sind für die vorliegenden Probleme wiederum charakteristisch. Insbesondere sind je zwei entsprechende Fokalachsen dieser Flächen Achsen kongruenter Ebenenbüschel[121]). Die von diesen Achsen gebildete Kongruenz hat *R. Sturm*[122]) zuerst untersucht. Näher untersucht sind ferner die kongruenten Strahlbüschel[123]) und die einander entsprechenden Kreise[124]).

Formeln, die Krümmung und Torsion in entsprechenden Punkten ebener und räumliche kollinearer Kurven betreffen, sind vielfach aufgestellt worden, und das Analoge gilt für entsprechende Flächen[125]). Eine systematische Grundlage hierfür bieten wieder die entsprechenden konfokalen c_2 und F_2, und die durch sie bewirkten Teilungen von Ebene und Raum in entsprechende Bestandteile; in dieser Weise haben besonders *St. Smith* und im Anschluß an ihn *Th. Reye* die bezüglichen Formeln abgeleitet[126]). Da man jeden c_2 als projektives Bild eines Kreises, insbesondere seines Krümmungskreises ansehen kann, so lassen sich auf diesem Wege die Krümmungsverhältnisse der c_2 und F_2 geometrisch entwickeln; eine eingehende Darstellung gab *C. Cranz*[127]). Auch die Formeln von *Euler* und *Meusnier* sind in solcher Weise abgeleitet worden[128]). Formeln für Krümmung entsprechender Kurven in reziproken Systemen finden sich bei *L. Geisenheimer*[129]).

121) Von ihnen finden sich die Tangenten der Fokalellipsen schon bei *Richelot*, vgl. das Zitat in Anm. 88, p. 137.

122) Sie ist eine Kongruenz (6, 2); vgl. das Zitat in Anm. 89, p. 264.

123) Sie gehen zu einem Nullsystem ($\alpha = 6$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$) Veranlassung; *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1886), p. 267. Die Zahl $\alpha = 6$ bestimmt auch *H. Schröter*, Theor. d. Oberfl., p. 392; von diesen sechs Ebenen sind immer nur zwei reell.

124) *G. Kilbinger*, Diss. Straßburg 1880. In jeder Ebene bilden sie ein Büschel, dessen Potenzlinie in die Fluchtebene fällt.

125) *L. Geisenheimer*, Z. f. Math. 25 (1880), p. 215; *R. Mehmke*, Fortschr. d. Math. 1888, p. 861; *F. Machovec*, Prag Ber. 1888, p. 169; *C. Servais*, Brüssel Mém. cour. 58 (1898); *A. Demoulin*, Paris C. R. 126 (1898), p. 390.

126) Vgl. die Zitate in Anm. 115 u. 119.

127) Synthetisch-geometrische Theorie von Kurven und Flächen zweiter Ordnung, Stuttgart 1886. Die Krümmung der c_2 hat schon *J. Steiner* erledigt; vgl. *H. Schröter*, Vorles. § 38. Vgl. auch *C. Pelz*, Prag Ber. 1879, p. 205, sowie *Dingeldey* III C 1, Nr. 36, Anm. 222.

128) *W. Marx*, Math. Ann. 17 (1881), p. 110; *C. Cranz*, Zeitschr. f. Math. 31 (1886), p. 56; vgl. auch *A. Mannheim*, Anm. 35.

129) Zeitschr. f. Math. 30 (1885), p. 129.

Falls bei projektiven Punktreihen die unendlichfernen Punkte einander entsprechen, so heißen die Punktreihen *ähnlich*; je zwei entsprechende Strecken haben ein konstantes Verhältnis ϱ; für $\varrho = 1$ werden die Punktreihen *kongruent* oder *gleich*. Ebene und räumliche Systeme, deren unendlichferne Elemente entsprechende sind, heißen *affin*. In affinen Systemen entspricht dem Halbierungspunkt einer Strecke wieder der Halbierungspunkt, ferner jedem Parallelogramm ein Parallelogramm und jedem Parallelepipedon ein Parallelepipedon, endlich dem Mittelpunkt jedes c_2 und jeder F_2 wieder der Mittelpunkt der entsprechenden c_2' oder F_2'. Um zwei Ebenen oder Räume affin zu beziehen, kann man einem Dreieck ein Dreieck, resp. einem Tetraeder ein Tetraeder beliebig zuweisen. In affinen Systemen stehen je zwei entsprechende ebene Flächen, ebenso je zwei entsprechende Körpervolumina in konstantem Verhältnis zu einander[130]). Einen Spezialfall affiner Systeme bilden die *ähnlichen* Systeme. Die projektive Definition der Ähnlichkeit besagt, daß affine ebene Systeme ähnlich sind, wenn in g_∞ und g'_∞ die imaginären Kreispunkte einander entsprechen; räumliche, falls in ε_∞ und ε'_∞ die Kugelkreise entsprechende Gebilde sind[131]). Eine noch speziellere affine Beziehung bildet die Kongruenz resp. die Symmetrie[132]). (Vgl. *Schoenflies* IV 3, Nr. **1**.)

Für affine und ähnliche Systeme nehmen die oben abgeleiteten metrischen Verhältnisse einfachere Formen an, insbesondere auch die Sätze über die in ihnen etwa vorhandenen kongruenten Gebilde[133]). Insbesondere folgt aus den obigen Sätzen über projektive Büschel und Bündel, daß es in ebenen Systemen für je zwei Punkte P und P' ein Paar entsprechender rechtwinkliger Strahlen *konstanter* Richtung gibt, und für räumliche Systeme drei analoge orthogonale Strahlen *(Hauptaxen)*. (Über die metrischen Eigenschaften reziproker Grundgebilde vgl. Nr. **11**.)

10. Die Erzeugungsmethoden. Der mächtige Fortschritt, den das Studium der geometrischen Gebilde den Erzeugungsmethoden von

130) *Möbius* hat im Journ. f. Math. 12 (1834), p. 109 eine Verwandtschaft betrachtet, für die die Proportionalität der Volumina gilt, ohne daß sie projektiv ist (Ges. Werke 1, p. 517).

131) Die Einführung der Kreispunkte und des Kugelkreises in diese Definitionen läßt sich kaum feststellen; sachlich war sie durch den Traité von *Poncelet* schon gegeben oder wenigstens vorbereitet.

132) Die ebene Symmetrie behandelt *M. Chasles*, Paris C. R. 51 (1860), p. 905. Vgl. auch *R. Baltzer*, Journ. f. Math. 52 (1856), p. 146.

133) Vgl. z. B. *F. Seydewitz*, Arch. f. Math. 8 (1846), p. 28; *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1886), p. 261; *K. Moshammer*, Wien Ber. 74 (1876), p. 131, ferner auch *M. Chasles*, Bull. scienc. math. de *Férussac* 14 (1836), p. 321.

J. Steiner verdankt, beruht wesentlich auf zwei Umständen. Erstens besitzen die durch ihn geschaffenen Begriffe und Methoden unmittelbare *konstruktive*, der Anschauung zugängliche und daher im besten Sinn geometrische Vorzüge, zweitens aber erwiesen sie sich als der weitesten Verallgemeinerung zugänglich. Bestimmungsweisen der c_2, die auf eine projektive Erzeugung hinauslaufen, sind allerdings längst bekannt gewesen, ehe *Steiner* systematisch den c_2 als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen von projektiven Büscheln definierte. Hierhin gehört zunächst *Newtons* organische Konstruktion der c_2[134]), sowie ihre Erzeugung durch veränderliche Polygone, die bereits *Maclaurin* und *Braikenridge* bekannt war[135]). *J. N. P. Hachette*[136]) erzeugt einen Kegel durch Ebenenbüschel, deren Ebenen orthogonal sind, ebenso *J. P. M. Binet*[137]) das bezügliche Hyperboloid. *Benoit*[138]) gab die Erzeugung eines c_2 durch zwei Büschel, die ähnliche Punktreihen projizieren. *Giorgini*[139]) lehrte, daß die Geraden, die zwei Gegenkanten eines windschiefen Vierecks proportional teilen, ein hyperbolisches P_2 bestimmen; *M. Chasles* zeigte bald darauf, daß die entstehende Fläche ein H_2 ist, falls die Teilungsverhältnisse auf den Gegenkanten nicht gleich sind, sondern selbst ein konstantes Verhältnis besitzen[140]). Schon *H. Lambert* hatte bewiesen[141]), daß alle Geraden, die vier gegebene Geraden einer Ebene nach demselben Verhältnis teilen, eine Parabel bilden. Endlich erwähne ich den von *Manderlier*[142]) bewiesenen Satz, daß die Gegenseiten eines Tangentenvierecks einer Parabel von jeder fünften Tangente in proportionale Teile geteilt werden. *Chasles*[143]) hat diesen Satz später so auf be-

---

134) Vgl. dazu *C. Taylor*, Cambr. math. Proc. 3 (1881), p. 359 u. 381.

135) Über diese und andere Literatur vgl. auch *E. Kötter*, Bericht, p. 9.

136) Corr. polyt. 1 (1812), p. 179. Es ist der orthogonale Kegel.

137) Corr. polyt. 2 (1813), p. 70. Dies H_2 ist ebenfalls das orthogonale.

138) Bull. des sciences *Férussac* 3 (1823), p. 206 und Corr. Quetelet 4, (1828), p. 364. *Benoit* hat bereits den Satz, daß *irgend* zwei Punkte des c_2 als Büschelzentra gewählt werden können.

139) Corr. polyt. 2 (1813), p. 440. Die Existenz der so durch ein windschiefes Viereck bestimmten Fläche und die beiden auf ihr liegenden Geradenscharen treten schon bei *Meier Hirsch* auf; Sammlung geometrischer Aufgaben 2 (1807), p. 238.

140) Corr. polyt. 2 (1813), p. 446. Die Bedingung kommt auf die Konstanz des *Dv* hinaus; doch wird diese Folgerung bei *Chasles* nicht gezogen. Vgl. hierzu auch die ausführliche Darstellung bei *Kötter*, Bericht, p. 282 ff.

141) Insigniores orbitae cometarum proprietates, Vind. 1761, Sect. I, Lemma 18.

142) Corr. Quetelet 4 (1828), p. 155. Der Satz war von anderer Seite als Aufgabe gestellt worden.

143) Corr. Quetelet 4 (1828), p. 363. *Chasles* beweist auch die Umkehrung

liebige c_2 übertragen, daß diese Teilverhältnisse bei ihnen selbst in konstantem Verhältnis stehen. Wenn aber auch die Konstanz der *Dv* hierin klar zu Tage tritt, so ist es doch erst *Steiner* gewesen, der daran Ideen allgemeiner Tragweite knüpfte und den allgemeinen Begriff der projektiven Erzeugungsmethoden ersann.

Steiner ist zur projektiven Erzeugung der c_2 zunächst so gelangt, daß er von der evidenten Erzeugung des Kreises durch gleiche Büschel ausging und sie durch Zentralprojektion auf den c_2 übertrug; analog beweist er die Erzeugung durch projektive Punktreihen[144]). Daran schließt er alsdann die Erzeugung der K_2 und H_2 durch projektive Ebenenbüschel, resp. durch projektive Punktreihen, deren Träger windschief liegen. Die Erzeugung der F_2 durch reziproke Bündel lehrte *F. Seydewitz*[145]); er fand auch die Erzeugung der räumlichen c_3 durch zwei kollineare Bündel. Eine Konstruktion dieser c_3, die auf ihre Erzeugung durch drei projektive Ebenenbüschel hinausläuft, gab zuerst *Chasles*[146]). Das Sekantensystem der c_3 als Erzeugnis der beiden Bündel wurde zuerst von *Th. Reye*[147]) näher in Betracht gezogen. Als nächster natürlicher Fortschritt ist die Erzeugung der F_3 durch drei Bündel[148]), sowie endlich der *Reye*sche Komplex[149]) als Erzeugnis zweier kollinearer Räume zu erwähnen. Von besonderer Wichtigkeit sind hier noch die Beweise, daß die Mittelpunkte der Büschel, Bündel usw. keine ausgezeichneten Elemente der erzeugten Gebilde darstellen, sondern durch irgend zwei beliebige ersetzbar sind; sie wurden im allgemeinen unmittelbar mit der Erzeugung gefunden.

---

und hat darauf später den Anspruch gegründet, die projektive Erzeugung der c_2 gefunden zu haben. Vgl. hierzu auch die Ausführungen von *Kötter*, Bericht, p. 285 ff.

144) So in den Syst. Entw. § 37 ff.; freilich konnte er auf diese Weise die Allgemeinheit der erzeugten Gebilde nicht beweisen (Nr. 22). Die vom Kreis unabhängige Erzeugung lehrte er seit 1833 in seinen Vorlesungen; vgl. *Steiner-Schröter*, Vorles. Vorrede, p. 4.

145) Arch. f. Math. 9 (1847), 187 u. 10 (1848), p. 203.

146) Vgl. J. de math. (2) 2 (1857), p. 397; *Chasles* gibt hier (ohne Beweis) den Satz, daß die c_3 aus *je zwei* ihrer Sehnen durch projektive Büschel projiziert wird; die Erzeugung einer c_3 durch drei projektive Büschel ist augenscheinlich schon vorher bekannt gewesen. Sätze dieser Art enthält auch der Aperçu historique, Note 33. Und doch bedurfte der Fortgang von diesen Sätzen bis zum obigen *Chasles*schen Theorem volle 20 Jahre.

147) Geometrie der Lage 2, p. 66.

148) Dies geht der Sache nach auf *H. Graßmann* zurück, J. f. Math. 49 (1854), p. 59 (Ges. Werke 2¹, p. 136). Vgl. III C 7, *Fr. Meyer*. Über *Graßmanns* sonstige Erzeugungsmethoden vgl. *Berzolari* III C 4, Nr. 10.

149) Er findet sich zuerst dargestellt in der Geometrie der Lage 2 (1867), Kap. 15.

Eine erste Verallgemeinerung erfuhren die Erzeugungsmethoden dadurch, daß man den Begriff der Grundgebilde und der projektiven Beziehung, sowie die Erzeugungsmethoden auf ihre Erzeugnisse selbst ausdehnte[150]). Da man nämlich die c_2, die H_2, und die räumlichen c_3 aus beliebigen Punkten resp. Geraden durch projektive Gebilde erzeugen kann, so läßt sich für irgend vier Elemente der Begriff des *Dv* definieren. Damit ist auch die projektive Beziehung definierbar; z. B. versteht man unter dem *Dv* von vier Punkten eines c_2 das *Dv* der vier Strahlen, durch die sie aus *irgendeinem* Punkte des c_2 projiziert werden.

In dieser Richtung ist zuerst *Staudt*[151]) vorgegangen, indem er die grundlegenden Sätze auf „krumme" projektive Punktreihen übertrug. Er verwendet sie jedoch nur zu Sätzen über die besondere Lage zweier Kegelschnitte[152]). Zur Erzeugung neuer Gebilde haben sie zuerst *H. Schröter*[153]) und *L. Cremona*[154]) methodisch benutzt, indem sie auf diese Weise Erzeugungen ebener c_3 und c_4, sowie der R_3 ausführten.

Man kann die projektive Beziehung zweitens auf Büschel und höhere Mannigfaltigkeiten von Kurven und Flächen ausdehnen. Den Anstoß hierzu haben die Analytiker gegeben. Die geometrische Begründung geht wohl auf *Steiner*[155]) zurück. Er lehrte das c_2-Büschel als projektives Grundgebilde aufzufassen, indem er die Möglichkeit zeigte, es projektiv auf das Büschel seiner Tangenten in einem der reellen Grundpunkte zu beziehen. Seine Kombination mit dem Strahlbüschel führte sodann zur projektiven Erzeugung der ebenen c_3 usw.[156]);

150) *J. Steiner* spricht zwar von harmonischen Punkten und Tangenten eines c_2; die Idee, projektive Punktreihen auch auf einem c_2 zu betrachten, erscheint jedoch zuerst bei *A. Jacobi*, J. f. Math. 31 (1846), p. 67.

151) Geometrie der Lage, p. 149 ff. Vgl. auch das Zitat auf *Jacobi* in Anm. 150.

152) Vgl. auch *A. Göpel,* J. f. Math. 36 (1848), p. 317; er betrachtet wesentlich die perspektive resp. involutorische Lage der krummen Punktreihen, und gibt Anwendungen auf Ponceletsche Polygone.

153) J. f. Math. 54 (1857), p. 31; vgl. auch *H. Milinowski,* Zeitschr. f. Math. 18 (1873), p. 288. Man gelangt so nur zu *gewissen* c_3 und c_4. Für die Ausdehnung auf c_n vgl. *Milinowski*, J. f. Math. 78 (1874), p. 175. Auch eine *Newton*sche Erzeugung der c_3 und c_4 ist hier als Vorläufer zu erwähnen; vgl. das Zitat in Anm. 185.

154) J. f. Math. 58 (1861), p. 138.

155) Journ. f. Math. 47 (1854), p. 1. Die Arbeit stammt aus dem Jahr 1848 (Ges. Werke 2, p. 493). Vgl. auch *Steiner-Schröter*, Vorlesungen, 2. Aufl., p. 224 ff. Vgl. auch das Zitat auf *Chasles* in Anm. 156.

156) So verfuhr als erster *M. Chasles*, Paris C. R. 37 (1853), p. 949. *E. de Jonquières* zeigte übrigens, daß *Maclaurins* organische Erzeugung der c_3 und c_4 auf Erzeugung durch c_2-Büschel, insbesondere Parallelbüschel hinauslaufen.

damit war auch für die geometrische Theorie der algebraischen Kurven und Flächen die Möglichkeit begründet, höhere Kurven und Flächen durch projektive Büschel resp. Bündel von niederen zu erzeugen und zu definieren[157]). (Näheres bei *Fano* III A B 4a, Nr. **24** ff., *Berzolari* III C 4, Nr. **11**.)

Eine weitere Verallgemeinerung der projektiven Erzeugung besteht darin, daß nicht mehr je zwei entsprechende Elemente ein neues Gebilde durch Schneiden oder Verbinden liefern, sondern nur gewisse Elementenpaare. Hierher gehört die Erzeugung räumlicher c_3 durch kollineare Bündel, die Erzeugung ebener c_3 durch drei vereinigte kollineare Ebenen, die der Sache nach auf *H. Graßmann*[158]) zurückgeht, und einer Klasse von F_4 durch vier kollineare Räume, die von *F. Schur* gegeben wurde[159]). Auch die Ersetzung der bilinearen Beziehung durch die trilineare stellt eine Verallgemeinerung des Steinerschen Grundgedankens dar[160]); ebenso die auf dem Korrespondenzprinzip ruhende Zuordnung von mehrdeutig bezogenen Elementargebilden (*Zeuthen* III C 3, Nr. **12** ff.) und ihre Verwendung zur Erzeugung höherer Gebilde, mit der *Cremona* begonnen hat. Eine letzte Erweiterung, die hier zu nennen ist, betrifft die Frage nach der Mannigfaltigkeit der gleichartigen Erzeugungen desselben Gebildes[161]). Diese Fragestellung knüpft wesentlich an *Th. Reye*[162]) und *F. Schur*[163]) an und hat ebenfalls zu neuen Problemen prinzipieller Tragweite über Kurven, Flächen und Liniengebilde Veranlassung gegeben.

---

157) Hierin sind insbesondere *E. de Jonquières* und *L. Cremona* vorangegangen.

158) J. f. Math. 49 (1854), p. 59 (Ges. Werke 2^1, p. 136); ausführlicher wurde sie dann von *H. Schröter* erörtert, ebenda 62 (1863), p. 231. Man vgl. auch *Chasles*, Paris C. R. 52 (1861), p. 115. Die anderen *Graßmann*schen Erzeugungsmethoden finden sich Journ. f. Math. 36 (1848), p. 177; 42 (1851), p. 187, 204; (44) (1852), p. 1; 52 (1856), p. 254 (Ges. Werke 2^1, p. 73 ff.).

159) Math. Ann. 18 (1881), p. 27.

160) Vgl. die Erzeugung der F_3 durch drei trilineare Büschel (Nr. 25) bei *F. August*, Diss. Berlin 1862; vgl. auch *F. London*, Math. Ann. 44 (1894), p. 375. Von *Ch. le Paige* wurde eine *quadrilineare* Beziehung von vier Punktreihen so zur Erzeugung der F_3 benutzt, daß er die Punktreihen aus vier Geraden einer Ebene ε projiziert. Die Punkte, in denen sich je vier entsprechende Ebenen dieser quadrilinearen Büschel schneiden, bilden eine F_3 und die Ebene ε; Acta math. 5 (1884), p. 195. Vgl. auch *F. Schur*, Leipzig Ber. 36 (1884), p. 128, und III C 7, *Fr. Meyer*.

161) *F. Seydewitz* erkannte bereits, daß die F_2 nach Wahl der Bündelmittelpunkte auf unendlich viele Art durch reziproke Bündel erzeugbar ist; Arch. f. Math. 9 (1847), p. 158.

162) Geom. d. Lage, 2, p. 72, 74, 125, 177 und Journ. f. Math. 74 (1871), p. 1.

163) Math. Ann. 18 (1881), p. 1 Anm.

11. Vereinigte Lagen projektiver Systeme. Für zwei vereinigte Punktreihen oder Strahlbüschel gibt es zwei sich selbst entsprechende Elemente (*Doppelelemente*). Sind die Grundgebilde ungleichlaufend, so sind sie stets reell; sind die Gebilde gleichlaufend, so können sie auch zusammenfallen resp. imaginär werden. Bei Punktreihen insbesondere hängt dies von der Lage der Fluchtpunkte und Potenzpunkte (Nr. 9) zueinander ab; die Doppelelemente sind reell, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem

$$RQ' > GH,\ RQ' = GH \text{ oder } RQ' < GH$$

ist[164]. Die beiden Doppelelemente M und N haben die sie definierende Eigenschaft, daß das $Dv\ (MNAA')$ einen konstanten Wert λ hat. Für ihre Konstruktion gab bereits *J. Steiner* die beiden auch heute noch theoretisch wichtigen Methoden; die eine konstruiert sie geometrisch auf Grund der Gleichungen

$$RM + MQ' = RQ' \quad \text{und} \quad MQ' \cdot MR = \tfrac{1}{4}\,\overline{GH}^2;$$

die andere benutzt einen festen Kreis, auf den sie beide Punktreihen projiziert, und läuft darauf hinaus, die Doppelpunkte zweier auf einer c_2 liegenden projektiven Punktreihen (Nr. **10**) zu bestimmen. Dies beruht darauf, daß sie sich als Schnittpunkte einer *linear* bestimmbaren Geraden mit dem c_2 ergeben. Eine dritte Konstruktion ist in Nr. **13** enthalten.

Auf der zuletzt genannten Konstruierbarkeit der Doppelpunkte beruht u. a. die Möglichkeit, eine große Reihe geometrischer Aufgaben dadurch mittels eines einzigen festen Kreises zu lösen, daß man die projektiven Punktreihen auf ihn überträgt (Aufgaben *zweiten Grades*[165]); im Gegensatz zu der großen Reihe von Aufgaben, die auf Grund der projektiven Beziehung oder der Erzeugungsmethoden *linear* konstruierbar sind)[166]. Hierher gehören z. B. gewisse Schließungsprobleme, d. h. die Aufgabe, Polygone zu zeichnen, die gegebenen Polygonen (z. B. auch sich selbst) ein- resp. umgeschrieben sind[167].

---

164) Ist $RQ' = GH$, so bilden die Punkte G, G' resp. H, H' das bezügliche eine Punktepaar.

165) Eine der wichtigsten Aufgaben dieser Art war die, die beiden Geraden zu konstruieren, die vier gegebene Geraden schneiden. Eine erste Lösung gaben *Brianchon* und *Petit*, Corr. sur l'école polyt. 1 (1812), p. 434; später *Bobillier* und *Garbinsky* in Gerg. Ann. de math. 18 (1828), p. 182, sowie *Steiner* in Journ. f. Math. 2 (1830), p. 268 (Ges. Werke 1, p. 145). Eine Lösung auf Grund der Doppelelemente gab *Steiner* in den Syst. Entw.; vgl. Werke 1, p. 402.

166) Diese Konstruktionen stützen sich meist auf die linear konstruierbaren einfachen Schnittpunktsfiguren, zumal auf den Satz vom vollständigen Viereck, den *Desargues*schen und *Pascal*schen Satz.

Bei ähnlichen Punktreihen liegt der eine Doppelpunkt im Unendlichen, ein zweiter im Endlichen; für kongruente Punktreihen fallen, wenn sie gleichlaufend sind, beide Doppelpunkte in den unendlichfernen Punkt. Für kongruente gleichlaufende Strahlbüschel werden die Doppelstrahlen von denen gebildet, die durch die imaginären Kreispunkte gehen; (*Minimalgeraden*) oder *isotrope* Geraden.

Vereinigte kollineare Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ haben im allgemeinen die Ecken P_i und die Seiten p_i eines Dreiecks (*Hauptdreieck*) als Doppelelemente entsprechend gemein. Sind A, A' entsprechende Punkte, so hat das Büschel $A(P_1 P_2 P_3 A')$ ein konstantes *Dv*; ferner ist auch das *Dv* $g(p_1 p_2 p_3 g')$ für alle Paare g, g' konstant, und es sind beide *Dv* einander gleich[168]. Man setzt dies nach *Staudt* in die Form[169])

$$P_1 P_2 P_3 A A' \;\pi\; P_1 P_2 P_3 B B'.$$

Sie drückt auch aus, daß die drei Seiten p_1, p_2, p_3 auf allen Verbindungslinien entsprechender Punkte projektive Reihen bestimmen, und ebenso reziprok. Jedes Punktepaar A, A' bildet mit $P_1 P_2 P_3$ den für die Kollineation *invarianten* Wurf (Nr. 8). Sind endlich $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ die Werte der *Dv*, die den drei Seiten des Hauptdreiecks zugehören und auf ihnen durch zwei entsprechende Geraden bestimmt werden, so ist $\lambda' \lambda'' \lambda''' = 1$. Es gibt fünf verschiedene Spezialfälle der vereinigten Lage kollinearer Ebenen. Von den Doppelpunkten können alle oder nur einer reell sein, sie können auch teilweise oder sämtlich zusammenfallen; man kann diese Fälle methodisch z. B. so erhalten, daß man ε und ε' als Schnitte kollinearer Bündel ansieht und die Lage der durch sie erzeugten c_3 zur Ebene ε ins Auge faßt[170]. Für affine

---

167) Solche sowie auch andere Probleme finden sich in großer Zahl bereits in den ersten Bänden der Ann. de math. von *Servois, Gergonne* und *Lhuilier* behandelt; vgl. 2 (1811), p. 116 u. 285; 8 (1877), p. 141. Vgl. auch *Poncelet*, Traité, § 552, sowie besonders *Steiner*: Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833 (Werke, herausgeg. von *Weierstraß* 1, p. 461). Auch *Poncelet* hat in seinem Traité § 255 schon darauf hingewiesen, daß man alle Aufgaben zweiten Grades lineal erledigen kann, wenn man einen festen Kreis und seinen Mittelpunkt hat. Bei *Steiner* findet sich insofern ein Fortschritt, als der Mittelpunkt durch die oben im Text genannte Methode der Konstruktion der Doppelpunkte entbehrlich wird. Vgl. auch *Kötter*, Bericht, p. 135. Die sogenannte Methode der falschen Position läuft sachlich ebenfalls auf die Bestimmung der Doppelelemente projektiver Gebilde hinaus. Vgl. z. B. *L. Cremona*, Elemente der projektiven Geometrie, p. 213.

168) Vgl. *Ch. Beyel*, Zeitschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 157 u. 37 (1892), p. 59.

169) Beiträge, p. 332; vgl. auch *G. Kohn*, Math. Ann. 46 (1895), p. 285.

170) Vgl. *G. Loria*, Giorn. di mat. 22 (1884), p. 1. Über perspektive Lage vgl. Nr. 12.

Systeme gibt es im allgemeinen nur einen im Endlichen gelegenen Doppelpunkt, den *Affinitätspol*; für ähnliche Systeme ist es der *Ähnlichkeitspol*, für kongruente der *Drehungspol*; für kongruente und ähnliche Systeme fallen die beiden anderen Doppelpunkte in die imaginären Kreispunkte. (Näheres bei *Schoenflies* IV 3, Nr. **1**.)

Bei Beschränkung auf den gewöhnlichen Raum sind kollineare Räume Σ, Σ' stets in vereinigter Lage. Sie haben im allgemeinen die Ecken P_i, die Kanten p_{ik} und die Ebenen π_i eines Tetraeders (*Haupttetraeder*) als Doppelelemente; ein Paar Gegenkanten ist notwendig reell[171]). Die Hauptrelation besagt, daß

$$P_1P_2P_3P_4AA' \;\pi\; P_1P_2P_3P_4BB'$$

ist[172]). Sie bedeutet, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte die Ebenen des Tetraeders in konstantem *Dv* schneiden, daß aus ihnen die Ecken durch Büschel von konstantem *Dv* projiziert werden, und daß beide *Dv* einander gleich sind. Die sämtlichen möglichen 13 Fälle hat auf geometrischer Grundlage bereits *K. G. C. v. Staudt*[173]) in Betracht gezogen. (Näheres bei *O. Ludwig*.)

Die wichtigsten Spezialfälle, die nicht involutorisch sind (Nr. **13**), sind folgende. Es können alle Punkte einer Geraden g und alle Ebenen durch eine Achse h Doppelelemente sein (*axiale* Kollineationen)[174]); es können alle Punkte zweier Geraden g und h, sowie alle Ebenen durch g und h Doppelelemente sein (*gescharte* Kollineationen), so daß g und h von allen Verbindungslinien entsprechender Punkte und allen Schnittlinien entsprechender Ebenen geschnitten werden; es können endlich alle Punkte und Geraden einer Ebene ε und alle Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels M Doppelelemente sein (*zentrische* Kollineationen). Im letzten Fall liegen sie im gewöhnlichen Sinn perspektiv. Im ersten Fall zerfällt der durch Σ und Σ' bestimmte tetraedrale Komplex $\mathfrak{C}_2$ in zwei lineare Komplexe, im zweiten degeneriert er in eine lineare Kongruenz von Doppelstrahlen, deren Leitstrahlen g und h sind; im dritten in den Bündel M und die Ebene ε, deren Strahlen

171) Vgl. z. B. *H. Schoute*, Arch. Néerl. 6 (1871), p. 348; *F. Lüroth*, Math. Ann. 13 (1878), p. 310.

172) *Staudt*, Beitr. 3, p. 382; vgl. auch *G. Kohn*, Math. Ann. 46 (1895), p. 285.

173) Beiträge 3, p. 328. Vgl. auch *G. Battaglini*, Giorn. di mat. 14 (1876), p. 116; Napoli Rend. 14 (1876), p. 2; *G. Loria*, ebenda 22 (1884), p. 1; *H. B. Newson*, Kansas Univ. Quart. 6 (1897), p. 63. Vgl. auch Nr. 15.

174) Vgl. *F. Schur*, Math. Ann. 19 (1881), p. 430, auf den die Bezeichnung *axial* zurückgeht.

ebenfalls sämtlich Doppelstrahlen sind[175]). In den beiden letzten Fällen sind die *Dv* $(ghPP')$ resp. $(M\varepsilon PP')$ für alle Punktepaare P, P' konstant.

Für affine, ähnliche und kongruente Systeme treten wieder Besonderheiten ein. Dem Tetraeder der Doppelelemente gehört stets die ε_∞ an; daher bleibt höchstens ein Punkt im Endlichen, der *Affinitätspol* oder *Ähnlichkeitspol* heißt. Ähnliche und kongruente Räume haben in ε_∞ den Kugelkreis k_∞ gemein und auf ihm zwei Doppelpunkte; der dritte ist der Pol ihrer Verbindungslinie bezüglich k_∞. Durch ihn geht die im Endlichen gelegene zweite reelle Doppelgerade; bei kongruenten Systemen ist sie die Drehungsachse resp. Schraubenachse[176]). Ähnliche Räume können durch Drehung um sie in ähnliche Lage in bezug auf den Ähnlichkeitspol gebracht werden; die eine im Endlichen vorhandene Tetraederebene steht auf ihr senkrecht[177]). Ähnliche Räume in ähnlicher Lage bilden einen speziellen Fall perspektiver kollinearer Systeme.

Vereinigte ebene kollineare Systeme können auch einen c_2 entsprechend gemein haben, so daß er durch die Kollineation in sich übergeht (freilich nicht punktweise). Giebt es einen solchen c_2, so gibt es unendlich viele; sie berühren einander in zwei Ecken des Hauptdreiecks und haben zwei seiner Seiten zu Tangenten. Die Kollineation heißt auch *Hermite*sche[178]). Analog kann eine räumliche Kollineation auch c_2, räumliche c_3 und F_2 in sich überführen (Näheres bei *O. Ludwig.*)

Man kann sich den Doppelpunkten vereinigter projektiver oder kollinearer Gebilde durch einen Grenzprozeß allmählich annähern. Darauf haben zuerst *G. Battaglini*[179]) und *Ed. Weyr*[180]) hingewiesen. Wird bei zwei vereinigten Punktreihen zu A der Punkt A' bestimmt, zu $A' = B$ der Punkt B' usw., so approximiert die Reihe $A'B' \ldots$ gegen einen der beiden Doppelpunkte, die Realität vorausgesetzt. Wird A als L' aufgefaßt, dazu L bestimmt, zu $L = K'$ wieder K, so approximiert die Reihe $L'K' \ldots$ gegen den anderen Doppelpunkt. Für kollineare Ebenen führen diese beiden Reihen ebenfalls zu zweien der Doppelpunkte, und das Analoge gilt von den Geraden und deren

175) Die Klassifizierung im Anschluß an den Komplex $\mathfrak{C}_2$ findet sich bei *A. Ameseder*, Wien Ber. 98 (1889), p. 290.

176) Näheres unter Kinematik (*Schoenflies* IV 3, Nr. 1). Dort werden auch die Ausnahmefälle, sowie die spiegelbildlich gleichen Systeme behandelt.

177) Vgl. *K. Moshammer,* Wien Ber. 74 (1876), p. 131.

178) Journ. f. Math. 47 (1853), p. 313. Die Bedingung, der der zur Kollineation gehörige Wurf (Nr. 8) genügt, gibt *G. Kohn*, Math. Ann. 46 (1895), p. 294.

179) Giorn. di mat. 1 (1863), p. 231.

180) Prag Ber. 1869, p. 3.

Ketten. Diese Verhältnisse hat besonders *L. Amodeo*[181]) näher betrachtet.

Einen ähnlichen Approximationsprozeß mittels eines Fünfecks hat *A. Clebsch*[182]) angegeben. Er beruht darauf, daß die Diagonalen des Fünfecks ein diesem kollineares Fünfeck bilden usw.; diese Fünfecke convergieren wieder gegen den Doppelpunkt.

Inzidente *reziproke* ebene Systeme hat zuerst *F. Seydewitz*[183]) ausführlich erörtert. Als ausgezeichnete Elemente treten die der g_∞ entsprechenden *Mittelpunkte* und ein durch sie gehendes Paar senkrechter konjugierter Strahlen (Nr. 8) auf[184]); bringt man sie zur Deckung, so entsteht ein Polarsystem (Nr. **13**). In jedem System gibt es einen c_2, dessen Punkte auf den entsprechenden Strahlen liegen; diese Strahlen umhüllen einen $\varkappa_2$ der analogen Eigenschaft, und zwar haben c_2 und $\varkappa_2$ eine doppelte Berührung. Umgekehrt kann ein solcher c_2 und $\varkappa_2$ immer zur Vermittlung einer reziproken Beziehung benutzt werden. Vereinigte reziproke Ebenen geben auch zu einer quadratischen Verwandtschaft Veranlassung (Nr. **25**).

In zwei reziproken Bündeln gibt es stets ein Paar entsprechender rechtwinkliger Dreikante, wie *H. Schröter* bewiesen hat[185]); sie lassen sich stets so legen, daß sie ein Polarsystem bilden, und zwar fallen dessen Hauptachsen mit den genannten ausgezeichneten orthogonalen Richtungen zusammen.

Für vereinigt liegende reziproke Räume bestehen analoge Sätze[186]). Es gibt in jedem Raum einen Mittelpunkt, der der ε_∞ entspricht, und durch ihn je ein Dreikant senkrechter Geraden, das sich wechselseitig entspricht.

In Σ und Σ' gibt es wieder je eine F_2 *(Kernfläche)*, deren Punkte auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, und diese Ebenen umhüllen je eine Φ_2; die Flächen F_2 und Φ_2 haben ein windschiefes Vierseit gemein, dessen Geraden sich in Σ und Σ' selbst entsprechen. Ordnet man je zwei Punkte einander zu, die in beiden reziproken

---

181) Giorn. di mat. 27 (1889), p. 40. Vgl. auch *M. Genty*, Bull. Soc. M. F. 21 (1893), p. 101, sowie *T. Brodén*, Über die Iteration ternärer Kollineationen mit rationalen Koeffizienten, Lund 1899.

182) Math. Ann. 4 (1871), p. 476.

183) Arch. Math. Phys. 8 (1846), p. 1.

184) Dies bemerkte schon *Seydewitz*; vgl. das Zitat in Anm. 183.

185) Journ. f. Math. 77 (1875), p. 105. Eine ausführliche Darstellung über reziproke Felder und Bündel enthält auch seine Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, § 49 u. 50.

186) *H. Schröter*, J. f. Math. 77 (1875), p. 105 und *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1881), p. 461.

Beziehungen derselben Ebene entsprechen, so bilden ihre Verbindungslinien (Wechselstrahlen) einen Komplex zweiten Grades $\mathfrak{C}_2$, dessen Singularitätenfläche in die Kernflächen zerfällt[187]). Ein zweiter für die Korrelation wichtiger Komplex und zwar ein linearer, wird von den Trägern derjenigen Punktreihen gebildet, die mit den zugehörigen Ebenenbüscheln eine Involution bestimmen[188]).

Eine vollständige Klassifikation aller Arten von Reziprozitäten auf Grund der Natur der Flächen F_2 und Φ_2, sowie der genannten Komplexe hat *D. Montesano*[189]) gegeben.

Reziproke Räume lassen sich im allgemeinen so legen, daß sie ein Polarsystem (Nr. **13**) bilden[190]); eine Ausnahme kann nur eintreten, falls ihre Mittelpunkte im Unendlichen liegen. Sie können aber dann möglicherweise noch zu einem Polarsystem bezüglich eines gleichseitigen oder eines Rotationsparaboloids vereinigt werden. Ist dies der Fall, so lassen sie sich sogar in die Lage des Nullsystems (Nr. **13**) bringen, worauf zuerst *G. Hauck*[191]) hingewiesen hat.

12. Besondere Lagen. Von allen besonderen Lagen ist die *perspektive* Lage (Nr. **8** und **9**) die wichtigste. Aus den Fundamentalsätzen der projektiven resp. kollinearen Beziehung folgt, daß projektive Punktreihen perspektiv liegen, falls sie ihren Schnittpunkt entsprechend gemein haben, und Ebenen, wenn sie alle Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben. Duale Sätze bestehen für Büschel und Bündel. Da es in zwei kollinearen nicht affinen Ebenen ε, ε' kongruente Punktreihen gibt, so können sie stets in perspektive Lage gebracht werden (Nr. **9**).

Vereinigte Ebenen liegen perspektiv, wenn sie alle Punkte einer Geraden u und damit auch alle Strahlen eines Büschels s gemein haben und umgekehrt; u und s bilden Achse und Zentrum der Perspektivität und werden auch *Kollineationsachse* und *Kollineationszentrum* genannt. Für alle Paare A, A' ist das $Dv\ (uSAA')$ konstant. Die ähnliche Lage zweier ähnlichen Ebenen ist ein Spezialfall der perspektiven mit g_∞ als Perspektivitätsachse u und dem Ähnlichkeitspol als Zentrum S; *Poncelet* hat zuerst auf sie hingewiesen (Nr. **4**)[192]).

187) Vgl. *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1887), p. 269, und III C 10, *E. Waelsch*, Liniengeometrie.

188) *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1881), p. 475 und 28 (1886), p. 268.

189) Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio, Napoli 1885.

190) *Th. Reye*, J. f. Math. 79 (1876), p. 68.

191) Zeitschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 362. Vgl. auch *C. Segre*, Giorn. di mat. 25 (1887), p. 20, wo die besonderen metrischen Verhältnisse näher erörtert werden.

192) Traité § 322 ff. Er zeigte auch, daß zwei sich doppelt berührende c_2

Kollineare Räume liegen perspektiv, falls sie alle Punkte einer Ebene und damit auch alle Strahlen eines Bündels gemein haben. Ebene und Bündelmittelpunkt stellen das Zentrum S und die Ebene σ der Perspektivität dar; das $Dv\,(S\sigma AA')$ ist wiederum konstant. Diese Lage wird auch als *zentrische Kollineation* bezeichnet. Die Idee perspektiver Lage für zwei Räume tritt ebenfalls zuerst bei *J. V. Poncelet*[193]) auf (Nr. 4). Kollineare Räume können nicht immer in perspektive Lage gebracht werden[194]). Dies wurde ziemlich gleichzeitig von *Maegis, L. Painvin* und *H. St. Smith* erkannt. Bei *Painvin*[195]) erscheint als Bedingung, daß dem Kugelkreis von Σ in Σ' wieder ein Kreis entspricht; bei *Maegis* und *Smith*[196]) hat sie die Form, daß die Fokalellipse von Nr. 9 ein Kreis ist[197]). *G. Hauck* hat die Bedingung folgendermaßen ausgesprochen. Sind u, v, w und u', v', w' die entsprechenden orthogonalen Strahlen für zwei Punkte P, P', und sind $U_1 V_1 W_1$ die Punkte von ε, die den unendlich fernen Punkten von u', v', w' entsprechen, und $U_2 V_2 W_2$ die analogen Punkte von ε', so müssen die Dreiecke $U_1 V_1 W_1$ und $U_2 V_2 W_2$ ähnlich sein[198]).

Sollen von drei vereinigten ebenen Systemen je zwei perspektiv liegen, so liegen die drei Zentra auf einer Geraden und es gehen die

---

eine Perspektivität bestimmen, für die die Berührungssehne die Achse und der Schnitt der Tangenten das Zentrum ist. Die verschiedenen ebenen Perspektivitäten hat im Anschluß hieran kürzlich *A. Emch* bestimmt, Diss. Kansas 1896.

193) Traité, § 582. Dort findet sich auch schon der Satz über perspektive Tetraeder, den später auch *Steiner* bewies (J. f. Math. 1 (1829), p. 1; Werke I, p. 3).

194) Während also in der Ebene die Perspektivität die allgemeinste Kollineation darstellt, trifft dies für den Raum nicht zu; die räumliche Perspektivität schließt nur 13 Konstanten ein (sie werden durch S, σ, den Wert des Dv und die 6 Parameter gebildet, die den ∞^6 Bewegungen des Raumes entsprechen), die allgemeine Kollineation jedoch 15.

195) Ann. nouv. (2) 9 (1870), p. 92. Damit deckt sich die Bedingung von *G. Kilbinger*, daß in Σ und Σ' entsprechende Kugelflächen existieren müssen, Diss. Straßburg 1880.

196) Vgl. Anm. 86. Vgl. auch noch *E. Dewulf*, Bull. sc. math. (2) 1 (1877), p. 137; *G. Bellavitis,* Atti Ist. Venet. (3) 15 (1870), p. 876.

197) Auch in geschart kollineare Lage können Σ und Σ' im allgemeinen nicht gebracht werden; vgl. *L. Bertnicker* und *G. Darboux*, Paris C. R. 104 (1887), p. 771 und 773.

198) Zeitschr. f. Math. 21 (1876), p. 413. Für affine räumliche Systeme ist die Bedingung von *A. Beck* so ausgesprochen worden, daß für einen der drei entsprechenden orthogonalen Hauptstrahlen der zugehörige Ähnlichkeitsfaktor den Wert 1 hat, Zeitschr. f. Math. 44 (1899), p. 85. In ähnlicher Form ergibt sich auch die Bedingung, daß zwei affine ebene Systeme in parallelperspektive Lage gebracht werden können.

drei Achsen durch einen Punkt. Ein ähnlicher, aber nicht ganz so einfacher Satz gilt für drei Räume. Es sind entweder die drei Ebenen vereinigt und es liegen die Zentra auf einer Geraden, oder es sind die drei Zentra vereinigt und es gehen die Ebenen durch eine Gerade[199]).

Die Grundlage aller besonderen Untersuchungen über perspektive ebene oder räumliche Figuren bilden die perspektiven Dreiecke und Tetraeder. Die Tatsache, daß zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ im Raum perspektiv liegen können, war schon *G. Desargues* bekannt. Auf *Ch. J. Brianchon* geht die Bemerkung zurück, daß auch ABC_1 und A_1B_1C, ebenso AB_1C und A_1BC_1, resp. A_1BC und AB_1C_1 je zwei perspektive Dreiecke für dasselbe Zentrum bilden[200]). Durch Projektion der räumlichen Figur ergeben sich die gleichen Sätze für die Ebene[201]). Einen theoretischen Fortschritt auf diesem Gebiet bedeutet aber erst die Bemerkung von *J. Rosanes*[202]) und *H. Schröter*[202]), daß zwei in derselben Ebene enthaltene Dreiecke auf mehr als eine Art perspektiv liegen können[203]); es kann auf 2, 3, 4 und 6 Arten geschehen, doch ist der letzte Fall reell nicht realisierbar. Die vierfach perspektiven Dreiecke hängen auf das Engste mit dem sogenannten *Clebsch*schen Sechseck zusammen, das auf 10 Arten ein *Brianchon*sches Sechseck ist[204]); bei jeder Teilung dieses Sechsecks in zwei Dreiecke sind diese Dreiecke vierfach perspektiv[205]).

Wie ein Dreieck und sein Polardreieck in bezug auf einen c_2 stets perspektiv liegen[206]), so gibt es auch umgekehrt stets einen c_2, in

---

199) *C. Rodenberg*, Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 113. Auch die Umkehrungen der Sätze sind richtig.

200) Journ. de l'éc. polyt. Heft 13 (1806), p. 297.

201) Vgl. auch Anm. 320.

202) Math. Ann. 2 (1870), p. 549 u. 553. Vgl. auch *J. Vályi*, Arch. Math. Phys. 70 (1884), p. 105 und Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 167.

203) *F. W. Kirchner* bestimmt die Mengen aller Dreiecke, die mit 1, 2, 3, 4, 6 anderen zugleich perspektiv liegen, Diss. Halle 1888.

204) Der einfachste Typus dieses Sechsecks ist im Bündel realisiert; er besteht aus den sechs Diagonalen des regulären Ikosaeders; vgl. *F. Klein*, Math. Ann. 12 (1877), p. 531.

205) Vgl. besonders *H. Schröter*, Math. Ann. 28 (1887), p. 457, sowie *E. Heß*, ebenda 28, p. 167, wo sich alle einschlägigen Fragen sehr ausführlich erörtert finden.

206) Den Satz gab *J. Plücker*, Journ. f. Math. 5 (1829), p. 11. Geometrisch wurde er von *A. Descos* in Nouv. Ann. de math. 4 (1845), p. 352 bewiesen. *A. Terquem* bemerkt dazu, daß er aus einem Theorem von *Chasles* über die F_2 folge, das in Gerg. Ann. de math. 19 (1829), p. 65 enthalten ist. Vgl. auch *Staudt*, Geometrie der Lage, p. 135.

bezug auf den zwei perspektive Dreiecke zueinander polar sind[207]). Sätze über perspektive Polygone sind in großer Zahl abgeleitet worden[208]).

Zwei Tetraeder können auch auf zwei und auf vier Arten perspektiv liegen. Die vierfach perspektive Lage ist noch auf zwei Arten möglich. Den wichtigeren dieser beiden Fälle bilden die *desmischen* Tetraeder, deren Möglichkeit zuerst *O. Hermes*[209]) bemerkte; sie treten in einer Reihe bemerkenswerter Konfigurationen auf und sind ausführlich zuerst von *C. Stephanos*[210]) untersucht worden. Hier sei nur noch erwähnt, daß die vier Perspektivitätszentra ein drittes Tetraeder bilden, das mit jedem der beiden anderen in bezug auf jede Ecke des dritten ebenfalls perspektiv liegt[211]). Vgl. III A B 5a, *E. Steinitz*, Konfigurationen.

Neben der perspektiven Lage ist auch die *hyperboloidische* Lage zweier Tetraeder vielfach untersucht worden, und noch allgemeiner diejenige, bei der die vier Verbindungslinien $A_i A_i'$ resp. die Schnittlinien $(\alpha_i \alpha_i')$ einer linearen Geradenmannigfaltigkeit angehören[212]).

J. Vályi[213]) findet, daß die vier Geraden entweder durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen oder einem H_2 angehören, oder zu je zwei zwei ebenen Strahlbüscheln, so daß der Mittelpunkt eines jeden in der Ebene des anderen liegt. Diese Möglichkeiten können auch kombiniert auftreten. Zwei reziproke polare Tetraeeder einer F_2 sind stets Tetraeder dieser Art, wie auch umgekehrt zu zwei solchen Tetraedern eine bezügliche F_2 existiert[214]). Die hyperboloidische

---

207) *J. Vályi*, Arch. Math. Phys. (2) 2 (1885), p. 320.

208) Vgl. z. B. *S. Kantor*, Wien Ber. 80 (1879), p. 715; *A. Keller*, Diss. Gießen 1888.

209) J. f. Math. 57 (1859), p. 218 u. 100 (1886), p. 258. Vgl. auch *L. Cremona*, Rom Lincei Mem. (3) 1 (1877), p. 142.

210) Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 424.

211) Eingehendere Arbeiten über perspektive Tetraeder gaben u. a. *Veronese*, Rom Linc. Mem. (3) 4 (1880), p. 132; *Th. Reye*, Acta math. 1 (1882), p. 97; *J. Vályi*, Arch. Math. Phys. (2) 3 (1886), p. 441; *H. Schröter*, J. f. Math. 93, p. 169 und 109, p. 341; *E. Heß*, Math. Ann. 28 (1887), p. 212; *L. Klug*, Arch. Math. Phys. (2) 6 (1888), p. 93.

212) *G. Kohn* betrachtet Tetraeder, die sich in gescharter Kollineation entsprechen; er bezeichnet sie als *schief perspektivisch*. Solche zwei Tetraeder sind einem und demselben dritten zugleich ein- und umgeschrieben. Wien Ber. 107 (1899), p. 777.

213) Monatsh. Math. 4 (1894), p. 121; Ungarn Ber. 13 (1895), p. 166, 189; Monatsh. Math. 6 (1895), p. 220.

214) *J. Rosanes*, J. f. Math. 90 (1881), p. 320; *J. Vályi*, Monatsh. Math. 6 (1895), p. 220; *P. Muth*, Zeitsch. Math. Phys. 38 (1893), p. 314.

Lage tritt schon bei *M. Chasles*[215]) auf. Mehrfach hyperboloidische Lagen von zwei Tetraedern hat besonders *F. Schur*[216]) untersucht; es ist dreifache, vierfache, fünffache, achtfache und neunfache Lage möglich. Er weist zugleich darauf hin, daß ebenso wie perspektive Tetraeder aus entsprechenden Punkten einer *zentrischen* Kollineation bestehen, hyperboloidisch liegende Tetraeder im allgemeinen entsprechende Punkte nicht einer gescharten, sondern nur einer *axialen* Kollineation bilden[217]).

Wenn bei einer ebenen Kollineation ein Dreieck ABC dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschrieben ist, so gibt es ∞^4 solcher Dreiecke und man sagt nach *M. Pasch*[218]): die Kollineation befinde sich in *eingeschriebener Dreieckslage*; die inverse Kollineation (Nr. **23**), die jedem Punkt A' den Punkt A zuordnet, befindet sich in *umgeschriebener* Dreieckslage. Eine Kollineation kann sich in eingeschriebener und umgeschriebener Lage befinden; den beiden Serien von je ∞^4 Dreiecken ist alsdann eine Serie von ∞^2 Dreiecken gemein, die einander ein- und umgeschrieben und daher identisch sind, d. h. die Kollineation ist eine zyklische von der Periode 3 und umgekehrt (Nr. **14**). *Pasch* hat diese Begriffsbestimmungen auf Korrelationen ausgedehnt; er hat solche Korrelationen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ betrachtet, bei denen das Produkt $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ (Nr. **23**) eine Kollineation in ein- resp. umschriebener Dreieckslage liefert, und nennt auch $\mathfrak{R}$ gegen $\mathfrak{R}'$ in ein- resp. umschriebener Dreieckslage befindlich[219]). (Näheres hierüber sowie über apolare Korrelationen und solche, die sich stützen, bei *O. Ludwig*.)

Eine Reihe von Arbeiten beschäftigt sich mit den besonderen Lagen gewisser einzelner Gebilde resp. mit mehreren Kollineationen in besonderer Beziehung[220]).

---

215) Aperçu hist. Note 32. Weitere Literatur in Math. Ann. 19 (1881), p. 429.

216) Math. Ann. 20 (1882), p. 270 ff. und 19 (1881), p. 429.

217) Es gibt für zwei beliebige Tetraeder zwei axiale Kollineationen, in denen sie sich entsprechen, ∞^1 für die hyperboloidische Lage und ∞^2 für die perspektive. Zwei perspektive Tetraeder entsprechen einander im allgemeinen in ∞^3 Kollineationen; darunter ist eine zentrische, keine axiale oder gescharte. *H. Schnell*, Diss. Gießen 1891, bestimmt die perspektiven und hyperboloidisch liegenden Tetraeder für alle ∞^3 Kollineationen, die dasselbe Haupttetraeder haben.

218) Math. Ann. 23 (1884), p. 419. Zwei Ecken eines Dreiecks sind beliebig und bestimmen eindeutig die dritte.

219) *Rosanes* bezeichnet solche Korrelationen als konjugiert. Eine geometrische Definition dieses Begriffs gab *S. Goldschmidt*, Diss. Gießen 1883, sowie Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 182.

220) Drei vereinigte kollineare Ebenen, deren drei Doppelpunktsdreiecke auf einem c_2 liegen, betrachtet *G. Tarry*, Paris C. R. 94 (1882), p. 141. *F. Freih.*

13. Involutorische Lagen. Zwei projektive Grundgebilde in vereinigter Lage heißen *involutorisch*, wenn je zwei Elemente einander doppelt entsprechen. In dieser Weise wurde die Definition von *M. Chasles*[221]) zuerst aufgestellt. Es besteht der Satz, daß das doppelte Entsprechen für je zwei Elemente gilt, wenn es für ein Paar der Fall ist. Sind AA', BB', CC' drei Paare entsprechender Punkte in zwei involutorischen Punktreihen, so ist

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'.$$

Diese fundamentale Relation für *sechs Punkte in Involution* oder drei Paare *konjugierter* Punkte war schon *Pappus* bekannt, als beim Schnitt einer Transversale mit einem vollständigen Viereck auftretend[222]). *G. Desargues*[223]) hat das *Zentrum* der Involution eingeführt, d. h. denjenigen Punkt O, der dem Punkt O'_∞ entspricht, und gezeigt, daß für jedes Punktepaar die Gleichung $OA \cdot OA' =$ const. besteht. Das vollständige System der sieben Streckenrelationen, die sich für sechs Punkte in Involution aufstellen lassen, gab wohl als erster *Ch. J. Brianchon*[224]). Metrische Relationen sonstiger Art hat insbesondere *Chasles*[225]) in großer Zahl aufgestellt. Involutorische Strahlbüschel erhält man am einfachsten, indem man die entsprechenden rechten Winkel wechselseitig aufeinander legt. Je nachdem die Doppelelemente der involutorisch liegenden Punktreihen oder Büschel reell oder imaginär sind, heißt die Involution *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Bei der hyperbolischen Involution bildet jedes Paar konjugierter Elemente mit den Doppelelementen vier harmonische Elemente.

Krieg v. Hochfelden untersucht drei räumliche Systeme, deren Kollineationen die Relation $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 = 1$ erfüllen (Nr. 23); Wien Ber. 97 (1888), p. 806. Vgl. auch *G. Kohn*, Wien Ber. 93 (1886), p. 314.

221) Aperçu hist. Note 10, p. 334. Ist das doppelte Entsprechen für *ein* Punktepaar vorhanden, so gilt es immer; vgl. *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 4 (1843), p. 283.

222) Vgl. Pappi Alexandrini collectiones, herausgegeben von *F. Hultsch*, 2 (1877), p. 873.

223) Oeuvres de *Desargues*, herausgegeben von *Poudra*, 1 (1864), p. 119. Es ist nur eine Abschrift des *Desargues*schen Hauptwerkes auf uns gekommen, die *Chasles* 1845 der Pariser Akademie vorlegte. Näheres bei *Chasles*, Aperçu historique, p. 74 und bei *Kötter*, Bericht, p. 43.

224) Er folgert es aus dem Ptolemäischen Lehrsatz; Mémoires sur les lignes du second ordre, Paris 1817, p. 11. Eine einfache algebraische Deutung dieser Relationen gibt *O. Hesse*, J. f. Math. 63 (1864), p. 179 (ges. Werke, p. 515).

225) Traité de géom. sup., chap. 9ff. Vgl. auch *H. Seydewitz*, Arch. f. Math. 4 (1844), p. 253; *A. Jacobi*, J. f. Math. 31 (1846), p. 45; *G. Battaglini*, Giorn. di mat. 1 (1863), p. 1, 41, 97, 161; *G. Becker*, Prag Ber. (1878), p. 272; *B. Klein*, Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 252.

Die einfachste elliptische Involution ist die *zirkulare*, bei der je zwei Elemente eines Paares (Strahlen) aufeinander senkrecht stehen; ihre Doppelelemente gehen durch die beiden Kreispunkte der Ebene, in der ihre Strahlen liegen. Die einfachste hyperbolische Involution ist die *Symmetrie*, bei der alle Paare symmetrisch gegen die Doppelelemente liegen[226]. Eine beliebige Ebeneninvolution kann stets durch eine zirkulare resp. symmetrische Strahleninvolution geschnitten werden und umgekehrt[227].

Fallen beide Doppelelemente der Involution zusammen, so heißt sie *parabolisch*; sie stellt eine *ausgeartete* Involution dar[228] (Nr. 15).

Außer beim vollständigen Viereck tritt die Punktinvolution auch beim Schnitt einer Transversale mit irgend drei c_2 eines c_2-Büschels auf[229], insbesondere also beim Schnitt mit dem c_2 und irgend einem eingeschriebenen Viereck[230].

Sucht man zu drei Punkten einer Geraden in jeder möglichen Anordnung den vierten harmonischen, so bilden diese drei Punkte mit den gegebenen eine Involution[231].

Der Begriff der Involution läßt sich auf die Punkte oder Tangenten einer c_2 übertragen; überhaupt auf alle Gebilde erster Stufe, also auf K_2, H_2 usw. Zwei involutorische Punktreihen auf einem c_2 liegen so, daß die Verbindungslinien aller Punktepaare durch einen Punkt (das Involutions*zentrum*) gehen[232], so daß die von ihm an den

---

226) Bei der symmetrischen Punktinvolution liegt ein Doppelpunkt unendlich fern; eine hyperbolische Involution kann daher in die Symmetrie projiziert werden (vgl. Nr. 22).

227) *H. Schröter*, Th. d. Oberfl., p. 19; *W. Fiedler*, Zürich Zeitschr. 26 (1881), p. 89.

Für besondere Sätze über Involutionen vgl. noch *E. Dewulf*, Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 385; *R. Böger*, Diss. Leipzig 1886; *G. Kohn*, Monatsh. Math. 2 (1891), p. 141, der das Auftreten der Involution beim Schnitt einer Geraden mit den zehn Flächen eines räumlichen Fünfflachs konstatiert.

228) Sie tritt z. B. auf den Tangenten eines c_2 auf; jeder Punkt ist dem Berührungspunkt konjugiert.

229) Diesen Satz gab *Ch. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), p. 180. Auf ihm beruht die bekannte Konstruktion der Doppelpunkte einer Involution mittels eines Kreisbüschels.

230) Der obige Satz stammt von *Desargues*; vgl. das Zitat in Anm. 223, p. 188. Über das Auftreten der Involution in der Polarität für den c_2 vgl. *F. Dingeldey* III C 1, Nr. 10.

231) Vgl. *Staudt*, Geometrie der Lage, § 220.

232) Vgl. *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 4 (1844), p. 264; *A. Jacobi*, J. f. Math. 31 (1846), p. 67.

Die involutorische Paarung hat ein Seitenstück auf den F_2. Werden deren Punkte durch je drei konjugierte Strahlen eines Polarbündels, dessen Scheitel auf

c_2 gehenden Tangenten die Doppelelemente liefern; auf seiner Polare (der Involutions*achse*) schneiden sich die involutorisch gepaarten c_2-Tangenten. Die Erzeugenden einer H_2 hat in analoger Weise zuerst *Chasles*[233]) involutorisch gepaart. Nach einem Satz von *Ed. Weyr*[234]) schneidet ein c_2-Büschel jeden durch zwei seiner Grundpunkte gehenden c_2' in einer Punktinvolution.

Mit jeder projektiven Beziehung hängt eine gewisse Involution zusammen, der eine prinzipiellere Bedeutung zukommt. Sind nämlich A, A' entsprechende Punkte vereinigter Punktreihen, und ist A_1 derjenige Punkt, dem A entspricht, so bilden A_1, A' entsprechende Punkte einer projektiven Beziehung, die die gleichen Doppelpunkte M und N besitzt, wie die ursprüngliche. Wird nun A'' so bestimmt, daß $A'A_1$ und AA'' zwei harmonische Paare sind, so bilden A, A'' eine Involution, die ebenfalls M und N als Doppelpunkte besitzt. Diese Sätze sind von *M. Chasles*[235]) gegeben worden; sie ermöglichen, die Konstruktion der Doppelpunkte einer Projektivität (Nr. **11**) auf diejenigen einer Involution zurückzuführen. Noch allgemeiner ist folgender Satz von *M. Pasch*[236]): Wird A'' so bestimmt, daß für gegebenes λ das $Dv\,(A'A_1AA'') = \lambda$ ist, so bilden A, A'' eine projektive Beziehung, die ebenfalls M und N als Doppelpunkte besitzt und durch die gegebene Projektivität in sich übergeführt wird.

Für zwei auf demselben Träger liegende Involutionen gibt es ein beiden gemeinsames Punktepaar. Werden die Involutionen auf einen c_2 projiziert, so wird es durch die Verbindungslinie der beiden Involutionszentren ausgeschnitten[237]). Es ist nur dann imaginär, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind und ihre Doppelelemente sich gegenseitig trennen. Alle geometrischen Konstruktionen, die auf die Ermittelung der gemeinsamen Elemente zweier Involutionen

---

der F_2 liegt, zu Tripeln vereinigt, so gehen alle durch je ein Tripel bestimmten Ebenen durch einen Punkt. Den Satz kannte schon *Fregier*, Gerg. Ann. 7 (1816), p. 97; einen ersten geometrischen Beweis gab *H. Schröter*, J. f. Math. 64 (1865), p. 180.

233) J. de math. 4 (1839), p. 348. Sätze über sie gibt z. B. *Staudt*, Beiträge 2, § 88 ff.

234) Wien Ber. 58 (1868), p. 223.

235) Traité de géom. sup., p. 186; 2. Aufl. (1880), p. 177. Vgl. auch *H. Schroeter*, J. f. Math. 77 (1874), p. 120.

236) J. f. Math. 91 (1881), p. 349 und Math. Ann. 23 (1884), p. 422. Der Satz läßt sich auf ebene Kollineationen übertragen; man nimmt drei Paare PQ, QR, RS entsprechender Punkte und bestimmt P' so, daß $PQRSP'$ derselben Punktgruppe kollinear sind. Vgl. auch *C. Segre*, Torino Mem. (2) 38 (1886), p. 3.

237) *F. Seydewitz*, Arch. f. Math. 4 (1844), p. 265.

führen, können daher mittels eines festen Kreises ausgeführt werden (Nr. **11**). Hierher gehört z. B. die Aufgabe, ein Punktepaar zu konstruieren, das mit zwei anderen Paaren zugleich harmonisch liegt.

Involutionen lassen sich, worauf zuerst *M. Chasles*[238]) hinwies, der projektiven Beziehung unterwerfen: Konstruiert man für vier Punktepaare und irgendeinen Punkt P je den vierten harmonischen Punkt, so ist das *Dv* dieser vier Punkte von P unabhängig und wird als *Dv der vier Punktepaare* bezeichnet, womit die Grundlage der projektiven Beziehung und damit auch die Ausdehnbarkeit der Erzeugungsmethoden gegeben ist (Nr. **10**). Sie wurden alsbald zur Erzeugung der Gebilde dritten und vierten Grades benutzt. (Vgl. *G. Kohn*, III C 5)[239]).

Die involutorische Lage zweier vereinigten *ebenen* Systeme ist nur ein besonderer Fall der perspektiven Lage, nämlich der, daß jedes Punktepaar durch Zentrum und Achse der Perspektivität harmonisch getrennt ist, also das zugehörige $Dv = -1$ ist. Ist das doppelte Entsprechen für zwei Punktepaare beliebiger Lage erfüllt, so auch für die ebenen Systeme. Diese besondere involutorische und zugleich perspektive Lage (*zentrische* Involution) ist auch für zwei *kollineare Räume* möglich; außer ihr aber noch eine zweite, die *schiefe* oder *gescharte* Involution heißt[240]); sie stellt denjenigen Fall der gescharten Kollineation (Nr. **12**) dar, daß jedes Punktepaar mit den Leitstrahlen der bezüglichen linearen Kongruenz vier harmonische Punkte bestimmt, also das konstante *Dv* dieser Kollineation (Nr. **11**) den Wert -1 hat. Sie ist durch die beiden Leitstrahlen bestimmt[241]). Lassen sich zwei Räume geschart involutorisch legen, so ist es auf ∞^1 Arten möglich[242]).

---

238) Paris C. R. 41 (1855), p. 679 u. 1079. Analytisch drückt sich die Beziehung durch eine in x, resp. y quadratische Gleichung aus, so daß eine aus den neun Koeffizienten gebildete Determinante verschwindet.

239) *H. Schroeter* hat eine synthetische Geometrie der ebenen c_3 auf die Erzeugung durch projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage gegründet; Math. Ann. 5 (1872), p. 63. Über Erzeugungen mittels höherer Involutionen vgl. *H. G. Zeuthen*, III C 3.

240) Ihren einfachsten Fall stellt wieder die Symmetrie bezüglich einer ε oder g dar.

241) Diese Involution betrachtete zuerst *Staudt*, Geom. d. Lage, § 230. Vgl. auch *C. Stephanos*, Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 471. Besondere Sätze über Kreise und Kreisbüschel in ebenen und räumlichen Involutionen gibt *G. Kilbinger*, Progr. Saargemünd (1883).

242) *L. Bertnicker*, Paris C. R. 104 (1887), p. 771; *G. Darboux*, ebenda, p. 774.

Der Begriff der involutorischen Lage läßt sich auf *reziproke vereinigte* Systeme ausdehnen. Dies scheint ebenfalls *F. Seydewitz*[243]) zuerst getan zu haben; er fand, daß es entweder keinen Punkt gibt, der auf der zugehörigen Geraden liegt, oder aber ∞^1, die einen c_2 bilden. In diesem Falle ist das involutorische System das Polarsystem für diesen c_2; in ihn fallen die Kurven c_2 und $\varkappa_2$ von Nr. **11** miteinander zusammen. Jedes derartige involutorische ebene System wird daher als *Polarsystem* bezeichnet und c_2 als seine *Ordnungskurve.* Diese Definitionen lassen sich auf den Bündel und den Raum ausdehnen[244]). Im involutorischen Bündel (*Polarbündel*) gibt es insbesondere ein *orthogonales Dreikant* entsprechender Strahlen resp. Ebenen[245]). Im Raum gibt es eine F_2 (*Ordnungsfläche*) der Punkte, die auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen; in sie fallen die F_2 und Φ_2 von Nr. **11** zusammen[246]). Wenn es bei zwei reziproken Ebenen, Bündeln, Räumen *ein* Dreieck, Dreikant oder Tetraeder gibt, dessen Elemente sich doppelt entsprechen, so ist die involutorische Lage stets vorhanden und es gilt für *alle.*

Die höchste Besonderheit, die für zwei reziproke Räume möglich ist, besteht darin, daß *jeder* Punkt P seiner zugehörigen Ebene π doppelt entspricht. Es liegt dann immer P in π und die beiden reziproken Systeme bilden ein *Nullsystem* (vgl. *K. Zindler*, III Anhang); jedes Tetraeder $ABCD$ ist dem entsprechenden zugleich ein- und umgeschrieben[247]).

14. Zyklische Projektivitäten. Entspricht in einer projektiven Beziehung vereinigter Gebilde dem Element A das Element A_1, dem $A_1 = B$ das Element B_1, dem Element $B_1 = C$ das Element C_1

243) Arch. f. Math. 9 (1846), p. 158. Dort findet sich auch eine ausführliche Ableitung metrischer Relationen.

244) Näheres über Polarität für c_2, K_2 und F_2 bei *Dingeldey,* III C 1, Nr. **10** und *Staude,* III C 2, Nr. 38 ff.

245) Im rotatorischen Polarbündel gibt es ∞^1 orthogonale Polardreikante. Es kann aber auch *jeder* Strahl auf der zugehörigen Ebene senkrecht stehen; dieser einfachste Polarbündel heißt orthogonal und stellt die Polarität bezüglich des absoluten Kegels dar.

246) Ein Gebilde, das in bezug auf einen c_2 oder eine F_2 sich selbst polar ist, heißt *autopolar;* jede autopolare c_n kann als Enveloppe von autopolaren c_2 betrachtet werden; vgl. *P. Appell,* Nouv. Ann. (3) 13 (1894), p. 206. Daß c_2 und F_2 autopolar sein können, ist evident; jeder c_2 ist es für den c_2', der mit ihm eine doppelte Berührung hat, und eine F_2 ist es für eine F_2', mit der sie sich in einem c_2 berührt.

247) Die ein- und umgeschriebene Lage zweier Tetraeder ist übrigens noch auf andere Arten möglich; vgl. *P. Muth,* Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 117 und *G. Bauer,* München Ber. 27 (1897), p. 359.

usw., so kann es vorkommen, daß die Kette $ABC\ldots$ nach n Schritten wieder zu A zurückführt, daß also dem n^{ten} Punkt M der Punkt A als M_1 zugeordnet ist[248]). Es ist dann

$$(1) \qquad ABC\ldots M \;\pi\; BC\ldots MA$$

und die Gebilde heißen *zyklisch projektiv*; insbesondere $A, B, \ldots, M$ eine *zyklisch projektive Gruppe.*

Durch eine zyklische Projektivität $\mathfrak{P}$ werden zugleich noch $n-2$ andere, ebenfalls zyklische Projektivitäten definiert; die sämtlichen so vorhandenen $n-1$ Projektivitäten lassen sich durch die Potenzen (Nr. 23)

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}^2,\ \mathfrak{P}^3, \ldots \mathfrak{P}^{n-1}$$

darstellen, und zwar werden die sich in ihnen entsprechenden Punkte durch die verschiedenen Potenzen des Zyklus $(ABC\ldots M)$ geliefert[249]). Die n^{te} Potenz $\mathfrak{P}^n$ heißt *Identität*, in ihr entspricht jeder Punkt sich selbst[250]).

Den einfachsten Fall $n = 2$ einer zyklischen Projektivität stellt die involutorische Beziehung dar; für $n = 3$ heißt bei Gebilden erster Stufe eine zyklische Gruppe eine *äquianharmonische*[251]). Wie bei der Involution gilt auch hier der Satz, daß falls *irgend eine* zyklische Gruppe von n Elementen vorhanden ist, *jede* Kette sich nach n Schritten schließt. In den Grundgebilden *erster Stufe* existieren *zyklische Projektivitäten* für *jedes n;* bei gegebenem n ist die projektive Beziehung durch irgend drei konsekutive Elemente der Gruppe eindeutig bestimmt, wie *J. Lüroth* gezeigt hat[252]).

---

248) Auf solche Punktgruppen hat zuerst *A. Clebsch* hingewiesen J. f. Math. 68 (1868), p. 167. Systematisch hat sich mit ihnen zuerst *Battaglini* beschäftigt, Giorn. di mat. 14 (1875), p. 116. Er studiert auch Verwandtschaften von *teilweise* zyklischem Charakter.

249) Für diesen Begriff vgl. *H. Burkhardt* I A 6, Nr. 1, 2, 3.

250) Eine eingehende Darstellung der Eigenschaften der zyklischen Projektivitäten enthält z. B. *Reyes* Geometrie der Lage, 2. Bd., 3. Aufl. (1892), p. 96 ff. Für $n = 4$ hat man die Projektivitäten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{P}^3$; die sich in ihnen entsprechenden Punkte sind durch

$$(ABCD), \quad (AC)(BD), \quad \text{und} \quad (ADBC)$$

dargestellt. Es ist also $\mathfrak{P}^2$ eine Involution.

251) Für sie und die obige Bezeichnung vgl. *H. Schröter*, Math. Ann. 10 (1876), p. 420.

252) Math. Ann. 11 (1877), p. 84; vgl. auch *S. Kantor*, Wien Ber. 82 (1880), p. 34. *A. Ameseder* hat die zyklischen Projektivitäten auf Grund davon behandelt, daß unter den Potenzen stets eine ist, die mit der Reihenfolge der Elemente identisch ist, Wien Ber. 98 (1889), p. 290.

Da das *Dv* zwischen den Doppelelementen und zwei entsprechenden Elementen eine n^{te} Einheitswurzel ist, so läßt sich jede zyklische Projektivität auf die Drehung eines Strahlbüschels abbilden[253]), wodurch ihre Theorie der Sache nach gekennzeichnet ist (Nr. 22).

Für eine *ebene* zyklische Kollineation[254]) gibt es nur einen reellen Doppelpunkt U und eine reelle Doppelgerade u; sie kann so in eine andere Ebene projiziert werden, daß u ins Unendliche fällt, die imaginären Doppelpunkte in die Kreispunkte, und die Kollineation selbst in eine Drehung von der Periode n um den reellen Doppelpunkt übergeht. Damit ist wieder der Charakter der allgemeinsten zyklischen Kollineation als projektive Verallgemeinerung der Drehung einer Ebene in sich gekennzeichnet (Nr. 22). Die zyklische Kollineation ist zugleich eine *Hermite*sche (Nr. 12). Es folgt noch, daß jede ebene zyklische Gruppe entweder auf einer g oder einem c_2 liegt.

Für eine *räumliche* zyklische Kollineation gibt es stets zwei reelle sich selbst entsprechende Geraden g und h, die entweder alle Punkte gemein haben oder eine zyklische Projektivität enthalten[255]). Abgesehen von den Fällen, daß alle Punkte jedes Zyklus je auf einer g oder einer ε liegen[256]), gibt es für $n = 4$ noch drei verschiedene Fälle, für $n = 5$ jedoch nur einen. Charakteristisch ist stets die Natur der Doppelgeraden g und h. Ist $n = 4$, so kann zunächst die Gerade g lauter Doppelpunkte enthalten, und h Träger einer Involution sein; zwei Geraden des durch $A_1 A_2 A_3 A_4$ bestimmten Tetraeders schneiden sich auf g, zwei andere schneiden h in einem Punktepaar der Involution. Diesen Fall hat *H. Schroeter*[257]) untersucht; er findet, daß zwei Tetraeder vierfach hyperboloidisch liegen[258]). Die beiden anderen Fälle hat *A. Pampuch*[259]) erörtert. Sie sind so cha-

253) Vgl. *O. Bonsdorff*, Helsingfors Acta Soc. Fenn. 11 (1880), p. 329. Er behandelt das Problem vom Standpunkt der Formentheorie aus.

254) *F. Lüroth*, Math. Ann. 13 (1878), p. 305; *H. Reim*, Diss. Breslau (1879). Der Fall $n = 3$ wird auch als *trilineare* Lage bezeichnet. Ein Dreieck und sein entsprechendes liegen nach *H. Schröter* dreifach perspektiv, Theor. d. Oberfl., p. 402 ff.

255) Die allgemeinste Bewegung ist eine Schraubenbewegung (*Schoenflies*, IV 3, Nr. 1) und daher keine zyklische Kollineation.

256) Zu ihnen gehören wieder die Drehungen um einen festen Punkt, die periodisch sind. Für $n = 3$ sind nur diese beiden Fälle möglich.

257) Math. Ann. 20 (1882), p. 231.

258) Zwei solche Tetraeder sind zugleich einander ein- und umgeschrieben; vgl. *P. Muth*, Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), p. 117. Zu einem Tetraeder gibt es auch solche, die mit ihm einfach, zweifach, vierfach perspektiv, resp. fünffach und neunfach hyperboloidisch liegen. Vgl. *K. Uhrig*, Diss. Gießen 1891.

259) Diss. Straßburg 1886.

rakterisiert, daß entweder auf g und h je eine elliptische resp. hyperbolische Involution existiert, oder aber auf g und h je eine zyklische Projektivität $n = 4$ vorhanden ist. *Pampuch* hat auch alle F_2, sowie alle räumlichen c_3 und c_4 bestimmt, die sich in der Kollineation selbst entsprechen.

Den Fall $n = 5$ haben *H. Küppers*[260]) und *A. Ameseder*[261]) untersucht. Es gibt ein Büschel von F_2, das bei der zyklischen Kollineation in sich übergeht, sowie zwei in sich duale Bündel von c_3, die sich selbst entsprechen[262]); sie gehen je durch fünf Punkte eines Quintupels und haben sämtlich g und h als Sekanten, und diese Geraden sind zugleich Träger zyklischer Ebenenbüschel und Punktreihen $n = 5$. Auch dieser Fall hat in der zyklischen Lage kongruenter Räume seinen typischen Vertreter. Ist $n \geqq 6$, so liegt jede zyklische Gruppe entweder auf einer g, einer ε, einem Paar von ε oder einem H_2.

S. Kantor[263]) hat den Begriff der zyklischen Beziehung dahin verallgemeinert, daß die bezügliche Punktgruppe, falls es sich um eine ebene Kollineation handelt, auf einer c_m liegt, und falls es sich um eine räumliche handelt, auf einer F_m. Auch hier gilt der Satz, daß dies immer zutrifft, wenn es einmal der Fall ist.

15. Ausgeartete Projektivitäten und Korrelationen. Bei ausgearteten Projektivitäten usw. entspricht nicht mehr jedem Element des einen Gebildes ein und nur ein Element des anderen. Die Erkenntnis ihrer allgemeineren Bedeutung verdankt man *A. T. Hirst*. Gründet man die projektive Beziehung auf die perspektive Lage, so ergeben sich die Ausartungen, falls das perspektive Zentrum in eines oder beide Gebilde hineinfällt[264]). Nur die so entstehenden Ausartungen sollen hier in Betracht gezogen werden.

Bei der ausgearteten projektiven Beziehung zweier Punktreihen entspricht *jedem* Punkt der einen derselbe Punkt der anderen und umgekehrt[265]).

Ausartungen bei Gebilden zweiter und dritter Stufe lassen sich nach *A. Hirst*[266]) am besten für reziproke Systeme aussprechen. Solcher

260) Diss. Münster 1890.

261) Wien Ber. 98 (1889), p. 588.

262) Jedes Bündel enthält ein festes imaginäres Schmiegungstetraeder.

263) Wien Ber. 82 (1880), p. 34; vgl. auch *M. Genty*, Bull. S. M. F. 21 (1893), p. 48. Vgl. auch Nr. 24.

264) Vgl. die folgende Anmerkung so wie auch *W. Fiedler*, Darstellende Geometrie, 2. Aufl. (1875), p. 68, 80 u. 704.

265) Für die ausgeartete Involution vgl. Nr. 13 und Anm. 229.

266) London Math. Soc. Proc. 5 (1875), p. 41; 6 (1876), p. 7; 8 (1877), p. 263;

gibt es für ebene Systeme drei (*singuläre* Korrelationen)[267]. Zwei sind zueinander, die dritte ist sich selbst reziprok.

Im ersten Fall gibt es in jeder Ebene einen singulären Punkt P, dem *jede* g der anderen entspricht (*zentrale* Ausartung); ferner sind die Büschel durch P und P' projektiv so zugeordnet, daß jeder g durch P jeder Punkt der entsprechenden g' durch P' entspricht. Durch das Punktepaar und die Projektivität der Büschel ist die Korrelation bestimmt. Der zweite Fall ist, wie bereits erwähnt, zum ersten reziprok (*axiale* Ausartung). Im dritten Fall gibt es in jeder Ebene einen singulären Punkt P resp. P', dem *alle* Geraden der anderen Ebene entsprechen, und durch ihn eine singuläre Gerade h resp. h', der *alle* Punkte der anderen Ebene entsprechen. Überdies entspricht jetzt jedem Punkt von h jede Gerade durch P' und umgekehrt. Dieser Fall stellt also eine Kombination der beiden vorigen dar (*zentral-axiale* Ausartung); er wird als Ausartung *zweiter* Art bezeichnet, im Gegensatz zu den beiden vorstehenden Ausartungen *erster* Art[268].

Für räumliche reziproke Systeme[269] Σ und Σ' gibt es *drei* verschiedene Typen von Ausartungen. Ausartungen *erster* Art existieren drei; zwei, die *zentrale* und *planare*, sind zueinander, die dritte ist zu sich selbst dualistisch. Bei der zentralen existiert in Σ und Σ' je ein singulärer Punkt P resp. P', dem alle Ebenen entsprechen; die Bündel P und P' sind reziprok, und jeder ε von P entsprechen alle Punkte des ihr zugeordneten Strahles e' von P'. Die planare Ausartung ist hierzu wieder dualistisch. Bei der dritten Ausartung, der *axialen*, gibt es je eine singuläre g resp. g', der alle Geraden entsprechen. Die Punktreihen und Büschel auf g und g' sind projektiv, und jedem Punkt A von g entsprechen alle Ebenen durch A' und jeder Ebene durch g alle Punkte auf g'.

Ann. di mat. (2) 6 (1877), p. 263; vgl. auch *R. Sturm*, Math. Ann. 12 (1877), p. 261 u. 270.

267) Diese ergeben sich auch, indem der c_2 eines Polarsystems degeneriert, vgl. *Hirst* Anm. 266. Das Analoge gilt für die räumlichen Ausartungen.

268) Die geometrische und analytische Ableitung der Ausartungen decken sich nicht vollständig. (Näheres bei *O. Ludwig*.) Eine erschöpfende Aufzählung gaben *G. Loria*, Giorn. di mat. 22 (1884), p. 1 und *C. Segre*, Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884), p. 127, auf Grund der Theorie der bilinearen Formen (IIIB 2), und zwar für den R_n. Man kann die so definierbaren Ausartungen geometrisch dadurch erzeugen, daß man z. B. in der Ebene bei den Vierecken und Vierseiten, die die Korrelation bestimmen, Punkte oder Seiten zusammenfallen läßt, und analog im Raum; vgl. z. B. *Reye*, Geometrie der Lage 2 (1907), p. 20 u. 35.

269) *A. Hirst*, London Math. Soc. Proc. 6 (1874), p. 7; 21 (1890), p. 92. Vgl. auch *G. del Prete*, Lomb. Ist. Rend. (2) 30 (1897), p. 400, wo sich eine methodische Aufzählung für den R_n findet.

Ausartungen *zweiter* Art gibt es drei; sie entstehen so, daß die genannten Projektivitäten selbst ausarten; sie bilden zugleich die Kombination der vorstehenden. *Hirst* bezeichnet sie als *zentral-axiale*, *planar-axiale* und *zentral-planare* Ausartung. Eine ist sich selbst, die beiden anderen sind zueinander reziprok. Von den beiden letzten enthält die eine je einen singulären Punkt P, P' und durch ihn je einen singulären Strahl g resp. g', so daß ihnen alle Strahlen oder Punkte der anderen Ebene entsprechen. Die Punktreihen und die Ebenenbüschel um g und g' sind wieder projektiv, und jeder dieser Ebenen α entsprechen alle Punkte von α' usw. Die andere ist, wie bereits erwähnt, zu ihr reziprok. Für die dritte existiert je eine singuläre Ebene ε resp. ε', in ihr ein singulärer Punkt P resp. P', sowie je ein singulärer Strahlenbüschel mit P und P' als Mittelpunkt; die beiden Büschel sind projektiv, so daß jedem Punkt A eines Strahles a alle Ebenen α' durch a' und umgekehrt entsprechen. Endlich gibt es noch eine Ausartung *dritter* Art (die *zentral-planar-axiale* Ausartung); für sie gibt es in Σ einen singulären P, eine singuläre g und eine singuläre ε, so daß P, g, ε vereinigt liegen und ihnen alle Ebenen, Geraden und Punkte von Σ' entsprechen, und analog ist es für Σ'[270]).

Die oben genannte allgemeinere Bedeutung dieser Ausartungen ist die, daß sie für die Theorie der Kollineation und Korrelation eine ähnliche Rolle spielen, wie die ausartenden c_2 und F_2 für das Charakteristikenproblem (*Zeuthen* III C 3, Nr. 27)[271]). Insbesondere gilt dies für die Probleme der Anzahlgeometrie, also für die Aufgabe, die *Anzahl* der Korrelationen zu ermitteln, die gewissen vorgegebenen Bedingungen genügen. Für *ebene* Korrelationen hat *T. A. Hirst*[272]) dies Problem vollständig erledigt. Die Bedingungen, die eine ebene Korrelation festlegen, zerfallen in *einfache* und *doppelte*. Ein Paar entsprechender A, a' resp. b, B' stellt eine doppelte, also *doppelt zu zählende* Bedingung dar, ein Paar konjugierter Punkte oder Strahlen eine einfache. Ist k, l, m, n die Zahl solcher Elementenpaare, die eine Korrelation festlegen sollen, so ist $\sigma = 2k + 2l + m + n = 8$; die Gruppe (k, l, m, n) heißt die *Signatur* der Beziehung.

---

270) Die Zahl der allgemeinen Bedingungen einer Kollineation reduziert sich bei den Ausartungen von 15 auf 14, 13, 12.

271) Diese Beziehung kommt auch in folgendem zum Ausdruck. Wird eine c_2 oder eine F_2 einer ausgearteten Kollineation unterworfen, so entsteht ein ausgeartetes Gebilde zweiter Ordnung. Ebenso ist es, wenn man bei einer ausgearteten Korrelation beide Ebenen (oder Räume) zu einem Polarsystem vereinigt.

272) London Math. Soc. Proc. 5 (1874), p. 40; vgl. auch Ann. di mat. (2) 6 (1874), p. 260.

Ist die Zahl σ der Bedingungen gleich 7, so gibt es unter den ∞^1 zugehörigen Korrelationen stets gewisse Ausartungen; ihre Zahl und Art hat *Hirst* für jede mögliche Signatur (k, l, m, n), die bei 7 Bedingungen auftreten kann, bestimmt. Mit ihrer Hilfe läßt sich die oben genannte Frage nach der Anzahl der jeder einzelnen Signatur bei 8 Bedingungen zugehörigen Korrelationen beantworten. Ist E die Enveloppe aller Geraden der einen Ebene, die für alle ∞^1 Korrelationen einem Punkt der anderen entsprechen, und c der Ort aller Punkte, die in der einen Ebene einer Geraden der anderen entsprechen, so hängt die Klasse μ von E und die Ordnung ν von c mit den Ausartungen durch die aus der Charakteristikentheorie bekannten Formeln (*Zeuthen* III C 3, Nr. 27)

$$\mu = 2\nu - \pi, \quad \nu = 2\mu - \lambda$$

zusammen, wenn π und λ die Zahl der vorhandenen Ausartungen mit singulärem Punkt und singulärer Geraden darstellen. Andererseits liefern μ und ν zugleich die Zahl der Korrelationen für diejenigen 8 Bedingungen, die durch Hinzufügen eines Punktepaares oder Geradenpaares zu den 7 gegebenen entstehen, also für die Signaturen $(k, l, m + 1, n)$ und $(k, l, m, n + 1)$. In dieser Weise hat *Hirst* das Problem der Korrelationen für alle Signaturen erledigt. Ist $n = 0$, so ist die Zahl der zugehörigen Korrelationen immer gleich 1; die Korrelation ist daher linear konstruierbar. Ausgenommen ist nur die Signatur (2 2 0 0), für die eine Korrelation überhaupt nicht existieren kann. Einzelne dieser Fälle waren übrigens schon vorher von *H. Schröter* behandelt worden[273]).

Später hat *Hirst* das Problem noch in anderer Form behandelt[274]). Er geht von den ∞^2 Korrelationen aus, die durch *sechs* Bedingungen bestimmt werden. Unter ihnen befinden sich ∞^1 zentrale und ∞^1 axiale Ausartungen, sowie (im allgemeinen) eine endliche Zahl von Ausartungen zweiter Art. Zu jeder dieser beiden Scharen von Ausartungen erster Art gehören wieder zwei Charakteristiken. Es sei λ_p die Zahl der axialen Ausartungen, für die noch ein weiteres Punktepaar konjugiert ist (also zugleich die Klasse der Kurve der einen Ebene, die für alle die ∞^1 axialen Ausartungen einem Punkt der anderen entspricht) und λ_l die Zahl der axialen Ausartungen, für die noch ein weiteres Geradenpaar konjugiert ist (also die Ordnung der Kurve, die jeder Geraden einer jeden Ebene in der anderen zugehört). Sind dann π_p und π_l die entsprechenden Zahlen für die zentralen

273) Journ. f. Math. 62 (1863), p. 215.

274) London Math. Soc. Proc. 8 (1877), p. 262

Korrelationen, so bestehen die Gleichungen

$$2\lambda_l = \lambda_p + \vartheta, \quad 2\pi_p = \pi_l + \vartheta,$$

wenn ϑ die Zahl der Korrelationen zweiter Art bedeutet.

Andererseits liefern die Zahlen λ_l und λ_p zugleich die Werte von λ für *gewisse* Signaturen bei sieben Bedingungen. Dies bewirkt, daß, wenn ϑ bekannt ist, *alle* Werte von λ aus gewissen von ihnen bestimmt werden können, und zwar genügt es, dies für sechs Signaturen zu tun, für die die Bestimmung außerordentlich einfach ist. Ebenso ist es für die Werte von π.

Das analoge Problem der *räumlichen* Korrelation ist von *Hirst* und *P. Visalli* bearbeitet worden. Man hat hier vier Arten von Bedingungen zu unterscheiden. Konjugierte Punkte, Geraden oder Ebenen stellen einfache Bedingungen dar; eine Gerade, die einem Punkte oder einer Ebene konjugiert ist, liefert eine *doppelte* Bedingung; entsprechende Punkte und Ebenen eine *dreifache* und entsprechende Geraden eine *vierfache*. Es sind 15 einfache Bedingungen nötig, um eine resp. eine endliche Zahl von Korrelationen festzulegen. Die weiteren Untersuchungen sind denen für ebene Systeme analog. Bei 14 Bedingungen gibt es je eine endliche Zahl zentraler, planarer und axialer Ausartungen — sie seien λ, π und ψ —, sowie ferner drei Charakteristiken μ, ν, ϱ; sie stellen die Klasse der Developpablen, die Ordnung der Raumkurve, sowie den Grad der Regelfläche dar, die für alle ∞^1 zugehörigen Korrelationen je einem Punkt einer Ebene oder einer Geraden zugeordnet sind. Sie liefern also zugleich die Anzahl der Korrelationen, die sich ergeben, wenn man die bezügliche Signatur um ein Paar konjugierter Punkte, Ebenen oder Geraden vermehrt. Endlich gelten für sie und die Zahlen π, λ, ψ, die aus der Charakteristikentheorie der F_2 bekannten Relationen (*Zeuthen* III C 3, Nr. 28). Analog ist es für die Systeme von 13 und 12 Bedingungen und die Ausartungen zweiter und dritter Art.

Hirst[275]) ist so vorgegangen, daß er analog zu seiner zweiten Behandlung des ebenen Problems zunächst den Fall von 12 Bedingungen ins Auge faßte, die Anzahl der zugehörigen Ausartungen dritter Art bestimmte, und von hier aus die Fälle von 13, 14 und 15 Bedingungen

275) London Math. Soc. Proc. 6 (1876), p. 7 u. 21 (1890), p. 92. Die erste Arbeit enthält nur eine kurze vorläufige Mitteilung. Übrigens hängen auch die Arbeiten von *R. Sturm* in Math. Ann. 12 (1877), p. 254 enge mit diesem Problem zusammen (Nr. 16); doch stützt sich die ausführliche *Hirst*sche Darstellung nicht mehr auf die *Sturm*schen Resultate.

erledigte. Er beschränkt sich freilich in seiner Darstellung im wesentlichen auf einfache Bedingungen[276]).

Dagegen hat *Visalli*[277]) den direkten Weg eingeschlagen. Er hat auf Grund eigener Reduktionsmethoden die charakteristischen Ausartungen für 14 und 13 Bedingungen direkt ermittelt und von hier aus die zugehörigen Charakteristiken des Problems bestimmt. Im Gegensatz zu *Hirst* hat er außer den einfachen auch die dreifachen Bedingungen in Betracht gezogen und diesen Teil des Problems eingehend erledigt.

16. Das Problem der Projektivität. Bei *G. K. C. v. Staudt*[278]) erscheint zuerst eine Aufgabe, die verallgemeinert zum *Problem der Projektivität* führt. Sind in ε und ε' je vier resp. fünf Punktepaare AA', BB', ... gegeben, und werden die A, B, ... in ε mit P verbunden, so soll man P' so finden, daß

$$P(AB\ldots)\ \pi P'(A'B'\ldots)$$

ist. Für vier Punktepaare ist der Ort von P' entweder eine Gerade oder ein c_2; er wird von allen Punkten gebildet, die mit $A'B'C'D'$ dasselbe Dv bestimmen, wie P mit $ABCD$. Für fünf Punktepaare gibt es daher zu P nur *einen* Punkt P', wie bereits von *Staudt* angegeben wurde[279]). Sind sechs Punktepaare AA', ... gegeben, so kann man nach den Punktepaaren P, P' fragen, die mit ihnen projektive Büschel bestimmen; sie erfüllen nach *Chasles* in ε und ε' je eine c_3; für sieben Punktepaare endlich gibt es noch drei solcher Paare P, P', wie zuerst von *Chasles* angegeben wurde[280]).

Eine tiefere Erörterung des Problems der Projektivität begründete *R. Sturm*[281]), indem er auch diejenigen Punkte und Gebilde ins Auge faßte, für die die Lösung *ausartet.* Wenn für $n = 4$ der Punkt P in einen der Punkte A, B, C, D hineinfällt, so entspricht ihm noch

276) *Hirst* gibt einen Hinweis, wie man die mehrfachen Bedingungen auf die einfachen zurückführen kann.

277) Rom Acc. Linc. Mem. (4) 3 (1886), p. 897.

278) Geom. d. Lage, p. 147.

279) *M. Chasles* hat später den analogen Fall für sieben Ebenen eines Büschels als Aufgabe gestellt, Nouv. Ann. 14 (1855), p. 211. Eine Lösung gab alsbald *Poudra*, ebenda, p. 310; 15 (1856), p. 161. Die Konstruktion für fünf Punktepaare wurde von *H. Schroeter* vereinfacht, Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 59.

280) Nouv. Ann. de math. 14 (1855), p. 50, wo *Chasles* das Theorem als Aufgabe stellte. Lösungen geben *Poudra*, ebenda, 15 (1856), p. 50 und *H. de Jonquières,* 17 (1858), p. 399. Vgl. auch *L. Cremona*, Nouv. Ann. 20 (1861), p. 453 und *K. Küpper*, Rozpravy 6, Nr. 21 (1897), sowie *Ed. Weyr*, ebenda 8 (1899), Nr. 24.

281) Math. Ann. 1 (1869), p. 533.

jeder Punkt P' von ε'. Analog entspricht für $n = 5$ dem Punkt A von ε in ε' ein c_2', und zwar derjenige, der durch $B'C'D'E'$ geht, und für dessen Punkte P' das *Dv* $P'(B'C'D'E')$ gleich dem *Dv* $A(BCDE)$ ist. Jedem der beiden Kegelschnitte von ε und ε', die durch die gegebenen fünf Punkte gehen, entspricht überdies ebenfalls *derselbe* Punkt der anderen Ebene; ist Q' dieser Punkt in ε', so ist er zugleich gemeinsamer Schnittpunkt der fünf ebengenannten Kegelschnitte, und analog ist es für ε[282]). *Sturm* nennt ihn den mit den gegebenen fünf Punkten verbundenen Punkt. Wie er später bewiesen hat, sind auch die nach den verbundenen Punkten gehenden Strahlen entsprechende Strahlen der beiden Strahlbüschel[283]).

Das Problem der Projektivität wurde von *H. Müller*[284]) auf den Raum übertragen, und zwar in folgender Weise. Zu n Punktepaaren $A_i A_i'$ soll man solche Geraden g, g' finden, die mit den Punktgruppen projektive Ebenenbüschel bilden. Diese Aufgabe hat *Müller* bis zum Wert $n = 7$ erledigt. Die Untersuchung beruht darauf, daß alle Geraden, die mit vier Punkten $ABCD$ vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ von konstantem *Dv* bestimmen, einen tetraedralen Komplex $\mathfrak{C}_2$ bilden. Hierin ist zugleich die Lösung des Problems für $n = 4$ enthalten[285]). Jeder Geraden g von Σ entspricht also ein solcher Komplex $\mathfrak{C}_2'$ von Σ'. Wie *R. Sturm* bemerkte[218]), entspricht einer Geraden g' dieses Komplexes in Σ ein Komplex $\mathfrak{C}_2$, der g enthält; diese Komplexe sind also in der Weise *adjungiert*, daß $\mathfrak{C}_2'$ zu jeder Geraden von $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_2$ zu jeder Geraden von $\mathfrak{C}_2'$ gehört. Für $n = 5$ bilden daher die zu einer gegebenen Geraden g gehörigen g' noch das Sekantensystem einer c_3 und für $n = 6$ ein H_2; ihnen ist wieder in Σ' ein analoges Sekantensystem und ein analoges H_2' so adjungiert, daß *je* zwei ihnen angehörige Geraden mit den A_i und A_i' projektive Büschel bestimmen. Für $n = 7$ existiert zu g im allgemeinen noch eine Gerade g'.

Auch hier hat *Sturm* die Ausartungen und die ausgezeichneten Gebilde näher in Betracht gezogen. Falls die Gerade g durch einen

---

282) Die bei fünf gegebenen Punktepaaren durch die Paare P, P' bestimmte Verwandtschaft (eine $\mathfrak{V}_3$) hat *R. Sturm* ebenfalls näher untersucht Math. Ann. 1 (1869), p. 533. Einer Geraden entspricht im allgemeinen eine c_5, die jeden der gegebenen fünf Punkte, sowie den mit ihnen verbundenen Punkt als Doppelpunkt hat; einer c_3, die durch diese sechs Grundpunkte geht, eine analoge c_3'. *Sturm* macht dort auch Anwendungen auf die Konstruktion einer F_3.

283) Math. Ann. 22 (1883), p. 571.

284) Math. Ann. 1 (1869), p. 413.

285) Diese Aufgabe wurde bereits (in reziproker Form) von *Steiner* gestellt; vgl. Werke 1, p. 442 (die p. 527 von *H. Schroeter* hinzugefügte Anmerkung ist freilich irrig).

der gegebenen Punkte A_i geht oder in die Verbindungslinie $A_i A_k$ zweier solcher Punkte fällt, treten in der Weise Ausnahmen ein, daß ihnen eine höhere Mannigfaltigkeit von Geraden g' entspricht. Alle diese Ausnahmen sowie die durch die zugehörigen Geraden g' gebildeten geometrischen Örter hat *R. Sturm*[214]) ausführlich untersucht. Ist z. B. $n = 6$, so entsprechen einer Geraden a, die durch einen Punkt A_i geht, noch alle Geraden a' von Σ', die ihr in bezug auf die übrigen fünf Punkte A_k zugeordnet sind, also das Sekantensystem einer c_3'; ebenso entsprechen der Verbindungslinie $A_1 A_2$ noch alle Geraden, die ihr bezüglich der übrigen vier Punkte A_i zugeordnet sind, also ein Komplex $\mathfrak{C}_2'$. Besondere Gesetze bestehen auch für die Geraden, die eine der Verbindungslinien $A_i A_k$ treffen, sowie für die Gebilde, die durch die gegebenen Punktgruppen ganz oder teilweise bestimmt sind. So entsprechen im Fall $n = 6$ allen Sekanten der durch die sechs Punkte A_i bestimmten c_3 in Σ' nur die Geraden eines H_2' und im Fall $n = 7$ entspricht den Geraden eines jeden H_2, das durch die sieben gegebenen Punkte A_i geht, in Σ' nur eine einzige Gerade. Diese Gebilde beherrschen die Eigenart der einander in Σ und Σ' entsprechenden geometrischen Örter.

Sturm hat auch die Ausdehnung auf $n \geqq 8$ gegeben[286]). Für $n = 8$ gibt es noch je einen Komplex $\mathfrak{C}_4$ und $\mathfrak{C}_4'$, dem die Geradenpaare g, g' angehören können; für $n = 9$ existiert je eine Kongruenz sechster Ordnung und 10. Klasse; für $n = 10$ je eine geradlinige F_{20}; endlich existieren für $n = 11$ noch 20 einander entsprechende Geradenpaare. Auch hier hat *Sturm* die zwischen diesen Gebilden bestehenden Verwandtschaften sowie ihr Verhalten zu den gegebenen Punktgruppen und den durch sie bestimmten ausgezeichneten Gebilden eingehend untersucht.

Sturm hat das Problem der Projektivität alsbald auch auf Grundgebilde zweiter Stufe ausgedehnt; zunächst so, daß zu n Punktepaaren $A_i A_i'$ Punkte S, S' gesucht werden, so daß $S(A_i) \barwedge S'(A_i')$ ist, und deren Verwandtschaft diskutiert[287]). Für $n = 5$ stützt sich die Lösung einerseits darauf, daß man die Räume Σ und Σ' kollinear so aufeinander beziehen kann, daß man die Punkte A_i und A_i' einander entsprechen läßt, und andererseits auf das Problem der räumlichen

286) Math. Ann. 6 (1873), p. 513. Dort wird auch die im Fall $n = 7$ vorhandene im allgemeinen eineindeutige Verwandtschaft zwischen g und g' eingehend untersucht.

287) Math. Ann. 10 (1876), p. 117. Für gewisse durch die Punkte A_i und A_i' bestimmte Gebilde treten wieder Ausnahmen ein, die die Besonderheit der zwischen S und S' bestehenden Verwandtschaft charakterisieren.

Projektivität. So ergibt sich zu jedem S noch eine räumliche c_3' von Punkten S', und zwar diejenige, die der durch S und die Punkte A_i gehenden c_3 bei der kollinearen Beziehung entspricht, so daß die beiden kollinearen Kurven c_3 und c_3' den Ort der Punkte S, S' abgeben. Für $n = 6$ erfüllen die Paare S, S' je eine F_2, für $n = 7$ existieren nur noch vier geeignete Paare S, S'.

Später hat *R. Sturm*[288]) dem Problem noch folgende Verallgemeinerung erteilt, die höchste, die hier erreichbar ist. Seien in Σ gegeben k Punkte A_i, l Geraden b_i, in Σ' k Geraden a_i', l Punkte B_i', ferner m Punktepaare C_i, C_i' und n Geradenpaare d_i, d_i', so sucht man solche Punkte S, S' (*assoziierte* Punkte) als Mittelpunkte kollinearer Bündel, so daß $S(A_i, b_k) \pi S'(a_i' B_k')$ ist, jeder Strahl SC_i resp. $S'C_i'$ in der dem anderen entsprechenden Ebene liegt, und jede Ebene Sd_i resp. $S'd_i'$ durch den der anderen entsprechenden Strahl geht. Es muß

$$8 \leqq 2k + 2l + m + n \leqq 14$$

sein. Die Zahlen k, l, m, n bilden die *Signatur* des Problems. Für die Zahl 8 ist im allgemeinen jedem Punkt S noch *jeder* Punkt S' assoziiert. Für $\sigma = 9, 10, 11$ ergibt sich zu jedem Punkt S eine Fläche, eine Kurve, sowie eine endliche Zahl von Punkten. Für $\sigma = 12, 13, 14$ ergibt sich als Ort der Punkte S, die in Σ' assoziierte Punkte besitzen, noch je eine Fläche, eine Kurve, und eine endliche Zahl von Punkten.

Bei der Behandlung aller dieser Probleme hat sich *Sturm* der Methoden bedient, die *T. A. Hirst* für die verwandten Fragen bei den in Nr. **15** erörterten Aufgaben benutzt hat. Er stützt sich gleichfalls auf die jeder Signatur entsprechenden Charakteristiken, die zu ihr gehörigen Ausartungszahlen und die sie verbindenden Relationen. Die Charakteristiken stellen wieder die Anzahl der Kollineationen dar, die bei Hinzufügung eines weiteren Punktepaares oder Ebenenpaares auftreten; sie liefern unmittelbar die Gradzahlen der gesuchten geometrischen Örter. Z. B. bestimmen die beiden Charakteristiken, die dem Fall $\sigma = 8$ und der Signatur $(klmn)$ entsprechen, die Ordnung der Fläche der Punkte S', die für $\sigma = 9$ und die Signaturen $(k, l, m + 1, n)$ und $(k, l, m, n + 1)$ dem Punkt S assoziiert sind. Analog kann auch die Vielfachheit der auf den einzelnen geometrischeu Örtern liegenden ausgezeichneten Gebilde ermittelt werden[289]).

---

288) Math. Ann. 12 (1877), p. 254.

289) Vgl. auch *S. Kantor*, Wien Denkschr. 42 (1883), p. 83; *P. Visalli*, Rom Linc. Mem. (4) 3 (1886), p. 897.

Nach den gleichen Methoden hat *Sturm* später auch das Problem der räumlichen Projektivität erneut und zugleich in allgemeinerer Fassung in Angriff genommen. Es läßt sich nämlich dahin verallgemeinern, daß außer Punktepaaren $A, A', \ldots$ auch Ebenenpaare $\alpha, \alpha', \ldots$ gegeben sind, und die Geraden g, g' so bestimmt werden, daß die Büschel

$$g(A\ldots) \pi\, g'(A'\ldots) \text{ und zugleich } g(\alpha\ldots) \pi\, (g'(\alpha'\ldots)$$

sind; sind k Punktepaare und l Ebenenpaare vorhanden, so ist

$$7 \leqq k + l \leqq 14.$$

Auch diese Aufgabe hat *Sturm*[290]) nach den *Hirst*schen Methoden ausführlich behandelt.

17. Die Abtrennung der Metrik durch K. G. C. v. Staudt und der Fundamentalsatz[291]). *Staudt*[292]) hat sich das Problem gestellt, das Lehrgebäude der projektiven Geometrie aufzubauen, ohne sich auf metrische Begriffe von Strecken und Winkeln zu stützen, also auch unabhängig von dem grundlegenden Begriff des *Dv*[293]). Er hat das bleibende Verdienst, in bahnbrechender Weise dies Problem der Lösung entgegengeführt zu haben. Indem er sich teils ausdrücklich, teils stillschweigend nur auf solche Annahmen stützt, die die bloße Lage und Anordnung von Punkten, Geraden usw. betreffen, gelingt es ihm — und darin besteht eine Hauptleistung — den Satz, daß die Diagonalen eines vollständigen Vierseits einander harmonisch teilen, aus

290) Math. Ann. 15 (1879), p. 407.

291) Hier wird, wie auch sonst in diesem Artikel, stets der gewöhnliche Euklidische Raum als Operationsobjekt angenommen. Doch sind die geometrischen Tatsachen, die in dem *Staudt*schen Beweis des Fundamentalsatzes die Grundlage bilden, vom Parallelaxiom unabhängig und damit auf die nichteuklidische Geometrie übertragbar, wie von *F. Klein* in seiner Kritik des *Staudt*schen Beweisganges alsbald hervorgehoben wurde (vgl. das Zitat in Anm. 295).

Eine eingehende Erörterung aller Tatsachen prinzipieller Natur, die für den Fundamentalsatz wie überhaupt für die projektive Geometrie die grundlegenden Voraussetzungen darstellen, sowie ihrer gegenseitigen Beziehungen gibt *Enriques* III A B 1, Nr. 17—21. Die obige Darstellung ist deshalb wesentlich *historisch* gehalten. Sie beschränkt sich auf eine ausführliche Erörterung des *Staudt*schen Gedankenganges, sowie auf die Darlegung der *Klein*schen Kritik und auf die Arbeiten, die sich unmittelbar an sie angeschlossen haben.

292) Geom. d. Lage; für das Folgende vgl. besonders p. 40—51. Eine Darstellung des *Staudt*schen Entwicklungsganges findet sich auch bei *H. Pfaff*, Neuere Geometrie. Vgl. auch *E. Neumayr*, Innsbruck Ber. 9 (1879), p. 144.

293) Vgl. auch Anm. 28. Die Tatsachen, die *Staudt* zugrunde legte, bezeichnet man jetzt nach *D. Hilbert* als Axiome der Verknüpfung und der Anordnung, vgl. seine Grundlagen der Geometrie 1903, p. 2 ff.

den einfachen Schnittpunktssätzen des Raumes zu beweisen. Seine Betrachtung gibt auch sofort den Satz, daß die harmonischen Punkte in zwei Paare gleichberechtigter zerfallen, die einander trennen, und daß alle diese Eigenschaften bei Projektion erhalten bleiben, also *projektiv invariant* sind[294]). *Staudt* definiert nun die projektive Beziehung dadurch, daß sie *eineindeutig ist, und daß harmonischen Elementen wieder harmonische Elemente entsprechen.* Um die Zulässigkeit dieser Definition darzutun, ist zu zeigen, daß die projektive Beziehung durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt ist, resp. daß in zwei vereinigten projektiven Punktreihen alle entsprechenden Punkte zusammenfallen, wenn dies für drei der Fall ist. Der Beweis dieses *Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie* ist nur für den Fall zu führen, daß keine Strecke bekannt ist, deren sämtliche Punkte sich selbst entsprechen; *Staudt* führt ihn, indem er zunächst zu den drei Doppelpunkten in unbegrenzter Zahl andere als vierte harmonische konstruiert und nun wie folgt argumentiert. Würden die Gebilde keine stetige Aufeinanderfolge von Elementen gemein haben, so würde, wenn A und B solche zwei aufeinander folgenden Elemente sind, daß die Strecke AB keine weiteren Doppelpunkte enthielte, auf ihrer Ergänzungsstrecke doch mindestens noch ein Doppelpunkt existieren, was einen Widerspruch darstellt.

F. Klein wies in seinen Arbeiten über die nichteuklidische Geometrie[295]) darauf hin, daß der *Staudt*sche Beweis Lücken enthält, und daß vor allem die Notwendigkeit besteht, auch in die projektive Geometrie den Begriff des *Grenzpunktes* einzuführen. Es wäre nämlich an sich durchaus möglich, daß die Reihe der von *Staudt* konstruierten harmonischen Elemente, obgleich unbegrenzt, doch in gewisse Strecken nicht eindringt[296]). Um dies auszuschließen, führte *Klein* folgende Voraussetzung ein: Ist auf der Geraden eine unendliche Reihe von Punkten gegeben, die in eine Strecke nicht eindringt, soll es gestattet sein, von einem *Grenzelement,* dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Punkte zu sprechen; es muß also die in der gewöhnlichen

294) In neuerer Sprechweise heißt dies, daß der Begriff „zwischen" projektiv invariant ist.

295) Math. Ann. 6 (1873), p. 139; 7 (1874), p. 551.

296) Auf Grund unserer heutigen Kenntnisse über Punktmengen (*Schoenflies* I A 5) kann man sagen, daß ein Grundirrtum *Staudts* darin besteht, ohne weiteres von „aufeinander folgenden" Punkten zu sprechen, zwischen denen keine anderen der von ihm konstruierten Punkte liegen. Es gibt sowohl überall dichte, wie nirgends dichte unendliche Punktmengen, für die aufeinander folgende Punkte überhaupt nicht existieren. Ganz anders ist es, wenn man die Punktmengen auf Grund des *Klein*schen Postulats in *abgeschlossene* Mengen verwandelt.

Geometrie vorhandene *Stetigkeit* auch für die *Grundgebilde der projektiven Geometrie* zugrunde gelegt werden. Eine zweite Voraussetzung, die er hinzufügte, war die, daß er die *projektive Beziehung* von vornherein als eine *stetige* einführte; falls also in der Reihe der harmonischen Elemente Grenzelemente der eben genannten Art auftreten, so sollten sie der Reihe zugezählt werden[297]). Auf Grund davon läßt sich der Beweis des Fundamentalsatzes in der Tat durchführen. Ein exakter Beweis, daß *Kleins* erste Voraussetzung die Existenz einer Strecke ausschließt, in die man mit der fortgesetzten Konstruktion harmonischer Punkte nicht eindringt, ist alsbald von *H. Lüroth* und *H. G. Zeuthen* gegeben worden[295]). Er beruht darauf, daß zwei Punktepaare AB und A_1B_1, die zu demselben dritten Paar harmonisch sind, einander nicht trennen, und daß, wenn A_1 eine Punktreihe A_i mit A als Grenzpunkt durchläuft, der Punkt B_1 eine Punktreihe B_i mit B als Grenzpunkt durchläuft[298]). Hieraus ergibt sich bereits, daß die Doppelpunkte jedenfalls überall dicht liegen, und auf Grund der zweiten *Klein*schen Voraussetzung folgt alsdann der Fundamentalsatz selbst.

Einen weiteren Fortschritt verdankt man *G. Darboux*[299]). Man kann nämlich die zweite *Klein*sche Voraussetzung, also die Stetigkeit der projektiven Beziehung auch durch die Forderung ersetzen, daß die *Anordnung* der Elemente bei ihr erhalten bleibe, daß also Punkten, die eine *Folge* bilden, Punkte entsprechen, die ebenfalls eine *Folge* bilden[300]). Dies läßt sich aber als eine Konsequenz der *Staudt*schen Definition erweisen, so daß jene Voraussetzung überflüssig wird. Denn sonst könnte es zwei Gruppen von vier entsprechenden Punkten $ABCD$ und $A'B'C'D'$ geben, die so in je zwei Paare zerfallen, daß die einen einander trennen, die anderen nicht; es könnte daher nur für die eine Punktgruppe ein *reelles* zu beiden Paaren harmonisches Paar geben. *Darboux* stützt dies auf das Argument, daß zwei Punkte, die einen Kreis im gleichen Sinn so durchlaufen, daß der eine sich zuerst hinter

297) Übrigens hat auch *Staudt* die Stetigkeit der projektiven Beziehung bereits in Betracht gezogen. Bei ihm erscheint sie freilich als *Folge* des Fundamentalsatzes, unter Benutzung der Kette von Perspektivitäten, durch die man zwei gegebene projektive Punktreihen verbinden kann: vgl. Geometrie der Lage, p. 55.

298) Dies ist eine unmittelbare Folge davon, daß die Anordnung bei der Projektion erhalten bleibt; vgl. z. B. *Pasch*, Neuere Geometrie, p. 90.

299) Math. Ann. 17 (1880), p. 55. Vgl. hierzu auch *F. Schur* in Math. Ann. 18 (1881), p. 252.

300) Auf diese Formulierung hatte ebenfalls bereits *F. Klein* hingewiesen, Math. Ann. 7 (1874), p. 587.

und später vor dem anderen befindet, notwendig einmal zusammenfallen. Hieraus kann dann der Fundamentalsatz leicht geschlossen werden und zwar folgendermaßen. Gäbe es zwei homologe Punkte X, X', die nicht identisch sind, so könnte man drei Doppelpunkte A, B, C so wählen, daß A und B zwischen X und X' liegen, und X' zwischen B und C. Die Punkte Y und Y', die bezüglich AB zu X und X' harmonisch sind, fallen dann zwischen A und B. Es würden mithin XY und BC einander trennen, während $X'Y'$ und BC es nicht tun[301]).

Der Fundamentalsatz kann in der gleichen Weise bewiesen werden, falls man *Cremonas* Definition der projektiven Beziehung zugrunde legt, die eine Folge von zwei Perspektivitäten benutzt, ebenfalls von jeder metrischen Beziehung frei ist (Nr. 8) und ebenfalls den gewöhnlichen Stetigkeitsbegriff zugrunde legt. So verfährt *J. Thomae*[302]). Die Erhaltung der Anordnung ist in diesem Fall eine *unmittelbare* Folge der Definition. Der Beweis ergibt sich hier in einfacher Weise so, daß man den Fundamentalsatz von vornherein nur als Existenztheorem auffaßt, und von dem konstruktiven Teil des Beweises, wie er bei *Staudt* vorhanden ist, ganz absieht. Als Grundlage reicht dann die oben von *Darboux* benutzte Tatsache aus, daß, wenn ein die Gerade durchlaufendes Element ein anderes überholt, beide notwendig einmal zusammenfallen.

Man hat endlich auch die Möglichkeit, den Aufbau der projektiven Geometrie mit der Theorie der ebenen Kollineation zu beginnen[303]) und zu zeigen, daß in kollinearen vereinigten Ebenen *alle* entsprechenden Punkte zusammenfallen, falls es *vier* Paare tun. Hierzu kann die *Möbius*sche Netzkonstruktion benutzt werden, die das genaue Analogon der unbegrenzten Konstruktion vierter harmonischer Punkte ist, falls man sie ebenfalls noch durch Hinzunahme des Begriffs des Grenzpunktes erweitert. Daß dies ebenso ausführbar ist, wie im linearen Gebiet, hat kürzlich *K. Zindler*[304]) dargelegt. Es hat überdies den methodischen Vorteil, daß der sonst etwas fremde Grundbegriff der harmonischen Lage sich hier mehr naturgemäß an der Hand des zugrunde gelegten Vierecks einstellt[305]).

301) Ein besonders ausführlicher Beweis des Fundamentalsatzes findet sich bei *F. Enriques*, Lez. di geom. proj., p. 90.

302) Geom. d. Lage, p. 12; vgl. auch *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 253.

303) So verfuhr *G. Battaglini*, Giorn. di mat. 12 (1874), p. 300, der sich jedoch nur auf die Netzkonstruktion stützt. Vgl. auch *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 252.

304) Wien Ber. 98 (1889), p. 499. Vgl. auch *Le Paige*, Liège Mém. (2) 15 (1888), Nr. 5.

305) Eine Ableitung des Fundamentalsatzes auf Grund der Theorie der

M. Pasch[306]) hat das Verdienst, zum erstenmal in systematischer Vollständigkeit die grundlegenden räumlichen Tatsachen *empirischen* oder *axiomatischen* Charakters zusammengestellt zu haben, die notwendig und hinreichend sind, um mit ihnen in lückenloser Weise den weiteren geometrischen Aufbau, wie er dem *Staudt*schen Lehrgebäude entspricht[307]), deduktiv zu bewirken. Um dies unabhängig vom Parallelenaxiom zu leisten, hat er sich zunächst auf den *empirisch* allein gegebenen *endlichen* Bereich beschränkt und dann erst von hier aus die Begriffe und Definitionen auf das unerreichbare (ideelle) Gebiet ausdehnt[308]). Er ist so der eigentliche Begründer der gesamten neueren Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie und über die in sie eingehenden Axiome geworden (*Enriques* III AB 1). *Pasch* hat für den Beweis des Fundamentalsatzes im Gegensatz zu *Staudt* übrigens auch den *Kongruenzbegriff* herangezogen[309]). Eine neue Wendung liegt auch darin, daß der Fundamentalsatz direkt unter die Postulate mit aufgenommen wird[310]).

18. Die grundlegende Bedeutung der Schnittpunktssätze. Man kann für den Aufbau der projektiven Geometrie gewisse *Schnittpunktssätze* als Grundlage benutzen. Dieser Auffassung hat zuerst *H. Wiener*[311]) Ausdruck gegeben. Die Sätze, die hier in Frage kommen, sind der Satz des *Desargues* über perspektive ebene Dreiecke, und derjenige Spezialfall des *Pascal*schen Satzes, bei dem der c_2 in zwei Geraden zerfällt, deren jede drei Punkte trägt[312]). Die grundlegende Bedeutung

---

Büschel und Netze von Projektivitäten versuchte *B. Klein*, indem er nachzuweisen suchte, daß drei Paare von Punkten eine Projektivität in der Gesamtheit aller festlegen, Marburg Ber. 1887, p. 37 u. 1888, p. 1.

306) Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882.

307) Eine geringfügige Lücke bemerkte *M. Pieri*, Torino Atti 31 (1897), p. 387; vgl. *M. Pasch*, Math. Ann. 48 (1897), p. 111.

308) Dasselbe tat *F. Schur*, Math. Ann. 39 (1891), p. 113. Vgl. auch noch *V. Reyes y Prosper*, ebenda 29 (1886), p. 154 und *M. Pasch*, ebenda 30 (1887), p. 127.

309) Vgl. p. 101, 120, 127. Übrigens ist auch das sogenannte Archimedische Axiom (*Enriques* III AB, Nr. 7) für den Beweis erforderlich.

310) Man kann den Fundamentalsatz durch die Involution am Viereck ersetzen. Sie behandeln als Grundlage *C. le Paige* und *F. Deruyts*, Bull. Belg. (3) 15 (1888), p. 335.

Vgl. endlich auch *H. G. Zeuthen*, Paris C. R. 125 (1897), p. 608 u. 858; 126 (1898), p. 213; hier wird zum Beweis des Fundamentalsatzes Begriff und Natur einer Regelschar und ihrer Leitschar als anschaulich gegeben postuliert.

311) Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 1 (1892), p. 45; 3 (1894), p. 70.

312) Wie *Steiner* (Werke 1, p. 298) erwähnt, war dieser Spezialfall des *Pascal*schen Satzes schon *Pappus* bekannt; er bildet das 13. Lemma zu den

dieser Sätze ist in den Lehrgängen der projektiven Geometrie tatsächlich schon vorher zum Ausdruck gekommen[313]), es hat sogar schon *C. J. Brianchon*[314]) gelegentlich darauf hingewiesen, daß beide Sätze ausreichend seien, um mit ihnen alle Aufgaben zweiten Grades zu lösen. *Wiener* hat jedoch das Verdienst, die methodische Bedeutung dieser Sätze herausgeschält zu haben; er hat daran die *Forderung* geknüpft, die Gebiete der Geometrie überhaupt nach den grundlegenden Schnittpunktssätzen zu definieren. Operationsgebiet ist in diesem Fall die Menge aller Elemente, die sich aus gewissen anderen mittels der Schnittpunktssätze ableiten lassen. Wird die projektive Geometrie auf ein solches Gebiet beschränkt, so wird in ihm sowohl der Stetigkeitsbegriff als auch der Fundamentalsatz durch die beiden Schnittpunktssätze entbehrlich gemacht. Die üblichen Axiome über Lage, Ordnung usw. der Grundgebilde sind dabei natürlich ebenfalls vorauszusetzen[315]).

Das von *H. Wiener* hiermit postulierte Programm hat zu wichtigen Untersuchungen über die Frage geführt, welche Stellung den beiden Schnittpunktssätzen im Gebäude der Geometrie überhaupt zukommt. Daß der Satz über perspektive Dreiecke, falls diese Dreiecke in *verschiedenen* Ebenen liegen, eine direkte Folge der grundlegenden Definitionen über Punkte, Gerade und Ebenen ist, hat bereits *G. Desargues* selbst erkannt; für die Ebene hat er ihn aus einem Satz des *Ptolemäus* über den Schnitt eines Dreiecks mit einer Transversale abgeleitet[316]). Für *J. V. Poncelet*[317]) war der Weg, den Satz für die

---

Porismen des *Euklid*, die *Pappus* im 7. Buch mitteilt. Vgl. Pappi Alexandrini collectiones, herausgegeben von *F. Hultsch*, 2 (1877), p. 887. Die Figur kann übrigens auch als Zyklus von drei einander ein- und umgeschriebenen Dreiecken betrachtet werden. Für die Theorie kommt besonders der Fall in Betracht, daß die *Pascal*sche Gerade in g_∞ fällt. Ihn benutzt methodisch auch schon *Rädell*, Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 188. Auf die vollständige Figur, die sich zu den zweimal drei Punkten für alle Gruppierungen ergibt, wies zuerst *Steiner* hin, Gerg. Ann. 19 (1829), p. 128. Einen Beweis gab *J. Plücker*, Journ. f. Math. 10 (1831), p. 222.

313) Vgl. z. B. *H. Steiner-Schroeter*, Theorie der Kegelschnitte, p. 26 und 87. Dort finden sich die beiden Figuren in der Weise, daß die erste für das lineare Gebiet, die zweite für die Theorie der c_2 die Grundlage darstellt.

314) Journ. éc. polyt. Heft 10 (1810), p. 13. Es ist bemerkenswert, daß auch *Brianchon* den eben genannten Spezialfall benutzt und ihn aus der Ähnlichkeitslehre ableitet.

315) Doch hat *Wiener* nähere Ausführungen und Beweise nicht gegeben.

316) So berichtet *M. Chasles*, Aperç. hist. § 28. Nach *E. Kötter* hat jedoch *Desargues* den Satz der Ebene aus dem Raum durch Parallelprojektion gewonnen, Bericht, p. 8. Der Satz scheint dann in Vergessenheit geraten zu

Ebene aus dem Raum zu erschließen, bereits selbstverständlich; freilich bedarf es noch eines Beweises, daß zwei perspektive ebene Dreiecke sich stets als Projektion einer analogen räumlichen Figur auffassen lassen, was aber leicht geschehen kann[318]). Dagegen ist von *A. Schoenflies* bewiesen, daß der *Pascal*sche Satz aus einer Raumfigur, die von Punkten allgemeiner oder auch besonderer Lage ausgeht, nicht durch Projektion erhalten werden kann[319]). Die axiomatische Bedeutung beider Sätze für die *ebene* Geometrie wurde von *D. Hilbert*[320]) näher erörtert. Andere, von ihnen unabhängige Schnittpunktssätze können in der Ebene nicht existieren. Überdies besteht die Bedeutung des *Desargues*schen Satzes darin, daß er nicht allein die notwendige, sondern auch die *hinreichende* Bedingung darstellt, damit eine ebene projektive Geometrie, in der er und die grundlegenden Axiome gelten, Teil einer räumlichen Geometrie ist, in der ebenfalls die grundlegenden projektiven Axiome in Geltung sind[321]). Daß der *Desargues*sche Satz unbeweisbar ist, wenn man sich nur auf die *ebenen* projektiven Axiome stützt, hatte schon vorher *F. Klein* bemerkt[322]).

Anders steht die Frage, wenn man auch den Kongruenzbegriff voraussetzt, der der projektiven Geometrie allerdings fremd ist; alsdann können beide Sätze bewiesen werden. Für den *Desargues*schen Satz ist dies, falls man die Perspektivitätsachse als g_∞ wählt, evident, für den *Pascal*schen Satz sind Beweise von *F. Schur* und *D. Hilbert* gegeben worden[323]). (Näheres bei *Enriques* III AB 1, Nr. 42.)

---

sein, bis ihn *Servois* reproduziert hat, Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique (1804; an XII), p. 23.

317) Traité, p. 86.

318) Einen Beweis gibt z. B. *F. Enriques*, Lezioni, p. 50.

319) Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 1 (1892), p. 62 und Königsb. phys.-ök. Ges. 44 (1903), p. 4. Eine Ausnahme tritt naturgemäß nur dann ein, wenn die besondere Lage der Raumpunkte dem *Pascal*schen Satz gleichwertig ist.

320) Grundlagen, p. 51, 70, 71, 77. Die Beziehung der Sätze zum Archimedischen Axiom bleibt hier außer Betracht; vgl. das Nähere bei *Enriques* III A 1.

321) Dabei wird die Geltung des euklidischen Parallelenaxioms vorausgesetzt.

322) Math. Ann. 6 (1873), p. 135.

323) Math. Ann. 51 (1898), p. 401; Grundlagen (1899), p. 28. *Hilbert* setzt auch hierfür das Parallelenaxiom voraus. *Schur* benutzt das Rotationshyperboloid, dessen Existenz aus den Kongruenzaxiomen gefolgert werden kann, und den auf ihm vorhandenen *Pascal*schen Satz, dessen Existenz bereits *G. P. Dandelin* bemerkt hat; Gerg. Annales 15 (1824), p. 387; Corr. Quetelet 2 (1826), p. 10. *H. Wiener* bemerkte, daß man den Beweis aus den Sätzen über Flächengleichheit folgern kann, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 72. Den *Pascal*schen Satz für ein beliebiges H_2 hat wohl zuerst *Servois* bewiesen, Gerg. Ann. de math. 1 (1811), p. 332.

19. Imaginäre Elemente[324]). Wenn auch das zuerst naiv, dann bewußt benutzte Prinzip der Kontinuität (Nr. 3) die geometrische Sprechweise für imaginäre Elemente und Gebilde allmählich zur allgemeinen Gewohnheit gemacht hatte, so lastete nichtsdestoweniger das Imaginäre wie ein beunruhigender Druck auf den Vertretern der geometrischen Wissenschaft; hat doch bekanntlich *J. Steiner* gelegentlich vom „Gespenst" des Imaginären gesprochen. Die strengeren Methoden haben daher stets die Verpflichtung anerkannt, sich mit dem Imaginären abfinden zu müssen, und haben dem, soweit möglich, nachzukommen gesucht. Diese Tendenz hat sich in verschiedenen Richtungen geltend gemacht. Zunächst mehr äußerlich, indem man die Notwendigkeit empfand, für solche Fälle, in denen gewisse Begriffe oder Gebilde des Beweisganges imaginär werden, einen besonderen, nur im Reellen operierenden Beweis zu geben[325]). Ferner bewirkte diese Tendenz, daß man überhaupt den *Realitätsfragen* der Gebilde besondere Aufmerksamkeit schenkte, und ein Problem nur dann als völlig erledigt ansah, wenn die auf die Realität bezüglichen Fragen beantwortet sind. Für die einfachen Probleme von Nr. **11** und Nr. **13** sind die Realitätsfragen in diesem Artikel erörtert worden. Von anderen mehr elementaren Sätzen sind z. B. diejenigen, die das System zweier c_2 betreffen, schon lange erledigt[326]). In dieser Richtung ist aber auch eine Reihe ebenso bedeutsamer wie schwierig zu ermittelnder Einzelresultate gewonnen worden. An erster Stelle sind hier die eingehenden Untersuchungen von *R. Sturm* über die Realitätsverhältnisse der 27 Geraden einer F_3 zu nennen[327]). (Näheres bei *F. Meyer* III C 7.)

---

324) Vgl. *K. G. C. v. Staudt*, Beiträge I, II. Eine ausführliche Darstellung der Staudtschen Imaginärtheorie ist enthalten bei *H. Pfaff*, Neuere Geometrie (1867). Eine historische Studie über die Imaginärtheorien gibt *A. Ramorino*, Giorn. di mat. 35 (1897), p. 242.

325) Untersuchungen dieser Art hat z. B. *H. Schroeter* vielfach ausgeführt; als eine der frühesten erwähne ich den Nachweis der Sätze von Nr. **11** über inzidente ebene und räumliche reziproke Systeme, falls das bezügliche Polarsystem reelle c_2 bzw. F_2 nicht bestimmt, J. f. Math. 77 (1874), p. 105; vgl. auch Vorlesungen, sowie Theor. d. Oberfl.

326) Dies geschah für das durch sie bestimmte Viereck bzw. Vierseit bereits von *F. Seydewitz* in Arch. f. Math. 5 (1844), p. 225, nachdem schon *J. V. Poncelet* die Analyse des Problems teilweise ausgeführt hatte, Traité § 359 ff. Zwei gemeinsame Sehnen sind stets reell. Eine ausführliche Behandlung der Realitätsverhältnisse des c_2-Büschels enthalten die Vorlesungen von *Steiner-Schröter*, 2. Aufl., § 41 ff. Vgl. auch *Staudt*, Geometrie der Lage, p. 171; *Paulus*, Grundlinien, p. 220; *Chasles*, Traité des sections coniques, Paris 1865, p. 219, 228, 237 Für die Realitätsverhältnisse der F_2 vgl. *O. Staude* III C 2, Nr. 74.

Nach durchaus anderer Richtung gehen die Versuche, dem Imaginären auf Grund geeigneter, an reelle Gebilde anschließender geometrischer Definitionen eine volle Gleichwertigkeit mit den reellen Gebilden zu sichern, und damit den Resultaten der projektiven Geometrie in Wahrheit diejenige Allgemeinheit zu schaffen, die das Prinzip der Kontinuität postuliert, und die sie der analytischen Geometrie gleichwertig macht[328]). Methodische Versuche dieser Art hat bereits *J. V. Poncelet*[329]) angestellt; er hat die gemeinsame Sekante zweier c_2 im Fall nicht reeller Schnittpunkte dadurch zu definieren verstanden, daß er für sie eine *neue* von den Schnittpunkten *unabhängige* Definition suchte, die für *jede* Lage der c_2 erhalten bleibt. Er benutzt dazu einen Punkt, der für jede Sekante reell definierbar ist, nämlich ihren Schnittpunkt mit dem konjugierten Durchmesser (ihren Halbierungspunkt); ist er für die gemeinsame Sehne gefunden, so ist damit die ihr konjugierte Richtung, also auch sie selbst bestimmt. Die Existenz dieses Punktes erschließt *Ponecelet* allerdings genau genommen durch eine mehr algebraische Betrachtung[330]).

Liegt hier die richtige Tendenz zugrunde, die Begriffsbestimmungen an reelle Eigenschaften zu knüpfen, die von der zufälligen Lage unabhängig sind, so erscheint sie doch bei *Poncelet* nur als eine Art Kunstgriff, der überdies wesentlich den Fällen dient, in denen das Imaginäre nur ein Durchgangselement für reelle Resultate bildet. Die systematische Bezwingung des Imaginären, die die imginären Elemente als gleichberechtigte Operationsobjekte neben die reellen stellt, ver-

---

327) Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867.

328) Alle Deutungen, die mehr oder weniger auf analytischen oder rechnerischen Tatsachen beruhen, bleiben hier außer Betracht. Dahin gehören auch die im wesentlichen trivialen Deutungen von *M. Chasles* in Géom. supér. §§ 86, 180, 778 usw. Über *G. Tarry* und andere vgl. Anm. 248.

329) Traité, § 57 ff, § 135 ff. Ähnlich verfuhr später *M. Chasles*, der die durch Polareigenschaften definierte ideelle Sehne zweier c_2 als „*Symptosenachse*" bezeichnete, J. de math. 3, p. 385; vgl. auch noch *G. v. Escherich*, Arch. f. Math. 60 (1878), p. 22 und *Chr. Wiener*, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 376.

330) Er benutzt dazu einen geometrischen Ort, der den obengenannten Punkt enthält, und erschließt seine Existenz durch Variabilität eines Parameters, von dem die Lage des Punktes auf dem Ort abhängt, Traité, § 59. Er hat (Traité, §§ 53, 77 usw.) zu diesem Zweck die ideelle Sehne zweier Ellipsen auch durch eine reelle Sehne zweier gewissen Hyperbeln ersetzt, worin ihm übrigens schon *L. N. M. Carnot* vorangegangen war, De la corrélation (1804), p. 86. Er folgert mit ihrer Hilfe insbesondere, daß die ideale Sekante zweier ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen die g_∞ ist, und zwar deshalb, weil es für die zugehörigen Hyperbeln so ist; vgl. § 89 ff.

danken wir erst *K. G. C. v. Staudt*[331]). Er nahm den zuerst von *Ch. Paulus*[332]) geäußerten Gedanken auf, den *imaginären Punkt* durch eine (reelle) elliptische Punktinvolution darzustellen, deren Punktepaare also einander trennen; das neue, was er hinzufügte, und was die weitere Entwicklung der Theorie erst ermöglichte, war die Idee, die beiden konjugiert imaginären Punkte, die den Doppelpunkten der Involution entsprechen, dadurch zu trennen, daß er für die durch zwei Paare AA', BB' bestimmte Involution einen *Sinn* (Richtung) einführte, der durch die *Ordnung* dieser Punkte bestimmt ist, und die beiden verschiedenen Sinne $AA'B$ und ABA' die beiden konjugiert imaginären Punkte darstellen ließ[333]).

Ein *imaginärer Punkt* liegt danach stets auf einer reellen Geraden. Analog wird eine *imaginäre Ebene* durch eine mit einem Sinn behaftete (reelle) elliptische Ebeneninvolution dargestellt; es geht also eine imaginäre Ebene stets durch eine reelle Gerade. *Imaginäre Geraden* gibt es zweierlei Art; die *Gerade erster Art*, die in einer reellen Ebene liegt, einen reellen Punkt enthält und durch eine elliptische Strahleninvolution bestimmt ist[334]), und *die Gerade zweiter Art*, die durch eine (reelle) elliptisch-involutorische Regelschar (Nr. **13**) bestimmt ist und weder einen reellen Punkt enthält, noch in einer reellen Ebene liegt. Jedes imaginäre Element ist also durch zwei reelle Elementenpaare und einen Sinn definiert; andererseits kann dasselbe Element durch unendlich viele Involutionen dargestellt werden[335]). Die Definition

---

331) Vgl. für das Folgende die Beiträge zur Geometrie der Lage. Eine analytische Darstellung von *Staudts* Theorie gab *C. Stephanos,* Bull. des sc. (2) 7 (1879), p. 204. *O. Stolz* zeigte, wie auch die analytische Methode im Anschluß an *Staudt* zu einer vom Koordinatensystem unabhängigen Definition der imaginären Elemente gelangen kann, Math. Ann. 4 (1871), p. 416; vgl. auch *O. Tognoli*, Giorn. di mat. 31 (1899), p. 137.

332) Grundlinien, p. 199. Auch *F. Seydewitz* hatte schon mit einer gleichartigen Idee operiert. Eine andere Deutung des Imaginären durch Involutionen gab *Paulus* im Arch. f. Math. 21 (1853), 175 und 22 (1854), p. 121. Er benutzt dort dasjenige Punktepaar der Involution, dessen Abstand ein Minimum ist, das also den Doppelpunkten des hyperbolischen Falls entspricht.

333) *R. Sturm* hat statt der geraden Punktreihe einen c_2 benutzt. Da jeder auf ihm vorhandenen elliptischen Involution ein im Innern von c_2 liegendes Involutionszentrum entspricht, so läuft dies darauf hinaus, die komplexe Zahlenebene auf eine im Innern des c_2 ausgespannte zweiblättrige Fläche abzubilden, Math. Ann. 9 (1876), p. 341.

334) Die durch eine zirkulare Involution dargestellten Geraden einer Ebene, die nach den imaginären Kreispunkten laufen, werden als *isotrope* Geraden oder *Minimal*geraden bezeichnet. *Staudt* bemerkte schon, daß jede auf sich selbst senkrecht steht, Beiträge § 190.

der Geraden zweiter Art hat übrigens durch *F. August*[336]) eine methodische Verbesserung erfahren. Sie wird als Verbindungslinie von zwei imaginären Punkten, bzw. als Schnitt zweier imaginärer Ebenen eingeführt, so daß ihr reelles Substrat eine lineare Kongruenz ist, deren Leitlinien die beiden konjugiert imaginären Geraden zweiter Art darstellen.

Das Wesentliche ist nun, daß diese Definitionen den projektiven Grundtatsachen genügen, zunächst also denen des Schneidens und Verbindens. *Staudt* weist eingehend nach, daß zwei Punkte bzw. zwei Ebenen stets eine Gerade bestimmen, zwei Geraden derselben Ebene einen Punkt usw. Die imaginären Elemente können daher den Prozessen des Projizierens ebenso unterworfen werden wie die reellen. Es bleibt ferner auch der für die Staudtsche Theorie fundamentale Viereckssatz in Kraft, und damit kann auch die Definition der harmonischen Elemente auf das imaginäre Gebiet übertragen werden. Den Schlußstein des Gebäudes bildet aber die Erkenntnis, daß auch der Begriff der *Anordnung* bzw. des Sinnes allgemein auf jede Gruppe von vier beliebigen imaginären Elementen desselben Trägers ausgedehnt werden kann; man folgert insbesondere, daß die eben definierten harmonischen Elemente in zwei Paare zerfallen, die sich gegenseitig trennen usw. Dies leistet *Staudt* folgendermaßen. Sind z. B. P, Q, R, S vier imaginäre Punkte einer Geraden zweiter Art und p, q, r, s ihre reellen Träger, so bedarf nur der Fall der Erörterung, daß p, q, r, s nicht derselben Regelschar angehören, also in *Staudt*scher Bezeichnung nicht etwa einen *neutralen* Wurf (Nr. **21**) bilden[337]). Ist dann $EFGH$ eine Darstellung des Punktes S auf der Geraden s, so kommt ihr ein bestimmter Sinn zu. Andererseits bestimmen die Geraden pqr eine Regelschar. Sind nun $abcd$ vier solche Leitlinien dieser Regelschar, die eine Darstellung unserer Geraden zweiter Art liefern, also der oben genannten linearen Kongruenz angehören, so wird durch den Ebenenbüschel, den a mit den Geraden der Regelschar bestimmt, auf dem Träger s ebenfalls ein gewisser Sinn bestimmt, der entweder mit dem Sinn von pqr oder aber mit dem Sinn von prq identisch ist. Je nachdem nun auf dem Träger s der Sinn

---

335) Sind AA_1, BB_1 vier *harmonische* Elemente, so heißt die Darstellung eine *harmonische*.

336) Programm Berlin 1872. So auch bei *J. Lüroth*, der eine Neubearbeitung von *Staudts* Imaginärtheorie gegeben hat, Math. Ann. 8 (1874), p. 145.

337) Den Inbegriff aller zu P, Q, R neutralen Punkte S bezeichnet *Staudt* als Kette (a. a. O. § 206).

von $EFGH$ mit dem Sinn von pqr oder von prq übereinstimmt, heißt S im Sinn PQR oder PRQ liegend[338]).

Auf Grund dieser Definition läßt sich dann zunächst beweisen, daß entsprechende Würfe bei *reell* projektiver Beziehung entweder beide neutral oder aber beide von gleichem Sinn sind, und daß insbesondere harmonischen Würfen wieder harmonische Würfe entsprechen. Damit ist die Möglichkeit gegeben[339]), die projektive Beziehung auch allgemein dahin zu definieren, daß sie eine eineindeutige Beziehung ist, bei der zwei entsprechende Würfe entweder beide neutral sind, oder falls sie nicht neutral sind, gleichen Sinn besitzen[340]). Von hier aus gelangt man alsdann auch zur Definition der Reziprozität und Kollineation für ebene und räumliche Elementargebilde. Als wichtigstes Einzelergebnis nenne ich noch die Tatsache, daß *Staudt* die imaginären c_2 und F_2 dadurch zu definieren vermochte, daß er allgemein die c_2 als Ordnungskurve eines reellen Polarsystems einführte, d. h. als Ort der reellen oder imaginären Punkte, die auf ihren Polaren liegen, und für die so definierten c_2 die Allgemeingültigkeit der den reellen c_2 zukommenden projektiven Eigenschaften nachwies[341]).

Staudt hat auch bereits eine Reihe von einzelnen Sätzen und Konstruktionen auf die Fälle ausgedehnt, in denen imaginäre Bestimmungsstücke auftreten; dabei handelt es sich wieder wesentlich darum, eine solche Umformung der Konstruktionen zu bewirken, daß sie allgemeine Gültigkeit besitzen. Derartige Untersuchungen sind auch sonst vielfach durchgeführt worden[342]). Die Konstruktion des c_2 aus fünf

---

338) Man hat zu zeigen, daß diese Definition von der gewählten Geraden a unabhängig ist, was *Staudt* tut; § 55. Übrigens hängt der oben definierte Sinn einzig und allein davon ab, auf welcher Seite der Regelschar die Gerade s liegt; daß s die Regelschar nicht schneidet, folgt aus der Definition. Vgl. auch *Lüroth*, Math. Ann. 8 (1875), p. 163.

339) Dies entspricht dem sogenannten Prinzip der Permanenz formaler Gesetze von *H. Hankel* (I A 1).

340) Bilden $ABCD$ einen imaginären harmonischen Wurf, so tun es auch die zu ihnen konjugierten Elemente $A_1 B_1 C_1 D_1$. Würde man nun die projektive Beziehung so definieren, daß harmonischen Würfen harmonische entsprechen, so würden bei zwei projektiven vereinigten Punktreihen, die *alle reellen* Elemente entsprechend gemein haben, die imaginären sich wechselseitig entsprechen können. Daher ist die Gleichheit des Sinnes in die Definition als Forderung aufzunehmen (Beiträge, § 225). Die Antiprojektivitäten von Nr. 20 schließt *Staudt* a. a. O. ausdrücklich aus.

341) Die Übertragung dieser Begriffe auf den Bündel führte *Staudt* dazu, daß orthogonal soviel ist wie konjugiert bezüglich des Kugelkreises, und der orthogonale Bündel ein Polarbündel für den absoluten Kegel (Beiträge. § 192 ff.); vgl. auch *M. Chasles*, J. de math. (2) 5 (1860), p. 425.

Punkten oder Tangenten für die Fälle, daß zwei oder vier imaginär werden, hat in vollem Umfang zuerst *R. Staudigl*[343]) erledigt. Ausführlich wurden die doppelt berührenden c_2 und die bezüglichen Konstruktionen von *F. Hofmann*[344]) erörtert. *K. Bobek*[345]) gab analoge Konstruktionen für eine F_2, für den achten Schnittpunkt dreier F_2, wenn sechs der gegebenen sieben Punkte imaginär sind, und für die räumliche c_4 erster Art aus acht imaginären Punkten, *C. Hoßfeld*[346]) analoge Konstruktionen der F_2 und der räumlichen c_3, wenn acht resp. sechs Punkte imaginär sind, *Ch. Beyel*[347]) untersuchte ebene perspektive Systeme für den Fall, daß Zentrum, Achse oder das charakteristische *Dv* (Nr. **12**) imaginär sind. *C. Servais*[348]) gab eine eingehende Diskussion der räumlichen c_3 usw.

F. Klein[349]) hat zuerst darauf hingewiesen, daß man zur Definition der imaginären Punkte statt einer elliptischen Involution jede zyklische Projektivität (Nr. **14**) benutzen kann, die die gleichen (imaginären) Doppelpunkte besitzt; ein Gedanke, den später *H. Lüroth*[350]) eingehender durchgeführt hat. Der einfachste Fall ergibt sich für $n = 3$, weil hier die zur Unterscheidung der beiden konjugiert ima-

---

342) *A del Re*, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 257, betrachtet den Involutionssatz am Viereck.

343) Wien Ber. 61 (1870), p. 607. Einzelne Probleme dieser Art hat bereits *H. Seydewitz* behandelt Arch. f. Math. 5 (1844), p. 331; ebenso *Chr. Paulus*, Grundlinien § 118 und Arch. f. Math. 22 (1854), p. 121. Vgl. auch *Chasles*, Sections coniques, p. 226; *Olivier*, J. de math. (2) 4 (1859), p. 82; *C. Hoßfeld*, Diss. Jena 1882; *R. Böger*, Diss. Leipzig 1886; *V. Retali*, Palermo Rend. 2 (1888), p. 25; *F. Spath*, Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 237; *F. Ruth*, Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 81; *K. Schober*, Konstruktion von c_2 aus imaginären Elementen, Innsbruck 1892; *F. Machovec*, Monatsh. f. Math. 4 (1893), p. 95; *J. Thomae*, Zeitschr. Math. Phys. 38 (1893), p. 381 u. 39 (1894), p. 63; *R. Böger*, Hamburg Math. Mitt. 3 (1898), p. 352.

344) Die Konstruktionen doppelt berührender c_2 mit imaginären Bestimmungsstücken, Leipzig 1886.

345) Prag Ber. für 1882 (1883), p. 65.

346) Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 111 u. 187.

347) Zürich Vierteljahrsschr. 31 (1886), p. 20.

348) Sur les imaginaires en géométrie, Gent 1894, und La projectivité imaginaire, Brüssel Mém. cour. 49 (1896) u. 52 (1894). Die Abhandlungen enthalten überdies eine eingehende Darstellung der Theorie *Staudts* nebst Anwendungen auf c_2, auf Kollineationen usw. *Servais* modifiziert sie so, daß er den reellen und den imaginären Teil des Wurfs direkt durch ein *Dv* auf einem c_2 darstellt. Er zeigt dort auch das Verhältnis, in dem die Darstellungen des Imaginären durch *G. Tarry*, *Ed. Laguerre* und *A. Mouchot* zur Darstellung *Staudts* stehen.

349) Gött. Nachr. 1872, p. 375; abgedruckt in Math. Ann. 22 (1883), p. 242

350) Math. Ann. 11 (1877), p. 84.

ginären Elemente dienenden Sinne ABC und CBA mit den drei Elementen der zyklischen Gruppe unmittelbar gegeben sind[351]). In noch allgemeinerer Form erscheint dieser Gedanke bei *H. Wiener*[352]) und *F. Amodeo*[353]). *Wiener* geht davon aus, daß wenn $\mathfrak{P}$ eine Projektivität mit reellen Doppelpunkten M, N ist, die zyklische Gruppe der Punkte $A', A'', A''', \ldots$, die zu A durch die Projektivitäten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}^3, \ldots$ (Nr. 23) zugeordnet werden, gegen den einen Doppelpunkt konvergiert, und die zyklische Gruppe $A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \ldots$, die dem A in den Projektivitäten $\mathfrak{P}^{-1}, \mathfrak{P}^{-2}, \mathfrak{P}^{-3}, \ldots$ entsprechen, gegen den anderen (Nr. 21). Diese Reihen sind überdies für alle Punkte $A, B, \ldots$ einander projektiv (Nr. 23); sie können daher im Fall imaginärer Doppelpunkte zu deren Definition benutzt werden; die beiden Sinne werden durch $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}^{-1}$ ersetzt. *Amodeo* endlich faßt das ganze Büschel (Nr. 24) aller Projektivitäten ins Auge, die die gleichen Doppelpunkte besitzen, bzw. mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind; jede von ihnen kann in derselben Weise benutzt werden, wie $\mathfrak{P}$ selbst. Dieses Büschel enthält nun *eine* Involution und unendlich viele zyklische Projektivitäten; benutzt man diese, so hat man wieder die *Staudt*sche bzw. die *Klein-Lüroth*sche Darstellung.

C. Segre[354]) hat die Grundlagen der Imaginärtheorie insofern modifiziert, als er von vornherein das *Punktepaar* als Ausgangspunkt nimmt, was für viele Fragen ausreichend ist; nämlich immer dann, wenn es nicht nötig ist, die beiden conjugiert imaginären Punkte zu trennen. Jedes reelle Paar kann durch eine Involution mit ihnen als Doppelelementen dargestellt werden; die Übertragung dieser Tatsache führt dann wieder zur Darstellung eines imaginären Paares durch diejenige Involution, die zu allen $\mathfrak{P}$ mit denselben Doppelelementen bzw. deren Büschel als die mit ihnen *verbundene* Involution gehört (Nr. 23) usw. Dieser Ausgangspunkt erweist sich für das Operieren mit Projektivitäten und deren Beziehungen als einfach und nützlich. Im Raum werden analog die konjugierten Geraden zweiter Art durch eine gescharte Involution definiert, die zu einem Büschel gescharter Kollineationen gehört usw. (Vgl. *Fano* III AB 4a, Nr. 15.)

20. Die Antiprojektivität oder Symmetralität[355]). Eine fruchtbare Weiterbildung hat die *Staudt*sche Imaginärtheorie durch *C. Juel*[356])

351) Näheres bei *Fano* III AB 4a, Nr. 15.

352) Habilitationsschrift Halle 1885.

353) Giorn. di mat. 26 (1888), p. 363.

354) Torino Mem. (2) 38 (1886).

355) Über die prinzipielle Bedeutung vgl. *Fano,* III AB 4a, Nr. 15ff.

356) Diss. Kopenhagen 1885 und Acta math. 14 (1890), p. 1.

und *C. Segre*[357]) erfahren. Sie trägt dem Fall Rechnung, dessen Erörterung *K. G. C. v. Staudt* ausdrücklich abgelehnt hatte, daß nämlich vereinigte Punktreihen alle reellen Punkte gemein haben können, während die konjugiert imaginären sich wechselseitig entsprechen[358]). Eine derartige Beziehung bezeichnet *Juel* als *Symmetralität*, *Segre* als *Antiprojektivität*. Denkt man sich die projektive Beziehung $\mathfrak{P}$ durch eine bilineare Relation zwischen x und y gegeben, so entsteht aus ihr die Antiprojektivität $\mathfrak{A}$, indem man y durch die konjugiert komplexe Größe ersetzt[359]). *Juel* hat sie geometrisch auf folgendem Wege abgeleitet. Sind g und g' irgend zwei imaginäre Geraden zweier Räume Σ und Σ', so haben sowohl ihre imaginären Punkte, wie auch ihre imaginären Ebenen die gleiche lineare Kongruenz zum Träger; man kann daher Σ und Σ' sowohl kollinear, als auch reziprok so aufeinander beziehen, daß je drei Geraden der beiden Kongruenzen einander entsprechen. Die damit definierte *Punkt*verwandschaft zwischen g und g' ist dann nur im ersten Fall eine projektive, im zweiten dagegen eine symmetrale. *Segre* gelangt zur $\mathfrak{A}$, indem er von *Staudts* grundlegender Definition ausgeht (Nr. **16**) und die oben genannte Beschränkung wegläßt. Mittels des Darbouxschen Beweisganges (Nr. **16**) ergeben sich alsdann im imaginären Gebiet noch zwei verschiedene Verwandtschaften, die dem Fundamentalsatz genügen, nämlich die $\mathfrak{P}$ und die $\mathfrak{A}$; sie stehen in dem gleichen Verhältnis zueinander wie Bewegungen und Umlegungen; das Produkt $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ (Nr. **23**) ist also wieder eine $\mathfrak{P}$. Eine $\mathfrak{A}$ ist daher ebenfalls durch irgend drei Punktepaare bestimmt; sie enthält im allgemeinen ein Paar Punkte M, N, die entweder Doppelpunkte sind oder sich wechselseitig entsprechen[360]).

Die vorstehenden Begriffsbildungen lassen sich auf Ebene und Raum übertragen; neben den *Antikollineationen* lassen sich hier auch die *Antireziprozitäten* definieren. Auch hier gilt, daß andere eineindeutige stetige Verwandtschaften, die auf der Bedingung der vereinigten Lage beruhen, nicht existieren. Eine ebene Antikollineation $\mathfrak{A}$ ist durch vier Punktepaare bestimmt; sie besitzt entweder drei Doppelpunkte und Doppelgeraden oder aber nur einen Doppelpunkt

---

357) Torino Atti 25 (1890), p. 276 u. 430; 26 (1890), p. 35 u. 592; Math. Ann. 40 (1892), p. 413.

358) Vgl. Anm. 340

359) Entsprechende *Dv* haben daher konjugiert komplexe Werte. Vgl. auch die analytische Darstellung von *G. Sforza*, Giorn. di mat. 30 (1891), p. 159.

360) Im ersten Fall ist der Modul, im zweiten das Argument des *Dv* ($MNAA'$) konstant.

und eine Doppelgerade, während sich zwei andere Punkte und Geraden *wechselseitig* entsprechen.

Den wichtigsten Typus aller Antiprojektivitäten stellen die *Antiinvolutionen* $\mathfrak{S}$ dar; eine solche liefert z. B. der oben genannte Fall, daß alle reellen Punkte einer Geraden sich selbst, die konjugiert imaginären aber sich wechselseitig entsprechen. Doch liefert dies nicht den allgemeinsten Fall einer linearen $\mathfrak{S}$; denn es brauchen für eine solche $\mathfrak{S}$ überhaupt keine Doppelpunkte zu existieren; gibt es aber einen, so gibt es zugleich ∞^1, die im Staudtschen Sinn eine Kette bilden. Für eine ebene $\mathfrak{S}$ existieren stets Doppelpunkte, und zwar gibt es deren ∞^2; sie bilden die naturgemäße Verallgemeinerung des Staudtschen Begriffs einer Kette, und werden daher von *Juel* und *Segre* als *zweidimensionale* oder *ebene Ketten* bezeichnet. Für eine räumliche $\mathfrak{S}$ gibt es wieder keinen oder aber ∞^3 Doppelpunkte, die ebenfalls als Kette bezeichnet werden usw. Eine lineare Kette ist durch drei, eine ebene durch vier, eine räumliche durch fünf Punkte bestimmt, und kann aus ihnen nach den Methoden der reellen Kollineationen (Netzkonstruktionen usw.) abgeleitet werden[361]. Die Ketten können auch als Erzeugnis antiperspektiver Büschel, Bündel usw. definiert werden, sie bilden die einfachsten Vertreter einer Menge von ∞^1, ∞^2, ∞^3 Elementen, die aus der Gesamtheit aller ∞^2, ∞^4, ∞^6 komplexen Elemente herausgehoben werden können, und die *Segre* als hyperalgebraisch bezeichnet. (Vgl. *Fano* III AB 4a, Nr. **16** ff.)

Auch für die *Antireziprozitäten* $\mathfrak{H}$ existieren analoge Sätze wie im reellen Gebiet, allerdings sind auch wesentliche Unterschiede vorhanden. (Näheres bei *O. Ludwig.*)

21. Das Rechnen mit Würfen. Um die *volle Gleichwertigkeit* der geometrisch projektiven Betrachtung mit der rechnerisch analytischen zu erreichen, hat man den Koordinatenbegriff auf geometrischer Grundlage zu definieren und die Geltung der für ihn vorhandenen Rechnungsgesetze nachzuweisen. Es ist ein Hauptziel *Staudt*s gewesen, dem auf Grund eines exakten Beweisganges zu genügen und damit in endgültiger Form zu leisten, was *Poncelet* angestrebt und durch die im Prinzip der Kontinuität enthaltene Forderung angebahnt hatte. Die Grundlage bildet die Tatsache, daß sich die gewöhnliche Maßbestimmung im linearen Gebiet als *Dv* auffassen läßt. Da sich nun die gewöhnliche Koordinatenbestimmung der analytischen Geometrie

361) *Juel* bezeichnet eine Gerade, die mit der ebenen Kette eine einfache Kette gemein hat, als *adjungierte* Gerade; eine ebene Kette ist dann auch durch drei Punkte und eine adjungierte Gerade bestimmt usw.

sonst nur noch auf Begriffe und Konstruktionen stützt, die vom metrischen unabhängig sind, so handelte es sich nur darum, das *Dv* durch eine vom Metrischen unabhängige Definition einzuführen und für den so geschaffenen Begriff die Geltung der Rechnungsgesetze zu erweisen. Das erste erreichte *Staudt* so, daß er die von den vier Punkten eines *Dv* gebildete Punktgruppe (*Wurf*, Nr. 7) direkt als Operationsobjekt einführte und Würfe als gleich definierte, wenn sie einander projektiv entsprechen. Er erhielt damit einen *projektiv invarianten* Begriff, der unmittelbar auch das imaginäre Gebiet umfaßte. Damit war denn auch die der Sache nach schon von *Möbius*[362]) gegebene auf dem *Dv* beruhende und sonst nur linear konstruktiv verfahrende projektive Koordinatenbestimmung unmittelbar übertragbar.

Die wesentlichste Aufgabe bestand aber darin, auch die Rechnungsgesetze auf die Würfe übertragen. Das Verdienst, hier bahnbrechend gewesen zu sein, gebührt ebenfalls noch *K. G. C. v. Staudt*[363]). Er hat bereits gezeigt, wie man für Summe und Produkt zweier Würfe einen neuen Wurf geometrisch so definieren kann, daß die Rechnungsregeln gewahrt werden[364]). Insbesondere stellen die *neutralen* Würfe (d. h. diejenigen, die entweder aus vier reellen Punkten bestehen, oder aus solchen imaginären, deren Träger hyperboloidische Lage haben) die reellen Zahlen, also die Kette aller neutralen Würfe die Gesamtheit aller reellen Zahlen dar, und dies so, daß dem harmonischen Wurf die Zahl — 1 entspricht. Als komplexe Einheiten werden dann alle diejenigen nur dem Sinne nach verschiedenen Würfe definiert, deren

---

362) Eine solche Koordinatenbestimmung hatte im reellen Gebiet *Möbius* nach den Methoden des baryzentrischen Calcüls, mit Hilfe der mehrfach genannten Netzkonstruktion ausgeführt. Er findet, daß jedem erreichbaren Punkte rationale Zahlentripel zugehören, und umgekehrt rationalen Koordinaten stets ein linear konstruierbarer Punkt entspricht; Baryc. Calcül, § 198 ff. Später ist dies in allgemeinster Weise von *W. Fiedler* geschehen, Zürich Vierteljahrsschr. 15 (1870), p. 152. Vgl. auch *J. Hemming*, ebenda 16 (1871), p. 41, wo sich die Diskussion der Koordinatentransformation für projektive Koordinaten findet. Näheres über die projektiven Koordinatenmethoden bei *Müller* III AB 7.

363) Vgl. Beiträge, p. 166 ff; *H. Pfaff*, Neuere Geometrie.

364) Sind $ABCD = U$ und $ABCD_1 = U_1$ die beiden Würfe, und wird der Punkt S so bestimmt, daß CC, DD_1 und AS eine Involution bilden, so stellt $ABCS$ die Summe $U + U_1$ dar. Das Produkt ergibt sich auf Grund davon, daß wenn MN, AD, BC drei Paare einer Involution sind, die Relation

$$(MNAB)\,(MANC) = (MAND)$$

besteht. Um daher das Produkt UU_1 zu konstruieren, gehe man von drei Punkten M, A, N aus und bestimme zunächst A_1 und A_2 so, daß $(MANA_1) = U$ und $(MA_1NA_2) = U_1$ ist, so ist $(MANA_2) = UU_1$ der Produktwurf. Vgl. Beiträge, p. 167 ff

Quadrat ein harmonischer Wurf ist, und auf Grund davon kann für jeden nicht neutralen Wurf eine solche additive und multiplikative Darstellung durch andere Würfe gefunden werden, daß ihm eine bestimmte komplexe Zahl entspricht. *J. Lüroth*[365]) hat diese Resultate noch wesentlich ergänzt. Er hat die neutralen Würfe in positive und negative geteilt, den absoluten Betrag nicht neutraler Würfe eingeführt und gezeigt, daß für ihn die Größenbeziehungen gelten, und daher auch der Stetigkeitsbegriff auf sie ausgedehnt werden kann. Als Gesamtresultat dieser Untersuchungen ergibt sich also die Tatsache, daß mittels der *Staudt*schen Ideen, unabhängig von der Metrik und auf rein projektiver Grundlage, eine Koordinatenbestimmung und die Anwendbarkeit der analytischen Methoden in vollem Umfang begründet werden kann (vgl. *Fano* III AB 4a, Nr. **14**, **15**).

22. Methodische Gesichtspunkte. Ist einmal die Möglichkeit erwiesen, die projektive Geometrie unabhängig von der Metrik zu begründen, so kann man weiter fordern, daß sie sich in ihren Entwicklungen aller Hilfsmittel enthält, die aus der Algebra stammen. Sie hat vor allem ihre Gebilde selbständig zu definieren; insbesondere muß sie dies in einer Weise tun, die *projektiv invariant* ist, wozu dann noch in zweiter Linie die Aufgabe tritt, die Gleichwertigkeit der analytischen und geometrischen Methoden und Resultate zu prüfen und nachzuweisen. Erwägungen, die auf der Konstantenabzählung beruhen, bleiben dabei außer Betracht.

J. V. Poncelet[366]) handelte bereits der obigen Forderung gemäß, indem er den Satz, daß die Projektion eines c_2 wieder ein c_2 ist, auf den projektiven Charakter derjenigen metrischen Relation stützte, die schon bei den Griechen für den c_2 definierend war. Dagegen enthielt *J. Steiners* erste projektive Erzeugung der c_2 (Nr. **10**) noch eine Lücke. Er stützte sie darauf, daß ein c_2 durch einen schiefen Schnitt eines Kreiskegels entsteht, und ein Kreis durch *gleiche* Büschel erzeugbar ist; es war aber noch nicht geometrisch bewiesen, daß jeder einen c_2 projizierende Kegel Kreisschnitte besitzt[367]). *Steiner*[368]) hat daher

365) Math. Ann. 8 (1875), p. 145.

366) Traité, § 41.

367) Dies konnte erst aus den besonderen Eigenschaften des Kegels oder Polarsystems, die sich auf seine Fokalachsen und seine zyklischen Ebenen beziehen, erschlossen werden. Eine systematische Darstellung findet sich z. B. bei *Schröter*, Theorie der Oberfl., p. 51 und bei *Reye*, Geometrie der Lage 1, 3. Aufl., p. 179. Nach *M. Chasles* soll allerdings *R. Descartes* den Satz schon besessen haben, Rapport, p. 75.

368) Dies geschah in seinen Vorlesungen; vgl. *Steiner-Schröter*, Vorlesungen, Vorrede, p. VI.

später den hier einzig möglichen Weg eingeschlagen, den c_2 als Erzeugnis projektiver Gebilde zu *definieren*, und alsdann die einzelnen c_2 als Spezialfälle dieser Definition nachzuweisen. Erst *K. G. C. v. Staudt* vermochte es aber, der geometrischen Definition dieselbe Allgemeinheit zu geben, wie der analytischen, indem er den c_2 als Ordnungskurve eines Polarsystems definierte (Nr. **13**).

Die *Steiner*sche und *Staudt*sche Definition sind typisch für alle Definitionen höherer Gebilde; diesem Zweck dienen entweder die Erzeugungsmethoden oder solche Definitionen, die an die vereinigte Lage gewisser Gebilde anknüpfen. Dabei entsteht aber eine der Geometrie speziell anhaftende methodische Schwierigkeit. Daß vom Standpunkt der projektiven Geometrie aus weder das Bézoutsche Theorem, noch auch das Korrespondenzprinzip erlaubte Hilfsmittel sind, ist evident; um zu beweisen, daß ein irgendwie definiertes Gebilde z. B. eine F_3 ist, ist vielmehr zu zeigen, daß es auf die Weise *erzeugt* werden kann, durch welche die F_3 *definiert* ist[369]). Die eine Erzeugungsweise ist aus der anderen *abzuleiten*. Das erste Beispiel, in dem dies geleistet wurde, ist der Identitätsbeweis der durch Büschel bzw. Punktreihen erzeugten c_2, den *Steiner* in seinen Vorlesungen gegeben hat, sowie der analoge Beweis für das Erzeugnis von zwei Ebenenbüscheln und zwei Punktreihen[370]). Für die F_2 läßt sich der Identitätsbeweis aus der Theorie der Polarität entnehmen. Für die räumliche c_3 hat *H. Schröter*[371]) die Identität der Gesamtheit ihrer Schmiegungsebenen mit dem Erzeugnis dreier Punktreihen nachgewiesen, nachdem schon *M. Chasles*[372]) die hierzu nötigen Sätze abgeleitet hatte. Die Identität der Erzeugnisse zweier kollinearen Bündel und dreier projektiven Ebenenbüschel ist der Sache nach zuerst von *Chasles* ohne Beweis ausgesprochen worden; die ausführliche Begründung ist später durch *Th. Reye*[373]) geschehen. *F. Schur*[374]) bewies noch unlängst die Identität der Tripelkurve c_3 mit dem Erzeugnis eines c_2-Büschels und eines Strahlbüschels, nachdem auch bereits *Steiner*[375]) und *Th. Reye*[376])

---

369) Dagegen pflegte man sich ursprünglich auf den Beweis zu beschränken, daß ein Gebilde mit einer Geraden n Punkte gemein hat. Auch in *Cremonas* Theorie der c_3 steht noch (ohne Beweis) der Satz an der Spitze, daß zwei c_3 sich in neun Punkten schneiden.

370) *Steiner-Schröter*, Vorlesungen, p. 101 und Vorrede, p. VII.

371) J. f. Math. 56 (1859), p. 27.

372) J. de math. (2) 2 (1857), p. 397.

373) Geometrie der Lage 2, p. 72.

374) Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 119 Dasselbe hatte vorher bereits *H. Milinowski* versucht, ebenda 21 (1876), p. 427 und 23 (1878), p. 27, 85, 211.

375) Vgl. *Steiner-Schröter*, Vorlesungen, p. 507.

dies für besondere Fälle abgeleitet hatten usw. Keineswegs aber ist die hier erhobene Forderung bisher in allen Fällen erfüllt worden. *F. Schur*[374]) hat gelegentlich die Notwendigkeit betont, ihr wieder mehr gerecht zu werden.

Ein ähnlicher Gesichtspunkt ist maßgebend für den Beweis, daß ein geometrisches Gebilde durch eine gewisse Zahl von Punkten, Geraden, Ebenen eindeutig bestimmt ist. Dem konstruktiven Charakter der projektiven Geometrie entsprechend sind diese Beweise erst dann als geführt zu erachten, wenn durch die gegebenen Elemente die definierende Erzeugung vermittelt und die Konstruktion wirklich geleistet werden kann. Die Erzeugung der c_2 aus 5 Punkten gehört den Elementen an. Dagegen haben die linearen Konstruktionen der höheren Kurven und der räumlichen Gebilde noch bis in die neueste Zeit hinein mannigfache Behandlung gefunden (*Staude* III C 2, Nr. 49; *Kohn* III C 5 und *Meyer* III C 7).

Von methodischem Interesse ist auch die Frage, ob und inwieweit es gestattet ist, die Gebilde und Probleme zu *spezialisieren*, ohne daß die für sie abgeleiteten Resultate die allgemeine Geltung verlieren. Die französische Schule hat sich lange Zeit unbedenklich direkt auf den Boden des Prinzips der Kontinuität gestellt und für die Erörterung von Kurven und Flächen insonderheit ihr Verhalten gegenüber g_∞ bzw. ε_∞ in Betracht gezogen. Hingegen haben die führenden deutschen Geometer gemeint, jede Spezialisierung als einen Verstoß gegen die Allgemeinheit der Untersuchung verschmähen zu sollen. Eine Änderung ist hierin in neuerer Zeit erst wieder durch *F. Klein* eingetreten, der überall auch für die geometrischen Problemstellungen diejenige Einfachheit angestrebt und ausgeführt hat, die analytisch einer speziellen und möglichst günstigen Wahl des Koordinatensystems entspricht[377]). Die Erkenntnis des allgemeinen projek-

---

376) Geometrie der Lage 2, Kap. 22.

377) Vgl. z. B. die Arbeit über F_3, Math. Ann. 6 (1873), p. 555 und die im Anschluß daran von *C. Rodenberg* hergestellten, im Verlag von *L. Brill* in Darmstadt (jetzt *M. Schilling* in Halle) erschienenen Modelle, sowie auch dessen Arbeit in Math. Ann. 14 (1877), p. 46, im Gegensatz zu dem ersten von *Chr. Wiener* stammenden unsymmetrischen Modell. Ein anderes Beispiel bildet der Nachweis, daß das von *A. Clebsch* gefundene zehnfach *Brianchon*sche Sechseck durch die sechs Hauptdiagonalen des Ikosaeders realisiert ist; Math. Ann. 4 (1871), p. 333 u. 12 (1877), p. 531.

Dieser methodische Gesichtspunkt ist auch für die Theorie der Konfigurationen von Wichtigkeit. Vgl. z. B. *Th. Reye*s Nachweis, daß die Figur der desmischen Tetraeder am Würfel und Oktaeder nachweisbar ist, Acta math. 1 (1882), p. 97.

tiven Charakters aller Koordinatenmethoden und aller Maßbestimmung hat wesentlich dazu beigetragen, dieser Anregung Erfolg zu verschaffen; es ist heute durchaus geläufig, möglichst *speziell zu denken* und die am Speziellen gefundenen Resultate durch *Projizieren zu verallgemeinern.* Man projiziert z. B. eine zyklische Projektivität in eine Drehung (Nr. **14**), eine hyperbolische Involution in eine Symmetrie (Nr. 13) usw., und kann damit deren Gesetze unmittelbar in Evidenz setzen[378]). Damit ist dem Prinzip der Kontinuität überall da zu seinem Recht verholfen, wo sich seine projektive Natur nachweisen läßt.

Der methodischen Vereinfachung dient endlich auch die auf *H. Wiener* zurückgehende Tendenz, die allgemeinen Operationen als Produkte von symmetrischen aufzufassen, was er für ein gewisses Gebiet durchgeführt hat (Nr. 23).

Die wichtigsten Probleme, die hier noch zu erörtern sind, betreffen die Frage, wie die projektive Geometrie einerseits für den Fundamentalsatz der Algebra, andererseits für die gesamte Invariantentheorie ein Äquivalent schaffen kann, ohne den Boden der projektiven reellen Hilfsmittel und Gebilde zu verlassen[379]). Was den Fundamentalsatz der Algebra betrifft, bzw. die Definition von Gruppen solcher n Punkte, die das Äquivalent der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades darstellen, so hat *K. G. C. v. Staudt* durch Darstellung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung mittels reeller Involutionen den Anfang gemacht (Nr. **19**). Für $n = 3$ hat *H. Thieme*[380]) ein Polarsystem dritter Ordnung, das den Wurzeln einer Gleichung dritten Grades entspricht, durch projektive Beziehung einer Punktreihe und eines Büschels von Involutionen zu definieren gelehrt[381]) und gezeigt, daß diese Methode von n auf $n + 1$ übertragen werden kann. Das Gleiche hat später in ausführlicher Darstellung *E. Kötter*[382]) getan. Was den Ersatz der Invariantentheorie betrifft, so sind hier wenigstens für das binäre Gebiet einige Ansätze vorhanden; sie beruhen darauf, daß die neuere Zeit die den binären Formen entsprechenden Projektivi-

---

378) *R. Krause* hat dies für die ternären und quaternären zyklischen Kollineationen durchgeführt, Programm Stettin, 1897.

379) Näheres bei *Fano* III AB 4a, Nr. 25 ff.

380) Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 221 u. 276; Math. Ann. 28 (1886), p. 133.

381) *B. Klein* hat hierzu die trilinear symmetrische Verwandtschaft auf einer c_3 benutzt, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde, Marburg 1881.

382) Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Kurven, Berlin 1887; *Kötter* gibt dort auch die *Staudt*sche Imaginärtheorie in etwas modifizierter Form.

täten und Involutionen direkt ins Auge faßt und für sie diejenigen gegenseitigen Beziehungen zu definieren verstand, die den Formulierungen der Invariantentheorie parallel gehen[383]). (Vgl. auch *Fano*, III AB 4a, Nr. 25 ff.)

23. Das Rechnen mit Verwandtschaften. Wird durch die projektive Verwandtschaft $\mathfrak{V}$ dem System Σ das System Σ' zugeordnet, z. B. jedem A ein A', und wird dem System Σ' mitttels der Verwandtschaft $\mathfrak{V}'$ ein System Σ'' zugeordnet, also jedem A' ein A'', so wird die Beziehung $\mathfrak{V}''$, die Σ'' dem System Σ zuordnet, also A'' dem A, als *Produkt* von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ bezeichnet[384]); man schreibt:

$$\mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}\mathfrak{V}' \quad \text{resp.} \quad \Sigma\mathfrak{V}\Sigma'\mathfrak{V}'\Sigma'' = \Sigma\mathfrak{V}''\Sigma''.$$

Dieser Produktbegriff genügt dem *assoziativen* Gesetz und gestattet daher die Anwendung aller assoziativen Operationen, besonders auch des *Gruppenbegriffs*[385]). Es ist klar, daß alle Operationen, die ein Gebilde in sich überführen, eine Gruppe bilden. Die Verwandtschaft, die Σ' in Σ überführt, also A dem A' zuordnet, heißt die zu $\mathfrak{V}$ *inverse* und wird durch $\mathfrak{V}^{-1}$ bezeichnet; eine Verwandtschaft, bei der jedes Element sich selbst entspricht, heißt *Identität*. Die Verwandtschaft $\mathfrak{U}' = \mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ heißt aus $\mathfrak{U}$ durch *Transformation* mit $\mathfrak{V}$ entstanden; ist $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}$, also auch $\mathfrak{U}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\mathfrak{U}$, so heißt $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{V}$ *vertauschbar*, ist $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}^{-1}$, so sagt man, $\mathfrak{U}$ wird durch $\mathfrak{V}$ *umgekehrt*. Ist $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{U}$, so heißen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ nach *C. Segre harmonisch*, jedes dieser beiden Produkte ist alsdann eine Involution, und es ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\mathfrak{J}$[386]). Harmonische Involutionen sind stets vertauschbar und umgekehrt.

Involutionen auf derselben Geraden mit reellen Doppelpunkten sind vertauschbar, also auch harmonisch, wenn ihre Doppelpunkte sich harmonisch trennen[387]). Zwei Projektivitäten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ auf g mit reellen

383) Sind z. B. $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zwei Involutionen, so stellt die mit beiden harmonische Involution $\mathfrak{J}$ die Funktionaldeterminante der beiden bezüglichen Formen dar. Vgl. *H. Wiener*, Habilitationsschr. Halle 1885.

384) Kombinationen von Verwandtschaften hat man schon lange ausgeführt; die Übertragung des formalen bekannten Algorithmus der Gruppentheorie auf die Projektivitäten geht auf *C. Stephanos* zurück, Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 453 und Math. Ann. 22 (1883), p. 299.

385) Über einfache Gruppen von Kollineationen usw., die mit der Theorie der Konfigurationen oder der Theorie besonderer Kurven und Flächen usw. zusammenhängen, vgl. *E. Steinitz*, III AB 5a Projektive Konfigurationen, und III C 13 Raumeinteilungen.

386) Ein Punktepaar AB geht daher durch $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ in A_1B_1 resp. B_1A_1 über.

387) Daher stammt die Bezeichnung *harmonische* Projektivitäten.

Doppelpunkten sind vertauschbar, falls sie die nämlichen Doppelpunkte besitzen. Ist $\mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{P}$ harmonische Involution auf g, so bilden die Doppelpunkte von $\mathfrak{P}$ ein Punktepaar von $\mathfrak{J}$. Theoretisch wichtig ist auch die mit $\mathfrak{P}$ *verbundene* resp. zu $\mathfrak{P}$ *zugehörige* Involution $\mathfrak{J}$. Werden zu A die Punkte A' und A_{-1} bestimmt, die in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^{-1}$ dem A entsprechen, und alsdann A_1 so, daß die Punkte $A_{-1}A'AA_1$ harmonisch sind, so bilden AA_1 die Involution $\mathfrak{J}$; sie ist mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar.

Die Beziehungen der Projektivitäten nehmen ihre einfachste Form an, wenn man, wie dies *C. Segre*[388]) getan hat, als Träger einen c_2 wählt. Vertauschbare Involutionen $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$ sind alsdann solche, deren Zentren resp. Achsen einander bezüglich des c_2 konjugiert sind; der Schnitt beider Achsen gibt das Zentrum der Involution $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$. Ferner gibt es zu jeder $\mathfrak{P}$ auf c_2 eine bestimmte Pascalgerade p, und es sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ vertauschbar, falls sie die gleiche Pascalgerade besitzen, während die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Involution $\mathfrak{J}$ die Pascalgerade p als Involutionsachse besitzt. Endlich wird $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{J}$ umgekehrt, falls p zur Involutionsachse von $\mathfrak{J}$ konjugiert ist usw.

Ebene und räumliche Kollineationen in vereinigter Lage sind stets und nur dann vertauschbar, wenn sie dieselben Doppelelemente besitzen.

Ebene resp. räumliche zentrische $\mathfrak{J}$ sind vertauschbar, falls das Zentrum der einen auf der Achse resp. Ebene der anderen liegt; gescharte sind es, falls die vier Achsen ein Viereck oder vier harmonische Geraden einer H_2 bilden[389]). Eine gescharte und eine zentrische $\mathfrak{J}$ sind vertauschbar, wenn die Achsen der ersten mit dem Zentrum und der Ebene der zweiten inzident sind. Eine $\mathfrak{J}$ ist z. B. mit einer Polarität vertauschbar, wenn Zentrum und Ebene resp. die Achsen der $\mathfrak{J}$ in der Polarität einander entsprechen[390]). Eine Nullkorrelation ist nur mit gescharten Involutionen oder Nullkorrelationen vertauschbar. Eine allgemeine räumliche $\mathfrak{C}$ ist nur unter Bedingungen mit einer Korrelation $\mathfrak{R}$ vertauschbar.

Th. Reye[391]) hat die Aufsuchung der vertauschbaren resp. harmo-

388) J. f. Math. 100 (1887), p. 329; vgl. auch *F. Aschieri,* Ist. Lomb. Rend. (2) 22 (1889), p. 414, 484.

389) Für diese und die folgenden Sätze vgl. *D. Montesano,* Ann. di mat. 14 (1886), p. 131. Eine ausführliche Darstellung für Ebene und Raum gibt *A. Sannia,* Lezioni, p. 444. Zu einer gescharten $\mathfrak{C}$ gibt es eine mit ihr verbundene gescharte $\mathfrak{J}$; a. a. O. p. 496.

390) Polaritäten sind daher vertauschbar, wenn die eine ein Produkt aus der anderen und einer der oben genannten Involutionen ist.

391) Geom. d. Lage 3, p. 219 und Math. Ann. 43 (1893), p. 145. Hier wer-

nischen 𝔈 und 𝔑 auf das Studium derjenigen zurückgeführt, von denen die eine die andere umkehrt; es beruht dies darauf, daß, wenn 𝔘 durch 𝔙 und 𝔚 umgekehrt wird, 𝔘 mit 𝔙𝔚 vertauschbar ist. Eine ebene 𝔈, deren Doppelpunkte ein Polardreieck einer Polarität bilden, wird durch diese Polarität umgekehrt; ein analoger Satz gilt im Raum. Eine ebene 𝔑 wird durch jede 𝔍 umgekehrt, deren Zentrum und Achse Pol und Polare für die beiden durch 𝔑 bestimmten c_2 sind, die also diese c_2 in sich transformiert; analog wird eine räumliche 𝔑 durch jede 𝔍 umgekehrt, die die mit 𝔑 zusammenhängenden F_2 und Φ_2 in sich transformiert, ebenso durch jede Polarität der Form 𝔍𝔑, wo 𝔍 eine der vorstehenden Involutionen ist, usw.

Von sonstigen Aufgaben, die das Rechnen mit Verwandtschaften benutzen, sind zunächst solche zu erwähnen, die die Auflösung gegebener Verwandtschaften in ein Produkt von speziellen bezwecken, insbesondere von Perspektivitäten, Involutionen, Ähnlichkeitstransformationen usw.[392]). *H. Wiener*[393]) hat die große Klasse aller derjenigen Verwandtschaften studiert, die sich als Produkt von zwei Involutionen darstellen lassen, insbesondere auch solche Gruppen, die nur Involutionen enthalten; zu der ersten Klasse gehören alle Projektivitäten auf einer Geraden, da eine Projektivität stets als Produkt von zwei Involutionen darstellbar ist, sowie alle Kollineationen, die eine c_2 resp. F_2 in sich überführen. Zugleich haben diese Gruppen die Eigenschaft, daß sie sich auf die sonst bereits bekannten Gruppen von Bewegungen und Umwendungen projektiv abbilden lassen und liefern so ein lehrreiches Beispiel für die in Nr. 21 erörterte methodische Auffassung.

Eine besonders einfache Behandlung gestatten die zyklischen Gruppen (Nr. 14), wenn man das Rechnen mit Projektivitäten benutzt. Es sei 𝔓 eine beliebige Projektivität, und man fasse die unbegrenzte Reihe von Projektivitäten

(1) $$1, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}^3, \ldots, \mathfrak{P}^\lambda, \ldots$$

ins Auge, so wird die Reihe von Punkten

(2) $$A, A_1, A_2, \ldots, A_\lambda, \ldots$$

---

den die obigen Sätze auch für den Fall bewiesen, daß die F_2 und Φ_2 nicht reell sind und auf spezielle 𝔈 ausgedehnt, insbesondere auf solche, die jede Schar einer R_2 in sich transformieren.

392) Vgl. z. B. *A. del Re*, Napoli Rend. (2) 2, p. 423 und Palermo Rend. 2 (1888), p. 37 und 128; Giorn. di mat. 28 (1890), p. 269; Riv. di mat. 2 (1892), p. 99; *F. Deruyts*, Mém. Liège (2) 17 (1892), Nr. 3; *M. Bôcher*, Math. Ann. 43 (1893), p. 598. Hierher gehört auch die Auflösung jeder 𝔈 in ein Produkt von Perspektivitäten, vgl. Anm. 97.

393) Leipzig Ber. 42 (1890), p. 245; 43 (1891), p. 424 und 644; 45 (1893), p. 555.

die durch sie zu A zugeordnet werden, in *allgemeinerer* Bedeutung ebenfalls als *zyklische* Reihe bezeichnet. Falls dann ein erstes n existiert, so daß $\mathfrak{P}^n = 1$ ist, so entsteht die *endliche* zyklische Gruppe von Nr. 14. Für diese Reihen bestehen noch folgende Sätze[394]). Es ist, falls A und B irgend zwei Punkte sind,

$$AA_1A_2 \ldots A_\lambda \ldots \pi\, BB_1B_2 \ldots B_\lambda \ldots,$$

und für eine endliche zyklische Gruppe ist, wie evident,

$$AA_1 \ldots . A_{n-1}\, \pi\, A_i A_{i+1} \ldots A_{i-1};$$

ferner ist auch

$$A_1A_2 \ldots A_n\, \pi\, A_n \ldots A_2A_1,$$

und es bilden für jedes i die Punktepaare $A_{i-\lambda}A_{i+\lambda}$ eine Involution, deren eines Doppelelement A_i ist. Durch Abbildung der zyklischen Projektivität auf eine Drehung werden diese Sätze wiederum unmittelbar durchsichtig.

Eine formale Vereinfachung erfährt auch ein Resultat von Nr. 11. Sind nämlich

$$(3) \qquad A_{-1}, A_{-2}, \ldots . A_{-\lambda}, \ldots .$$

die Punkte, die zu A durch die Projektivitäten

$$\mathfrak{P}^{-1}, \mathfrak{P}^{-2}, \ldots . \mathfrak{P}^{-\lambda}, \ldots$$

zugeordnet werden, so konvergieren die Reihen (2) und (3) gegen die beiden Doppelpunkte M und N von $\mathfrak{P}$, die zugleich Doppelpunkte aller $\mathfrak{P}^\lambda$ und $\mathfrak{P}^{-\lambda}$ sind.

24. Büschel, Netze usw. von Verwandtschaften. Die Tatsache, die für die Theorie der Büschel und Netze die Grundlage bildet, besagt, daß die sämtlichen Projektivitäten, Kollineationen und Korrelationen, ebenso die verschiedenen Involutionen usw. je eine *lineare Mannigfaltigkeit bilden.*

Zunächst ergibt sich die *Vielfachheit* dieser Mannigfaltigkeiten unmittelbar aus den Fundamentalsätzen. Da eine Projektivität oder Involution auf einer Geraden durch drei resp. zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt ist, gibt es auf der Geraden ∞^3 Projektivitäten und ∞^2 Involutionen[395]). Eine ebene Kollineation ist durch vier Paare entsprechender Punkte bestimmt, es gibt daher ∞^8 ebene Kollineationen und Korrelationen, darunter sind ∞^4 involutorische Kolli-

394) *C. Stephanos*, Anm. 384; *H. Wiener*, Anm. 352; *A. Ameseder*, Wien Berichte 98 (1889), p. 290 und Monatsh. Math. 1 (1890), p. 371, wo die Abbildung auf die Drehung durchgeführt wird.

395) Zu jeder Projektivität gibt es ∞^1 mit ihr harmonische.

neationen und ∞^5 involutorische Korrelationen. Endlich existieren im Raum ∞^{15} Kollineationen, darunter ∞^6 zentrale und ∞^8 axiale involutorische, und ∞^{15} Korrelationen, worunter ∞^9 involutorische.

Der *lineare* Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, der sich auf analytischer Grundlage unmittelbar erkennen läßt, bedarf geometrisch einer ausführlicheren Begründung. Zunächst handelte es sich darum, die einschlägigen Begriffe auf geometrischer Grundlage einzuführen. Dies ist zuerst für die Projektivitäten geleistet worden.

Den einfachsten Fall eines *Büschels von Projektivitäten* stellen alle diejenigen auf dieselbe Punktreihe bezüglichen Projektivitäten dar, die dieselben reellen Doppelpunkte besitzen. Es beruht dies auf der Tatsache, daß für eine $\mathfrak{P}$, deren Doppelpunkte M und N sind, das *Dv* $(MNAA')$ einen für alle A, A' festen Wert λ hat (Nr. **11**). Wird daher A festgehalten, während A' die Gerade g durchläuft, so ist jede $\mathfrak{P}$ durch A' bestimmt und umgekehrt, und es entspricht jeder $\mathfrak{P}$ ein Wert λ zwischen $-\infty$ und $+\infty$. Einen Büschel von $\mathfrak{P}$ bilden auch diejenigen Projektivitäten $\mathfrak{Q}_\lambda$, die man auf Grund des in Nr. **13** genannten Satzes von *M. Pasch*[236]) für alle Werte von λ erhält; es besteht nämlich auch für sie der Satz, daß, wenn man zu irgend zwei Punkten A und B die Punkte

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_\lambda, \ldots \quad \text{resp.} \quad B_1, B_2, B_3, \ldots B_\lambda, \ldots$$

bestimmt, die ihnen in den Projektivitäten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots \mathfrak{Q}_\lambda, \ldots$ entsprechen, diese Punktreihen selbst projektiv sind. Damit ist wieder die Möglichkeit gegeben, von dem *Dv* von vier Projektivitäten $\mathfrak{Q}_\lambda$ zu sprechen, indem man darunter das *Dv* von vier Punkten A_λ versteht. Dieser Satz ist für den Büschelbegriff grundlegend[396]). Es folgt aus ihm noch, daß zwei verschiedene Projektivitäten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ eindeutig ein Büschel bestimmen. Sind die Doppelpunkte von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ reell, so haben alle ihm angehörigen $\mathfrak{P}_\lambda$ die Eigenschaft, daß ihre Doppelpunkte mit denen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ eine Involution bilden[397]).

H. Wiener[398]) und *C. Segre*[399]) haben das Verdienst, den Begriff des Büschels und seine Eigenschaften geometrisch begründet zu haben, ohne ihn an das *Dv* oder an Realitätsverhältnisse zu knüpfen. *Wiener* hat Büschel von Involutionen ins Auge gefaßt; es sind dies solche,

---

396) Diesen Satz gab *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 299. Einen speziellen Fall bildet der Satz von Nr. **23** über harmonische Projektivitäten.

397) Vgl. auch *C. Hoßfeld*, Diss. Jena 1882.

398) Habilitationsschrift Halle 1885.

399) J. f. Math. 100 (1886), p. 317. Die Formulierungen von *Segre* lassen sich auch auf Antiprojektivitäten (Nr. **20**) ausdehnen.

die zu einer gegebenen $\mathfrak{J}$ harmonisch resp. mit ihr vertauschbar sind. Auch *Segres* Entwicklungen nehmen diejenige stets existierende Involution zum Ausgangspunkt, die mit den Projektivitäten des Büschels vertauschbar ist. Ist nämlich $\mathfrak{P}$ eine beliebige Projektivität, und wird gemäß Nr. 23 die zu ihr gehörige Involution (AA') konstruiert, so ist diese mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar, und falls $\mathfrak{P}$ eine nicht involutorische Projektivität ist, so ist $\mathfrak{J}$ die einzige derartige Involution. Eine jede Projektivität $\mathfrak{P}_\lambda$ kann nun durch $\mathfrak{J}$ und ein Punktepaar A, A_λ bestimmt werden; ist nämlich $A_{-\lambda}$ so definiert, daß $AA'A_{-\lambda}A_\lambda$ harmonisch sind, so stellen AA_λ, $A'A_\lambda'$ und $A_{-\lambda}A$ drei Paare entsprechender Punkte für $\mathfrak{P}$ dar. Alle $\mathfrak{P}_\lambda$, die $\mathfrak{J}$ als zugehörige Involution besitzen, stellen daher ein Büschel unter sich vertauschbarer Projektivitäten $\mathfrak{P}_\lambda$ dar, für das die Zuordnung zur Punktreihe aus der Definition unmittelbar erhellt[400]).

Um hieraus den allgemeinsten Begriff eines Büschels zu erhalten, verfährt *Segre* folgendermaßen.

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ irgend zwei Projektivitäten, so gibt es stets solche zwei Involutionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$, so daß $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{J}'$ übergeführt wird. Sucht man die Gesamtheit aller dieser Projektivitäten, die $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{J}'$ überführen, so zeigt sich, daß sie in zwei Scharen $\mathfrak{P}_\lambda$ resp. $\mathfrak{Q}_\lambda$ zerfallen; gehören $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{P}_\mu$ derselben Schar an, so gehört zu $\mathfrak{P}_\lambda\mathfrak{P}_\mu^{-1}$ immer $\mathfrak{J}$ als die zugehörige Involution; gehören $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{Q}_\mu$ zu verschiedenen Scharen, so sind sie harmonisch und $\mathfrak{P}_\lambda\mathfrak{Q}_\mu^{-1}$ stellt eine zu $\mathfrak{J}$ harmonische Involution dar. Jede dieser beiden Scharen stellt je ein Büschel dar, und man nennt überdies beide Büschel zueinander harmonisch; in jedem Büschel ist im allgemeinen eine Involution enthalten. Ferner folgt nun, daß ein Büschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ durch zwei Projektivitäten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eindeutig bestimmt ist; daß es entsteht, indem man alle Projektivitäten $\mathfrak{P}_\lambda$ mit $\mathfrak{P}$ multipliziert, zu denen dieselbe Involution gehört, wie zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$, und daß alle zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonischen Projektivitäten ein Büschel bilden, das zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch ist. Endlich folgt dann noch die Projektivität der obigen Punktreihen $A, A_1, \ldots A_\lambda, \ldots$ und $B, B_1, \ldots B_\lambda, \ldots$ für jedes Büschel.

In der Tatsache, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ein Büschel bestimmen, und daß zu ihm wieder *ein* bestimmtes harmonisches Büschel existiert, liegt der Grund für den linearen Charakter der Mannigfaltigkeit aller ∞^3 Projektivitäten. Es gibt insbesondere *eine* Projektivität, die zu drei

400) Es entspricht dem speziellen Büschel mit denselben Doppelpunkten und kann in ein Büschel von Rotationen projiziert werden.

gegebenen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ harmonisch ist; wenn zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$ und zu $\mathfrak{R}\mathfrak{P}^{-1}$ die Involutionen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ gehören, so konstruiere man $\mathfrak{J}$ harmonisch zu $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$, und hat in $\mathfrak{J}\mathfrak{P}$ die gesuchte Projektivität. Umgekehrt kann man auch die ∞^2 zu ihr harmonischen Projektivitäten ins Auge fassen; sie sind durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ bestimmt, und man kann zeigen, daß diese Mengen den Charakter *ebener* Gebilde besitzen, woraus der lineare Charakter der Menge aller ∞^3 Projektivitäten sich ergibt. Wie *F. Aschieri*[401]) näher ausgeführt hat, kann man auf diese Weise zu der von *C. Stephanos*[402]) auf analytischem Wege gefundenen Abbildung aller Projektivitäten, resp. was dasselbe ist, aller bilinearen Formen auf den *linearen* Punktraum gelangen. Es entspricht in ihr jeder $\mathfrak{P}$ ein Raumpunkt p; alle zu $\mathfrak{P}$ harmonischen Projektivitäten erfüllen eine Ebene π, die Polarebene von p bezüglich einer F_2 ist, und zwar ist diese F_2 so definiert, daß ihren Punkten die ausgearteten $\mathfrak{P}$ entsprechen[403]). (Näheres bei *O. Ludwig.*)

Über Büschel und Netze von ebenen oder räumlichen Kollineationen existieren bislang nur wenige Arbeiten, die den vorstehenden in ihrer Grundlage und Tendenz analog sind. *A. Ameseder*[404]) hat in dieser Hinsicht besonders die gescharten Kollineationen studiert und diejenigen, die eine F_2 in sich transformieren, und auch für sie die zugehörigen Involutionen in den Mittelpunkt der Betrachtung gerückt.

Abgesehen von einigen Einzeluntersuchungen[405]) über Mannigfaltigkeiten *spezieller* $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}$ sind als Untersuchungen von weitergehendem Interesse zunächst diejenigen von *S. Kantor*[406]) zu erwähnen. Sie betreffen die ∞^2 ebenen Kollineationen mit drei festen Punktepaaren, resp. die ∞^3 räumlichen mit vier festen Punktepaaren. Sie haben wesentlich die Tendenz, die mit ihnen zusammenhängenden

---

401) Ist. Lomb. Rend. (2) 22 (1889), p. 558 und 624.

402) Vgl. Anm. 297.

403) Eine Definition der Büschel und Netze von Projektivitäten auf Grund der Perspektivitäten gibt *B. Klein*, Marburg Ber. 1887, p. 1. Die Mannigfaltigkeit aller ∞^2 Involutionen und ihr linearer Charakter werden auch bei *E. Kötter* abgeleitet: Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Kurven, Berlin 1887, p. 110 ff.; auf analytischer Grundlage bei *F. Deruyts*, Liège Mém. (2) 17 (1892), Nr. 3.

404) Monatsh. Math. 1 (1890), p. 371.

405) *L. Certo* hat die Gesamtheit aller ebenen Affinitäten in Betracht gezogen, Giorn. di mat. 20 (1882), p. 321; *F. Amodeo* untersucht Büschel von ∞^1 ebenen Perspektivitäten, Giorn. di mat. 27 (1889), p. 40; *A. del Re* solche von ∞^1 Polaritäten, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 257.

406) Wien Denkschr. 46 (1883), p. 83. Einige spezielle Sätze gibt *A. del Re*, Palermo Rend. 2 (1888), p. 128; vgl. auch *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1882), p. 461.

höheren Punktverwandtschaften darzulegen, die im Netz auftretenden ausgearteten 𝔈 zu finden, sowie solche 𝔈, die gegebenen Bedingungen irgendwelcher Art genügen. Diese Gesichtspunkte sind auch für die Untersuchung der Mannigfaltigkeiten von 𝔑 maßgebend gewesen. Man hat bisher besonders die Büschel von ∞^1 𝔑 mit sieben (vgl. Nr. **15**) und das Gebüsch von ∞^3 𝔑 mit fünf festen Paaren konjugierter Punkte untersucht, doch gehören diese Untersuchungen mehr dem Gebiet der analytischen resp. der abzählenden Methoden, sowie der allgemeinen Theorie der *Konnexe* an. (Näheres bei *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, III C 11.) Die Theorie des Büschels der ∞^1 𝔑 ist im wesentlichen identisch mit der Theorie der $\mathfrak{B}_2$ (Nr. **26**). Von dem Gebüsch aller ∞^3 𝔑 mit fünf festen Paaren konjugierter Punkte erwähne ich hier den von *A. Clebsch*[407]) gegebenen Satz, daß diese fünf Paare noch ein sechstes linear bestimmen (Nr. **8**); es ist zugleich dasjenige Paar, das *Sturm* beim Problem der Projektivität im Fall $n = 5$ das mit den 5 gegebenen Punktepaaren verbundene Paar nennt (Nr. **16**). Die hier interessierende geometrische Bedeutung dieser Paare ist die, daß, wie *R. Sturm*[408]) gezeigt hat, in jedem Gebüsch von ∞^3 Kollineationen sechs Perspektivitäten vorhanden sind, und deren sechs Paare von Zentrum und Achse bilden die sechs Paare konjugierter Elemente P und g, die den sechs Punktepaaren der 𝔑 entsprechen[409]).

Die allgemeine Theorie der Mannigfaltigkeiten *aller* Projektivitäten, Kollineationen usw. hat wesentlich *Th. Reye*[410]) eingehend dargestellt, und den von ihnen gebildeten R_n resp. die in ihm vorhandenen M_ν diskutiert; über diese Untersuchungen, die zugleich einen im R_3 enthaltenen Ersatz für den spekulativen Begriff des R_n zu liefern bestimmt sind, vgl. *Castelnuovo* und *Enriques* III C 11.

25. Die trilineare einstufige Beziehung. Die *trilineare* Beziehung zwischen drei Grundgebilden erster Stufe drückt sich[411]) durch eine Gleichung aus, die in bezug auf jede der drei bezüglichen Koor-

---

407) Math. Ann. 6 (1873), p. 203.

408) Math. Ann. 22 (1883), p. 569. *Sturm* behandelt dort allgemein den Fall der durch beliebige fünf einfache Bedingungen gegebenen 𝔑.

409) Über Gruppen von Kollineationen vgl. *Castelnuovo* und *Enriques* III C 11.

410) J. f. Math. 104 (1889), p. 211; 106 (1890), p. 30 u. 315; 107 (1890), p. 162; 108 (1890), p. 89; vgl. auch *K. Zindler*, ebenda 111 (1893), p. 303.

411) Eine analytische eingehende Diskussion der trilinearen Beziehung geben *C. le Paige* und *F. Folie* in Brüssel Mém. cour. 42 (1879) Nr. 4; 43 (1880); 45 (1882); vgl. auch *C. le Paige*, Liège Mém. (2) 10 (1883), Nr. 2 und Bull. belg. (3) 5 (1883), p. 25 und 85. Eine ausführliche Behandlung der trilinearen Verwandtschaft gibt *F. London*, Math. Ann. 44 (1894), p. 375. (Näheres bei *O. Ludwig*.)

dinaten linear ist; jedes Element des einen Gebildes ist also erst nach Wahl je eines Elementes der beiden anderen Gebilde bestimmt. Die Gesamtheit aller dieser Elemententripel wird auch als *Tripelfeld* bezeichnet. Sie wurde zuerst von *F. August*[412]) zur Erzeugung der F_3 benutzt (Nr. **10**). Er führt sie so ein, daß er die Punkte einer Ebene von drei Achsen aus projiziert. Das eingehendere Studium der trilinearen Verwandtschaft begann *H. Schubert*[413]); sie entsteht in einfachster Weise so, daß man drei Punktreihen g, g', g'' ins Auge faßt, die Schnitte mit demselben Ebenenbündel sind; hält man einen Punkt A von g fest, so beschreiben die entsprechenden Punktepaare $A'A''$ auf g' resp. g'' projektive Punktreihen. Drei trilineare Punktreihen derselben Ebene heißen insbesondere *geradlinig* bezogen, wenn jede Gerade der Ebene auf ihnen entsprechende Punkte ausschneidet; diese Lage spielt hier die gleiche Rolle wie die perspektive Lage für die projektive Beziehung.

Für die trilineare Beziehung gelten folgende Hauptsätze. 1) Es gibt auf jeder der drei Geraden zwei *singuläre Punkte*, mit denen sich in der Weise sechs Paare bilden lassen, daß erstens jedes Paar aus solchen Punkten besteht, die zweien dieser Geraden angehören, und zweitens jedem solchen Paar jeder Punkt der dritten Geraden entspricht. 2) Das Produkt der drei *Dv*, die zwei Tripel entsprechender Punkte auf jeder Geraden mit den zwei singulären Punkten bestimmen, hat den Wert 1[414]). 3) Drei trilineare Punktreihen derselben Ebene liegen geradlinig, wenn die singulären Punkte in die Ecken des von ihnen gebildeten Dreiecks fallen, und ein Tripel in gerader Linie liegt. 4) Sind h, h', h'' Punktreihen, die zu g, g', g'' projektiv sind, so sind auch h, h', h'' in trilinearer Beziehung, falls g, g', g'' es sind. Die beiden letzten Sätze ermöglichen es, die allgemeinen Eigenschaften der trilinearen Beziehung aus denen der geradlinigen Lage in einfacher Weise abzuleiten; sie liefern z. B. unmittelbar die Konstruktion neuer Tripel, falls ein Tripel und die singulären Elemente gegeben sind. Für jedes Paar singulärer Elemente können zwei Tripel eintreten, so daß die trilineare Beziehung auch durch sieben Tripel bestimmt ist; jedes achte ist linear konstruierbar[415]).

---

412) Diss. Berlin 1862.

413) Math. Ann. 17 (1880), p. 457. *Schubert* hat dort auch bereits die Ausartungen der trilinearen Beziehung behandelt.

414) Die ersten beiden Sätze sind im wesentlichen schon bei *August* enthalten; vgl. Anm. 322.

415) Vgl. z. B. *C. le Paige*, Bull. belg. (3) 5 (1883), p. 25 und 85, wo diese Konstruktion angegeben wird. Er teilt die trilinearen Beziehungen in Klassen,

G. Castelnuovo[416]) hat die trilineare Beziehung auf einer räumlichen c_3 so erzeugt, daß er drei beliebige Sekanten a, b, c der c_3 wählt und einen Punkt P einer Ebene ε aus a, b, c resp. in die Punkte P_a, P_b, P_c von c_3 projiziert. Umgekehrt kann auch jede auf einer c_3 vorhandene trilineare Beziehung in dieser Weise erzeugt werden, wobei noch eine Sehne beliebig ist. *Castelnuovo* gibt Konstruktionen der trilinearen Beziehung auf der c_3, falls 1, 3, 5 Tripel und resp. 6, 4, 2 singuläre Punkte gegeben sind; er betrachtet außerdem eingehend solche Serien von ∞^1 Tripeln, die den Punkten einer g resp. eines c_2 in ε entsprechen, und leitet über sie eine Reihe von Sätzen ab.

G. Hauck[417]) hat metrische Relationen für die trilineare Verwandtschaft abgeleitet. Er erzeugt sie durch Projektion einer Ebene auf drei ihrer Geraden aus dreien ihrer Punkte. Auf der Geraden g gibt es einen Punkt P, der den Punkten P'_∞ und P''_∞ zugeordnet ist, ihren *Fluchtpunkt*, und es besteht für die Fluchtpunkte P, P', P'' und die singulären Punkte $ST, S'T', S''T''$ die Relation

$$SP : PT = S'P' : P'T' = S''P'' : P''T'' = \text{const.}$$

Diese Konstante nennt *Hauck* die *Charakteristik* der trilinearen Beziehung; durch sie und die 6 singulären Punkte ist die trilineare Beziehung bestimmt. Er hat insbesondere auch solche Fälle betrachtet, die speziellen einfachen Werten der Charakteristik entsprechen.

Wird jedem Punkt A von h die zwischen A' und A'' bestehende Projektivität $\mathfrak{P}$ zugeordnet, so werden dadurch die Elemente von h projektivisch auf den Büschel aller dieser Projektivitäten $\mathfrak{P}$ bezogen. Dieser Gesichtspunkt findet sich bei *F. London*[418]). Die singulären Elemente sind dann diejenigen, für welche die zugehörige $\mathfrak{P}$ ausartet; sie können übrigens auch zusammenfallen und zwar geschieht dies, wenn in der entsprechenden geradlinigen Lage g, g', g'' durch einen Punkt gehen; es tritt daher notwendig auf allen Trägern zugleich ein (*singuläres* Tripelfeld)[419]).

---

je nachdem die bezügliche zugehörige F_2 in eine F_1 und eine ε resp. in drei ε zerfällt. Eingehende Behandlung der Konstruktionen gibt auch *F. London*, vgl. das Zitat in Anm. 411.

416) Ist. Venet. Atti (6) 5 (1887), p. 1041. Er bezeichnet sie als *Homographie zweiter Art.* Vgl. auch *F. Aschieri*, Ist. Lomb. Rend. (2) 23 (1890), p. 312; *F. Deruyts*, Brüssel Soc. sc. (3) 17 (1889), p. 312.

417) Math. Ann. 44 (1894), p. 375.

418) Über eine von *Ch. Le Paige* eingeführte quadrilineare Verwandtschaft vgl. Nr. 10, Anm. 160.

419) J. f. Math. 108 (1891), p. 25. Über die von *Hauck* ausführlich behandelte trilineare Beziehung der Elementargebilde zweiter Stufe vgl. *E. Papperitz*, III A B 6.

Hat man auf denselben Trägern zwei trilineare Verwandtschaften (Tripelfelder), so bestimmen sie ein Büschel und es gibt ∞^1 Tripel, die allen Verwandtschaften des Büschels gemeinsam sind. *F. London* bezeichnet sie als *bikursale Tripelreihen*[420]), im Gegensatz zu den *unikursalen* Tripelreihen, die aus den Tripeln entsprechender Elemente dreier *projektiver* Grundgebilde bestehen. In jedem Tripelfeld gibt es zwei verschiedene Netze von je ∞^2 solcher *unikursalen* Tripelreihen, und es ist jede Reihe eines jeden Netzes durch zwei Tripel bestimmt; andererseits gehört zu irgend zwei Tripelreihen desselben Netzes stets *ein* gemeinsames Tripel, zu zwei Tripelreihen, die den beiden verschiedenen Netzen angehören, deren zwei. *F. London* hat auch die für die singulären Verwandtschaften auftretenden Ausnahmen dargelegt. Analog kann man drei Tripelfelder zugrunde legen, das von ihnen gebildete Netz betrachten usw.[421]). Für sie gibt es sechs gemeinsame Tripel, die in der Art voneinander abhängen, daß fünf das sechste *linear* bestimmen[422]).

Das auf die trilineare Verwandtschaft bezügliche Problem der Projektivität hat *H. Schubert*[423]) behandelt.

26. Die einfachsten quadratischen Verwandtschaften. Bereits in den systematischen Entwicklungen wurde *J. Steiner* auf geometrischem Wege[424]) auf die Existenz quadratischer Verwandtschaften $\mathfrak{V}_2$ geführt; er setzte je zwei Punkte P, P' zweier Ebenen ε und ε' entsprechend, die durch einen zwei feste Geraden schneidenden Strahl

420) Math. Ann. 44 (1894), p. 378. Jedes einzelne Element kann nämlich mit *zwei* Elementenpaaren ein Tripel bilden; bei den unikursalen Reihen gibt es nur ein solches Paar für jedes Element.

421) Läßt man g' mit g'' zusammenfallen, und ordnet dem A die Doppelpunkte der bezüglichen Punktreihen zu, so entsteht die einzweideutige Verwandtschaft; vgl. *B. Klein,* Theorie der trilinear symmetrischen Elementargebilde, Marburg 1881. *B. Klein* läßt schließlich alle Träger zusammenfallen, jedes Tripel sich dreifach entsprechen und nimmt als Träger einen c_2, alsdann entsteht eine involutorische Beziehung, die sich am einfachsten aus den Ecken von Dreiecken herstellen läßt, die einem anderen c_2 umgeschrieben sind, und die *Klein* als *trilinear symmetrisch* bezeichnet und zu Aufgaben dritten Grades verwendet. Vgl. auch Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 213.

422) Vgl. *F. London,* Math. Ann. 45 (1894), p. 545. Die Konstruktion des neunten Schnittpunktes zweier c_3 und des achten Schnittpunktes dreier F_2 läßt sich auf die Konstruktion des sechsten Tripels zurückführen.

423) Progr. Hamburg 1882.

424) Analytisch tritt die $\mathfrak{V}_2$ zuerst bei *J. Plücker* auf, J. f. Math. 5 (1829), p. 28, sowie bei *A. J. Magnus*, der sie freilich für die allgemeinste eineindeutige Punktverwandtschaft hielt, da er die Eineindeutigkeit von vornherein als Bestehen einer bilinearen Relation deutete, J. f. Math. 8 (1831), p. 51.

ausgeschnitten werden[425]) (*schiefe* Projektion). Er erkannte bereits, daß es in jeder Ebene drei *Hauptpunkte* (oder *Fundamentalpunkte*) gibt, denen in der anderen nicht ein Punkt, sondern eine ganze Gerade (*Hauptlinie* oder *Fundamental*linie) entspricht, daß einer Geraden g der einen Ebene ein c_2' entspricht, der dem Hauptdreieck umschrieben ist, und allgemein einer c_n eine c'_{2n}, die durch jeden Hauptpunkt $n$fach geht, und deren Ordnung sich um je zwei Einheiten erniedrigt, so oft die c_n durch einen Hauptpunkt ihrer Ebene geht. Auch der Satz, daß einem Strahlbüschel durch einen Hauptpunkt von ε in ε' ein projektiver Büschel entspricht, dessen Mittelpunkt ebenfalls ein Hauptpunkt ist, sowie einem beliebigen Strahlbüschel von ε in ε' ein projektiver c_2'-Büschel, ist bei ihm der Sache nach schon enthalten. Die *Steiner*sche Erzeugungsweise der $\mathfrak{V}_2$, die eine lineare Kongruenz mit zwei reellen Leitlinien zur Erzeugung benutzt, stellt übrigens, wie *E. Vessiot*[426]) zeigte, durchaus den allgemeinen Fall dar; sie liefert alle verschiedenen Typen der $\mathfrak{V}_2$, falls man die Leitlinien auch imaginär oder zusammenfallend wählt und unterscheidet, ob die Schnittlinie $(\varepsilon\varepsilon')$ von den Leitlinien geschnitten wird oder nicht.

Von anderen Erzeugungsweisen ist zunächst diejenige von *F. Seydewitz*[427]) zu erwähnen; er ordnet zwei Strahlenbüschel $S(a)$, $T(b)$ resp. $S'(a')$, $T'(b')$ beider Ebenen projektiv einander zu und jedem Schnittpunkt (ab) den Schnittpunkt $(a'b')$ der entsprechenden Strahlen. Er gab auch zuerst den Satz, daß die $\mathfrak{V}_2$ durch die Hauptpunkte und ein weiteres Paar P, P' eindeutig bestimmt ist[428]). Er benutzt die $\mathfrak{V}_2$ ausgiebig als Übertragungsprinzip, und betrachtet wesentlich besondere Fälle, z. B. den, daß die Büschel S, T resp. S', T' gleiche Büschel sind, wobei jeder g_∞ ein Kreis entspricht, sowie auch den Fall vereinigter Hauptpunkte.

Wird die Ebene ε reziprok auf die ineinander liegenden Ebenen ε' und ε'' bezogen, und dem Punkt P von ε der Schnittpunkt $P' = (p', p'')$ zugeordnet, so bilden die Paare P, P' ebenfalls eine $\mathfrak{V}_2$. Diese Er-

---

425) System. geom. Entwicklungen § 59 (Werke 1, p. 107 ff.). Vgl. auch *A. Transon*, Nouv. Ann. (2) 4 (1865), p. 385.

426) Bull. soc. math. 22 (1894), p. 209. Jede $\mathfrak{V}_2$ kann durch schiefe Projektion in Verbindung mit einer Perspektive vermittelt werden.

427) Arch. Math. Phys. 7 (1846), p. 136; 8 (1846), p. 1. Wenn dem gemeinsamen Strahl von S und T immer der gemeinsame Strahl von S' und T' entspricht, so geht die $\mathfrak{V}_2$ in die Kollineation über (Nr. 8). Die obige Definition der $\mathfrak{V}_2$ hat auch *G. Bauer* als fruchtbares Übertragungsprinzip benutzt, J. f. Math. 69 (1868), p. 293.

428) Vgl. auch *A. Hirst*, Nouv. Ann. (2) 5 (1866), p. 213.

zeugung erscheint zuerst bei *A. Jacobi*[429]), später bei *G. Battaglini*[430]) und *Th. Reye*[431]), die sie ausführlich erörtert haben. Da eine Korrelation durch 8 Paare konjugierter Punkte bestimmt ist, so zeigt dies unmittelbar, daß eine $\mathfrak{B}_2$ durch sieben Paare entsprechender Punkte bestimmt ist, und daß ihre Theorie mit der des Büschels von ∞^1 Korrelationen, für die diese Punktepaare konjugiert sind, eng zusammenhängt (Nr. **23**); die singulären Punkte der drei ausgearteten $\mathfrak{K}$ dieses Büschels sind die Hauptpunkte der $\mathfrak{B}_2$[432]). *Reye* erzeugte die $\mathfrak{B}_2$ auch so, daß er eine F_2 von zwei Punkten aus durch Bündel projizierte und diese durch Ebenen schnitt[433]). Liegen ε' und ε vereinigt, so gibt es ein Punktepaar, das sich in der $\mathfrak{B}_2$ doppelt entspricht; es besteht aus den Doppelelementen einer Involution, die aus den Punktepaaren gebildet ist, die für jede der ∞^1 Korrelationen in dieselbe feste Gerade fallen. Auch sonst sind zyklische Gruppen in jeder $\mathfrak{B}_2$ vielfach vorhanden[434]).

Eine involutorische $\mathfrak{B}_2$ wurde der Sache nach schon von *G. Bellavitis*[435]) aufgestellt, später wurde sie in ausführlicher Form von *A. Hirst*[436]) und *F. Geiser*[437]) erörtert. *Th. Reye*[438]) konstruiert sie,

---

429) J. f. Math. 23 (1842), p. 243 u. 31 (1846), p. 76.

430) Giorn. di mat. 1 (1863), p. 321 und Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 280. Vgl. auch *A. Voß*, ebenda 17 (1872), p. 375 und *H. Milinowski*, J. f. Math. 79 (1874), p. 140, die die analoge $\mathfrak{B}_2$ zwischen den Punkten von ε und den Geraden von ε' untersuchten. Bei *Milinowski* ist irrigerweise nur von einer so bestimmten $\mathfrak{B}_2$ die Rede.

431) Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 280. Die *Reye*sche Erzeugung ist umkehrbar. Haben zwei in $\mathfrak{B}_2$ stehende Bündel sieben Paare entsprechender Strahlen, die sich schneiden, so tun es alle und sie erzeugen eine F_2. Vgl. *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1882), p. 470, wo auch der Zusammenhang mit dem Problem der Projektivität und anderen Problemen der abzählenden Geometrie ausführlich erörtert wird. Die Konstruktion aus sieben Punktepaaren findet sich zuerst bei *H. Schröter*, J. f. Math. 62 (1863), p. 224; vgl. auch *F. London*, Math. Ann. 38 (1891), p. 334.

432) *A. Hirst*, London Math. Soc. Proc. 5 (1873), p. 40. Dort findet man die Theorie auf Grund der abzählenden Methoden behandelt.

433) Vgl. auch *G. Darboux*, Bull. soc. phil. 5 (1868), p. 72.

434) Vgl. *S. Kantor*, Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 64, sowie *A. Hirst*, Quart. Journ. 17 (1881), p. 301. Die Resultate selbst hatte er schon auf der British Assoc. for the Adv. of Sc. Birmingham 1865 mitgeteilt.

435) Padua Ac. Nuovi Saggi 4 (1838).

436) London Roy. Soc. Proc. 14 (1865), p. 92. *Hirst* gibt in ihr eine ausführliche Erörterung der einander entsprechenden Kurven und ihrer Eigenschaften.

437) Bern Naturf. Ges. Mitt. 1865.

438) Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 299. Der oben erwähnte Fall tritt auch bei *F. Seydewitz* auf, Arch. Math. Phys. 5 (1844), p. 225; vgl. auch *G. G.*

indem er bei vereinigter Lage von drei Ebenen ε, ε' und ε'' die beiden ebenen Felder ε' und ε'' je als Polarsystem zu ε annimmt. Das gemeinsame Diagonaldreieck der beiden zugehörigen c_2' und c_2'' ist alsdann das Hauptdreieck; in ihm entspricht entweder *jeder* Punkt der Gegenseite, oder aber nur *ein* Punkt der Gegenseite und die beiden anderen den Seiten, auf denen sie liegen[439]). *A. del Re*[440]) hat eine reziproke quadratische Nullverwandtschaft aufgestellt; er erzeugt sie, indem er von einem Büschel $S(a)$ und einer dazu projektiven Punktreihe $u(A)$ ausgeht und jedem Punkt P von a die Gerade PA zuordnet[441]).

Die Ausartungen der quadratischen Verwandtschaft hat *H. Schubert*[442]) behandelt.

Für zwei vereinigte quadratische Verwandtschaften gilt der Satz, daß, wenn sie fünf gemeinsame Punktepaare besitzen, auch noch *ein* sechstes existiert; haben sie sechs gemeinsame Paare beliebiger Lage, so gibt es noch ∞^1 andere, die ihnen ebenfalls gemeinsam sind[443]). Denkt man sich die beiden $\mathfrak{V}_2$ dadurch definiert, daß man ε reziprok auf ε' und ε'' resp. auf ε'' und ε''' bezieht, so folgt das obige sechste Paar aus dem von *A. Clebsch* gefundenen Theorem über ein Netz von ∞^3 Korrelationen (Nr. 24), mit dem der Satz identisch ist.

---

de Longchamps, Nouv. Ann. (2) 5, p. 119; *J. J. A. Mathieu*, ebenda 4 (1865), p. 393, 481, 529.

439) Vgl. *B. Igel*, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 516; *J. Neuberg*, Mathesis 8 (1888), p. 177, sowie *P. H. Schoute*, Assoc. franç. Blois (1884).

440) Napoli Rendic. (2) 3 (1889), p. 101.

441) Eine besondere Erzeugung der $\mathfrak{V}_2$ gab *F. Nicoli*, Modena Mem. (2) 7, p. 253.

442) Hamburg Mitt. 1 (1882), p. 31.

443) *E. Duporcq*, Paris C. R. 126 (1898), p. 1405. Die Sätze haben für die Kinematik wichtige Bedeutung (*Schoenflies* IV A 3, Nr. 8ff.).

(Abgeschlossen im Januar 1909.)

III AB 5a. KONFIGURATIONEN DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE.

VON

ERNST STEINITZ

IN BERLIN.

Inhaltsübersicht.

1. Definitionen. Ist in der Ebene ein Punkt P und eine Gerade g gegeben, so unterscheidet die projektive Geometrie bezüglich der Lage dieser Elemente nur zwei Fälle: die spezielle *inzidente* Lage, bei welcher P auf g liegt, und die allgemeine *nicht-inzidente*. Hat man ein System von Punkten und Geraden der projektiven Ebene, so kann man in demselben Sinne die Gruppierung dieser Elemente als gegeben betrachten, wenn die zwischen ihnen statthabenden Inzidenzen gegeben sind. Zwei Systeme von Elementen haben hiernach *dieselbe Gruppierung,* wenn die Punkte und Geraden des einen auf die Punkte und Geraden des andern in der Weise ein-eindeutig bezogen werden können,

daß inzidenten Elementen wieder inzidente entsprechen. Diese Möglichkeit liegt z. B. stets dann vor, wenn das eine System durch eine Kollineation in das andere übergeführt werden kann; doch ist die Existenz einer solchen Kollineation für die Gleichartigkeit der Gruppierung nicht notwendig. Analog bezeichnet der Ausdruck „*reziprok*" nur die Möglichkeit einer eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten und Geraden des einen Systems und den Geraden und Punkten des andern, bei welcher inzidenten Elementen wieder inzidente entsprechen.

Als ebene *Konfiguration* wird eine Gruppierung von Punkten und Geraden der Ebene dann bezeichnet, wenn jeder Punkt mit gleich vielen Geraden, jede Gerade mit gleich vielen Punkten inzident ist. Man legt der Konfiguration das Symbol (p_γ, g_π) bei, wenn sie p Punkte, g Geraden enthält, durch jeden Punkt γ Geraden gehen und auf jeder Geraden π Punkte liegen[1]). Es ist $p \cdot \gamma = g \cdot \pi$. Im Falle $p = g = n$, $\pi = \gamma = \varkappa$ ist das einfachere Zeichen $n_\varkappa$ gebräuchlich[2]). Analog versteht man unter einer räumlichen Konfiguration $(A_b{}^{\mathfrak{c}}, B_a{}^{\gamma}, C_{\mathfrak{a}}{}^{\beta})$ eine Gruppierung von A Punkten, B Geraden, C Ebenen des projektiven R_3, bei welcher jeder Punkt mit b Geraden und $\mathfrak{c}$ Ebenen, jede Gerade mit a Punkten und γ Ebenen, jede Ebene mit $\mathfrak{a}$ Punkten und β Geraden inzident ist[3]). Es werden indessen nicht immer alle drei Arten von Elementen in Betracht gezogen.

Verschiedene Erweiterungen des Begriffs Konfiguration liegen auf der Hand: erstens können die Untersuchungen auf mehrdimensionale Räume ausgedehnt werden, ferner kann man statt der Punkte, Geraden, Ebenen andere Arten von Elementen, statt der Inzidenz eine andere spezielle Lagenbeziehung einführen, z. B. in der Ebene Konfigurationen von Geraden und Kegelschnitten betrachten, bei denen jede Gerade dieselbe Anzahl von Kegelschnitten, jeder Kegelschnitt dieselbe Anzahl von Geraden berührt. Doch soll, wo nichts anderes bemerkt, die Bezeichnung Konfiguration in dem zuerst angegebenen Sinne gebraucht werden.

Die Punkte, Geraden, Ebenen einer Konfiguration heißen ihre *Elemente.* Neben diesen spielen in den Untersuchungen noch die *Diagonalen, Diagonalebenen, Diagonalpunkte* eine Rolle, d. h. diejenigen Geraden, Ebenen, Punkte, welche, ohne selbst Konfigurationselemente zu sein, sich unmittelbar durch Verbindung oder als Schnitt solcher Elemente ergeben.

---

1) *J. de Vries*, Acta math. 12 (1888), p. 63.
2) *Th. Reye,* Acta math. 1 (1882), p. 94.
3) *J. de Vries,* Wiener Ber. 100 (1891), p. 822.

Diejenigen Permutationen der Konfigurationselemente, welche Punkte in Punkte, Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen, inzidente Elemente in inzidente überführen, bilden *die zur Konfiguration gehörige Gruppe*[4]). Dieselbe kann, wenn die Konfiguration zu sich selbst reziprok ist, durch Hinzunahme der *reziproken Beziehungen* zu einer Gruppe von doppelter Ordnung erweitert werden. Insofern man allein die Permutationen der Punkte oder Geraden oder Ebenen betrachtet, kann mau von zwei bzw. drei Gruppen sprechen, die aber in allen in Betracht kommenden Fällen holoedrisch isomorph sind. Elemente, welche durch die Permutationen ineinander übergehen, heißen *gleichberechtigt*. Sind alle Elemente der einen Art, etwa alle Punkte gleichberechtigt, ist also ihre Gruppe transitiv, so folgt noch keineswegs dasselbe für die andern Gruppen[5]). Sind alle Gruppen transitiv, so heißt die Konfiguration *regelmäßig*[6]).

Das Symbol (p_γ, g_π) bzw. $(A_b{}^c, B_a{}^\gamma, C_a{}^\beta)$ wird zur Charakterisierung einer bestimmten Konfiguration im allgemeinen nicht ausreichen. Bei den Konfigurationen, welche nur zwei Arten von Elementen enthalten, z. B. den ebenen Konfigurationen, bedient man sich in der Regel folgender Bezeichnung. Man führt für die Elemente der einen Art Zeichen ein und ordnet diese in Kolonnen an, deren jede ein Element der andern Art darstellt, indem sie die Zeichen der mit ihm inzidenten Elemente enthält. So kann z. B. das Schema

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	6	5	8	7	7	8	5	6	8	7	6	5
9	9	9	9	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12

zur Bezeichnung einer ebenen $(12_4, 16_3)$ oder auch $(16_3, 12_4)$ dienen, je nachdem die Ziffern Punkte oder Geraden darstellen. Das Schema einer ebenen Konfiguration muß offenbar so beschaffen sein, daß alle Kolonnen gleich viele und voneinander verschiedene Zeichen enthalten, daß ferner jedes Zeichen in gleich vielen Kolonnen auftritt, zwei Kolonnen aber niemals mehr als ein Zeichen gemein haben. Häufig wird der Name Konfiguration, besser *schematische Konfiguration*, auch für jedes Schema gebraucht, das solchen Bedingungen genügt, gleichviel ob es geometrisch realisierbar ist oder nicht.

---

4) *A. Schoenflies*, Math. Ann. 31 (1888), p. 48.

5) Ebene Konfigurationen, bei denen alle Punkte gleichberechtigt sind, während verschiedenartige Geraden auftreten, wurden wohl zuerst von *J. de Vries* bemerkt; Acta math. 12 (1888), p. 75.

6) *A. Schoenflies* l. c.[4]).

2. Historisches. Reyes Problem der Konfigurationen. Untersuchungsmethoden. Wenn man von trivialen Fällen absieht, so sind zwei ebene Konfigurationen seit langer Zeit allgemein bekannt: 1) die *Desargues*sche Konfiguration 10_3, bestehend aus zwei perspektiven Dreiecken, den drei Schnittpunkten homologer Seiten, den drei Verbindungsgeraden homologer Ecken, dem Zentrum und der Achse der Perspektivität; 2) die *Pascal*sche Konfiguration 9_3, bestehend aus einem *Pascal*schen Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen, diesen beiden Geraden, den drei Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten des Sechsecks und der *Pascal*schen Geraden, welche die drei Schnittpunkte verbindet. — Daß die Ähnlichkeitspunkte von 4 Kugeln mit den Geraden und Ebenen, auf denen sie zu je 3 bzw. 6 liegen, eine Konfiguration $(12_4^6, 16_3^3, 12_6^4)$ bilden, bemerkte *J. V. Poncelet*[7]). *J. Steiner*[8]) zeigte, daß die 27 Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung, ihre Schnittpunkte und die Ebenen, welche 3 von den Geraden enthalten, eine Konfiguration $(135_2^9, 27_{10}^5, 45_{27}^3)$ bilden, daß man aus dieser eine Konfiguration $(135_{16}^9, 720_3^2, 45_{27}^{32})$ erhält, wenn man die 27 Geraden durch die Diagonalen ersetzt, nach welchen sich die 45 Ebenen der ersten Konfiguration schneiden. Zu der Erkenntnis einer ausgedehnten Klasse von Konfigurationen war jedoch schon 1845 *A. Cayley*[9]) gelangt. Seine Arbeit wurde indessen wenig beachtet, und als *Th. Reye* die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf jene merkwürdigen Gruppierungen lenkte[10]), für die er den Namen Konfiguration einführte, wurden die *Cayley*schen Konfigurationen (Nr. 7) durch *S. Kantor*, *H. Schubert*, *G. Veronese* und andere wieder entdeckt. *Reye* schlägt ein systematisches Studium der Konfigurationen vor. Sein *Problem der Konfigurationen* verlangt vor allem die Ermittelung aller zu den verschiedenen Symbolen (p_γ, g_π) bzw. $(A_b^c, B_a^\gamma, C_a^\beta)$ gehörigen Konfigurationen. Um diese Aufgabe für einen bestimmten Fall näher ins Auge zu fassen, beschränken wir uns auf die ebenen Konfigurationen. Der sich zunächst darbietende Weg, um alle zu einem bestimmten Symbol (p_γ, g_π) gehörigen Konfigurationen zu erhalten, ist der, daß man von der Aufstellung aller möglichen schematischen Konfigurationen ausgeht und dann untersucht, ob sich dieselben geometrisch realisieren lassen. Was den zweiten Teil der

---

7) Traité des propriétés projectives des figures, Paris (1822), p. 409.

8) J. f. Math. 53 (1857), p. 135 = Werke 2, p. 651.

9) J. f. Math. 31 (1846), p. 218 = Coll. math. Papers 1, p. 317.

10) Zuerst in seiner *Geometrie der Lage* I, 2. Aufl. (1876), p. 4. Die Bezeichnung *Konfiguration* umfaßt zuerst nur diejenigen räumlichen (ebenen) Gebilde, für welche die Anzahl der Punkte gleich der der Ebenen (Geraden) ist.

Aufgabe betrifft, so ist zunächst festzusetzen, was man unter geometrischer Existenz bei Konfigurationen versteht. Am natürlichsten dürfte die Forderung sein, daß die geometrische Konfiguration p *verschiedene* Punkte, g *verschiedene* Geraden enthält, und daß auch *nur* solche Inzidenzen zwischen ihnen statthaben, welche das Schema vorschreibt. Diesen Umständen tragen die den schematischen Konfigurationen auferlegten Bedingungen nur zum Teil Rechnung. Berücksichtigt man, daß bei der Konstruktion 4 Punkte, von denen den Bedingungen der Konfiguration gemäß keine 3 in einer Geraden liegen, willkürlich angenommen werden dürfen (wofern die Konfiguration überhaupt geometrisch existieren soll), daß ferner die vorgeschriebenen Inzidenzen $p\gamma = g\pi$ Bedingungen darstellen, denen gemäß die übrigen $p + g - 4$ Elemente zu wählen sind, so erkennt man, daß im Falle $2(p+g) - p\gamma - 8 < 0$, falls zwischen den Inzidenzbedingungen nicht Abhängigkeiten in genügender Anzahl stattfinden, die Konfiguration geometrisch nicht realisierbar ist. Die Vermutung, daß solche Abhängigkeiten nur in einer Minderzahl von Fällen auftreten, wird durch die Prüfung der Konfigurationen mit einer kleinen Anzahl von Elementen verstärkt. Es darf als wahrscheinlich gelten, daß unter allen schematischen Konfigurationen (p_γ, g_π), bei denen $2(p+g) - p\gamma - 8 < 0$ ist, nur ein verschwindend kleiner Teil geometrisch herstellbar ist. Die vom Schema ausgehende Behandlung scheint daher in größerem Umfange nur zweckmäßig bei denjenigen Klassen von Konfigurationen, deren Indizes die Ungleichung $2(\pi + \gamma) - \pi\gamma > 0$ erfüllen. Ähnliches gilt für die räumlichen Konfigurationen.

Demgemäß hat sich auch die Literatur über Konfigurationen gestaltet. Die meisten Arbeiten knüpfen an einzelne Konfigurationen an, auf welche geometrische Untersuchungen irgendwelcher Art geführt haben. Man untersucht die Umstände, welche das Zustandekommen der Konfigurationen bewirken und gelangt hiernach oft durch Verallgemeinerung zu einer ganzen Klasse verwandter Konfigurationen. Es handelt sich dabei fast ausschließlich um regelmäßige Konfigurationen. Zahlreich sind die Methoden, um aus einer Konfiguration andere herzuleiten[11]), es kann hier nur kurz darauf eingegangen werden. Durch Fortlassung von Konfigurationselementen wird man häufig zu weiteren Konfigurationen geführt. Dabei sind lediglich Überlegungen kombinatorischer Art auszuführen, indem die Betrachtung des Schemas der Konfiguration schon die in ihr enthaltenen Konfigurationen zeigt.

---

11) Besondere Methoden dieser Art wurden von *K. Zindler* ausgebildet; Wiener Ber. 105 (1896), p. 311.

In dieser Hinsicht hat namentlich *J. de Vries* die *Cayley*schen Konfigurationen untersucht[12]). Doch ist zu beachten, daß, wenn auch die ursprüngliche Konfiguration allgemein konstruiert worden ist, so daß also durch Variation der bei der Konstruktion willkürlich angenommenen Elemente jede Konfiguration derselben Art erhalten werden kann, die abgeleitete nicht allgemein zu sein braucht. Was ferner die Herleitung komplizierterer Konfigurationen aus einfacheren durch Hinzufügen von Elementen anlangt, so sei nur bemerkt, daß hier für die ebenen Konfigurationen namentlich der Zusammenhang mit Kurven dritter Ordnung, für die räumlichen der Zusammenhang mit den endlichen Gruppen von Kollineationen und Korrelationen von Bedeutung ist. Endlich können aus einfacheren Konfigurationen in mehrdimensionalen Räumen durch die Methode des Projizierens und Schneidens kompliziertere Konfigurationen in Räumen von geringerer Dimensionenzahl hergeleitet werden. Allen diesen Untersuchungen gegenüber nehmen diejenigen, welche sich mit der schematischen Herleitung aller zu einem gegebenen Symbol gehörigen Konfigurationen beschäftigen, nur einen geringen Umfang ein. Sie beschränken sich in der Ebene fast ausschließlich auf die Konfigurationen n_3. Nach obigem würden auch noch die Konfigurationen mit den Indizes $\gamma = 3$, $\pi = 4$ oder 5; $\gamma = 4$ oder 5, $\pi = 3$ eine ähnliche Behandlung zulassen.

3. Schematische Bildungsweise der ebenen Konfigurationen n_3
Jeder Punkt einer Konfiguration n_3 ist noch mit 6 anderen durch eine Konfigurationsgerade verbunden, n kann also nicht < 7 sein. Für $n = 7$ erhält man *eine* schematische Konfiguration, ebenso für $n = 8$. *S. Kantor*, welcher zuerst die systematische Aufsuchung aller zu einem gegebenen n gehörigen Konfigurationen n_3 in Angriff nahm, zeigte noch, daß es 3 Konfigurationen 9_3 und 10 Konfigurationen 10_3 gibt[13]). Sein Beweis wurde durch *H. Schroeter* ergänzt[14]). Erledigt wurden ferner noch die Fälle $n = 11$ und $n = 12$, welche 31 bzw. 228 Konfigurationen liefern[15]). Während für $n \leqq 10$ jede Konfiguration n_3 zu sich selbst reziprok ist, ist dies bei den Konfigurationen 11_3 nicht mehr der Fall. Eine allgemeine Methode, um aus den Konfigurationen $(n-1)_3$ die Konfigurationen n_3 herzuleiten, gab *V. Martinetti* an: Man greife aus einer Konfiguration $(n-1)_3$ zwei Geraden ABC und

12) Math. Ann. 34 (1889), p. 227; 35 (1890), p. 401.

13) Wien. Ber. 84, 2 (1881), p. 915, 1291.

14) Göttinger Nachr. (1889), p. 193.

15) Den Fall $n = 11$ erledigte *V. Martinetti* im Anschluß an seine im Texte auseinandergesetzten Untersuchungen: Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 1. *R. Daublebsky v. Sterneck* gab die Konfigurationen 12_3 an: Monatsh. Math. 6 (1895), p. 223.

$A_1B_1C_1$ ohne gemeinsamen Punkt heraus. Punkt A kann nicht mit A_1, B_1, C_1 zugleich durch Konfigurationsgeraden verbunden sein. Ist nun A mit A_1 nicht verbunden, so ersetze man in dem Schema die Kolonnen ABC und $A_1B_1C_1$ durch A_2BC, $A_2B_1C_1$ und AA_1A_2, wo A_2 einen neuen Punkt bezeichnet. Dann hat man das Schema einer Konfiguration n_3. Je nachdem eine Konfiguration n_3 durch diesen Prozeß aus irgendeiner Konfiguration $(n-1)_3$ abgeleitet werden kann oder nicht, nennt *Martinetti* sie *reduzibel* oder *irreduzibel*. Es gelingt ihm nun, die irreduziblen Konfigurationen n_3 vollständig anzugeben. Es gibt zwei Klassen irreduzibler Konfigurationen n_3, von denen die erste für jedes n, die zweite für jedes $n = 10m$ eine Konfiguration enthält. Die Konfigurationen der ersten Klasse werden durch das Schema

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 \ldots & n-2 & n-1 & n & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \ldots & n & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

als *sich selbst regelmäßig ein und umbeschriebene n-Ecke* charakterisiert. Die der zweiten werden aus $2m$ Dreiecken $D_1, D_2, \ldots D_{2m}$ erhalten, deren Ecken einander in bestimmter Weise zugeordnet sind, und von denen jedes mit dem folgenden, das letzte mit dem ersten perspektive Lage hat. Die Konfiguration enthält außer den Dreiecken noch von den Dreieckspaaren D_1D_2; D_3D_4; ...; $D_{2m-1}D_{2m}$ die Verbindungsgeraden homologer Punkte, sowie die Perspektivitätszentren, von den Dreieckspaaren D_2D_3; D_4D_5; ...; $D_{2m}D_1$ die Schnittpunkte homologer Seiten und die Perspektivitätsachsen. Für $n = 10$ hat man die *Desargues*sche Figur. Außerdem gibt es nur noch 3 irreduzible Konfigurationen: die *Pascal*sche Konfiguration 9_3 und zwei unter den Konfigurationen 10_3. Bei dem von *Martinetti* angegebenen Verfahren wird man natürlich im allgemeinen eine und dieselbe Konfiguration mehrmals erhalten. Unter den Mitteln, welche die Prüfung der Identität erleichtern, ist die von *Kantor* eingeführte Betrachtung der *Restfiguren*[16]) hervorzuheben. Unter der Restfigur eines Konfigurationspunktes P versteht *Kantor* die Gesamtheit der mit P nicht verbundenen Konfigurationspunkte nebst den diese verbindenden Konfigurationsgeraden. Es gibt 2 verschiedene Restfiguren für $n = 9$, 3 für $n = 10$, 6 für $n = 11$, 18 für $n = 12$. Die Gesamtheit der zu den Punkten einer Konfiguration gehörigen Restfiguren bildet das *Restsystem* der Konfiguration. Zur Identität zweier Konfigurationen ist natürlich die Gleichheit der Restsysteme erforderlich. Indessen zeigt *Martinetti*, daß schon bei den Konfigurationen 11_3 die Betrachtung

16) l. c.[13]) p. 1298.

der Restfiguren nicht ausreicht, indem verschiedene Konfigurationen mit gleichen Restsystemen auftreten[17]).

Ein System von einfachen Polygonen mit insgesamt n Ecken, welches im allgemeinsten Sinne sich selbst ein- und also auch umbeschrieben ist, so daß also jede Seite irgendeines Polygons außer den ihr zugehörigen Ecken noch eine Ecke desselben oder eines andern Systempolygons enthält, stellt eine Konfiguration n_3 dar. Umgekehrt gilt, daß jede Konfiguration n_3 sich (auf mannigfache Weise) als ein derartiges System von Polygonen auffassen läßt[18]). Es beruht dies auf der Möglichkeit, in dem Schema der Konfiguration die Elemente innerhalb der einzelnen Kolonnen so anzuordnen, daß jede Horizontalreihe alle Elemente umfaßt. *Kantor* zeigte, daß für $n \leqq 10$ jede Konfiguration n_3 durch ein einziges Polygon dargestellt (in einem einzigen geschlossenen Zuge durchlaufen) werden kann. Dieser Satz gilt auch noch für $n = 11$, aber, einer Angabe *Kantors* entgegen, nicht für alle Konfigurationen n_3. Man kann vielmehr, wie groß auch die Zahl k angenommen werde, stets Konfigurationen n_3 angeben, welche sich nicht in weniger als k Polygone auflösen lassen[19]).

A. Schoenflies hat die Aufstellung der regelmäßigen Konfigurationen n_3 in Angriff genommen[20]). Er teilt dieselben nach der Anzahl α der Konfigurationsdreiecke ein, welche einen gegebenen Konfigurationspunkt zur Ecke haben. Die Untersuchung ergibt zunächst diejenige oben angegebene Klasse irreduzibler Konfigurationen, deren es für jedes n eine gibt; die zugehörigen Werte von α sind 12 für $n = 7$, 9 für $n = 8$, 8 für $n = 9$, 6 für $n \geqq 10$. Mit diesen Konfigurationen sind alle diejenigen regelmäßigen Konfigurationen erschöpft, in denen die 3 Punkte einer Konfigurationsgeraden mit einem und demselben vierten Konfigurationspunkte durch Konfigurationsgeraden verbunden sind. Außer den genannten gibt es nur noch 2 regelmäßige Konfigurationen, für welche $\alpha = 6$ ist: die *Desargues*sche und die *Pascal*sche; bei allen andern ist $\alpha \leqq 4$. Während so der Fall $\alpha = 5$ nicht vorkommt, kann α jeden der Werte 4, 3, 2, 1, 0 haben[21]). Die Erledigung der Fälle $\alpha = 4$ und $\alpha = 3$ führt auf Cyklen von Polygonen, die einander regelmäßig ein- und umbeschrieben sind. Es werden im Anschluß daran alle derartigen Konfigurationen

17) Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 26.

18) *V. Martinetti* l. c.[17]) p. 2. Beweis bei *E. Steinitz*, Diss. Breslau (1894), p. 7.

19) *E. Steinitz*, Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 293.

20) Math. Ann. 31 (1888), p. 43.

21) Die Angabe bei *Schoenflies*, daß der Fall $\alpha = 1$ nicht vorkommt, beruht auf einem Irrtum; s. *E. Steinitz*, Arch. f. Math. u. Phys. (3) 16 (1910), No. 28, p. 311.

und die zugehörigen Permutationsgruppen aufgestellt. Abgesehen von denjenigen Konfigurationen, die sich als ein einziges sich selbst regelmäßig ein- und umbeschriebenes Polygon auffassen lassen, hat man zwei Klassen zu unterscheiden, welche folgende Eigenschaften gemein haben: Sind $P_0, P_1, \ldots P_q$ die Polygone ($(p+1)$-Ecke), $E_{i0}, E_{i1}, \ldots E_{ip}$ die (geordneten) Ecken von P_i, so enthält allgemein die Seite $E_{ik}E_{i,k+1}$ von P_i die Ecke $E_{i+1,k\cdot l}$, wo der zweite, die Nummer der Ecke innerhalb des Polygons angebende Index von E modulo $p+1$ zu nehmen ist, und l eine, ebenso wie p und q festgewählte, von i und k unabhängige Zahl ist, die zu $p+1$ relativ prim sein muß. Dies gilt für $i = 0, 1, \ldots q-1$. Bei den Polygonen der ersten Klasse liegt nun auf der Seite $E_{q,k}E_{q,k+1}$ von P_q die Ecke $E_{0,r+kl}$, und es bestehen die Beziehungen $r(l-1) \equiv 0$, $l^{q+1} \equiv 1 \pmod{p+1}$; bei der zweiten Klasse liegt auf der Seite $E_{q,k}E_{q,k+1}$ der Punkt $E_{0,r-kl}$, und es bestehen die Beziehungen $(r-1)(l-1) \equiv 1$, $l^{q+1} \equiv -1 \pmod{p+1}$, deren Notwendigkeit man leicht erkennt. Es kommt auch der Fall vor, daß eine Konfiguration sowohl als zur ersten wie zur zweiten Klasse gehörig aufgefaßt werden kann. Mit diesen Konfigurationen sind nicht alle regelmäßigen Konfigurationen n_3 erschöpft.

Es sei noch folgendes bemerkt: Wenn in einer Konfiguration n_3 alle Punkte gleichberechtigt sind und n nicht durch 3 teilbar ist, so ist die Konfiguration regelmäßig. Dagegen kann es für $n = 3m$ vorkommen, daß 2 oder 3 verschiedene Arten von Geraden auftreten. Auch unter den regelmäßigen Konfigurationen n_3 gibt es solche, die nicht zu sich reziprok sind.[22])

4. Geometrische Eigenschaften der Konfigurationen n_3. Die Konfiguration 7_3 ist geometrisch nicht ausführbar. Die Konfiguration 8_3 kann aufgefaßt werden als ein System von zwei einander ein- und umbeschriebenen Vierecken. Daß ein solches System nicht vollständig reell sein kann, zeigte schon *Möbius*[23]), doch existiert eine imaginäre Konfiguration, welche dem Schema entspricht. Ihre 4 Diagonalen schneiden sich in einem Punkte. Fügt man diesen und die Diagonalen zu der Konfiguration 8_3, so hat man die Konfiguration $(9_4, 12_3)$[24]) (s. Nr. 5). Die 3 Konfigurationen 9_3 existieren sämtlich reell[24]). Von den 10 Konfigurationen 10_3 existieren nur 9 geometrisch[25]), während

22) *E. Steinitz* l. c.[21]) No. 24—27, p. 308—310.

23) J. f. Math. 3 (1828), p. 276 = Werke 1, p. 437.

24) *S. Kantor,* l. c.[13]). — *H. A. Schwarz*, der die dritte (unregelmäßige) Konfiguration 9_3 eingehend behandelt, konstruiert eine besondere Form derselben, die bei Drehung um 120° in sich übergeht, Berliner Ber. 1910.

25) *H. Schroeter*, Göttinger Nachr. (1889), p. 193.

die Konfigurationen 11_3 wieder sämtlich geometrisch, und zwar reell konstruierbar sind. Anscheinend ist dies für alle Konfigurationen n_3, $n > 10$ der Fall; doch ist diese Frage noch nicht entschieden. Was nun die Konstruktion selbst betrifft, so zog bereits *Martinetti* aus der Auflösbarkeit der Konfigurationen n_3 in Systeme von Polygonen den Schluß, daß dieselbe stets auf die Aufgabe der Ermittelung der Doppelelemente inzidenter projektiver Punktreihen zurückgeführt, also mit Zirkel und Lineal geleistet werden könne[26]). Viele Konfigurationen n_3 lassen sich indes auch linear konstruieren. So die 3 Konfigurationen 9_3, sowie allgemeiner alle diejenigen, welche sich als Cyklen von Dreiecken auffassen lassen, deren jedes dem folgenden umbeschrieben ist, ferner die irreduziblen Konfigurationen der zweiten Klasse, einige Konfigurationen 10_3, 11_3 usf. Ist eine allgemeine lineare Konstruktion nicht möglich, so werden doch in vielen Fällen spezielle Konfigurationen der vorgeschriebenen Art linear ausführbar sein. Derartige Konstruktionen, welche sich auf bekannte Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung stützen, wurden zuerst von *Schroeter* für die irreduziblen Konfigurationen der ersten Klasse, sodann für die Konfigurationen 10_3 angegeben[27]). Die *Schroeter*sche Methode läßt sich derartig erweitern, daß sie für die meisten Konfigurationen n_3 Anwendung findet[28]).

5. Ebene Konfigurationen auf Kurven dritter Ordnung. Zahlreiche Konfigurationen (p_γ, g_π) können einer C_3 einbeschrieben sein. So gibt es unter den n-Ecken, die der C_3 zugleich ein- und umbeschrieben sind (III C 5, p. 502, *G. Kohn*) viele, deren Ecken Punkte einer Konfiguration n_3 bilden. *A. Schoenflies* fand, daß die meisten der von ihm angegebenen regelmäßigen Konfigurationen n_3 auf einer C_3 vorkommen[29]). Besonders bemerkenswert sind solche Konfigurationen, durch deren Punkte notwendig eine C_3 hindurchgehen muß. Natürlich kommt hierbei nur der Fall in Betracht, daß die Zahl der Konfigurationspunkte > 9 ist. Von den Konfigurationen mit 9 Punkten sind aber noch diejenigen hier von Interesse, durch deren Punkte ein C_3-Büschel hindurchgeht. Es sind dies die Konfigurationen $(9_4, 12_3)$[30]) und die *Pascal*sche Konfiguration 9_3. Alle Konfigurationen $(9_4, 12_3)$ sind untereinander kollinear. Die vier durch einen Punkt gehenden

26) l. c.[17]).

27) l. c.[25]) und Göttinger Nachr. (1888), p. 237.

28) *E. Steinitz*, Diss. Breslau (1894).

29) Gött. Nachr. (1889), p. 334. Man sehe auch die III C 5 (*G. Kohn*), Anm. 178, 179 angegebene Literatur.

30) s. III C 5, Nr. 16 ff.

Geraden bilden einen äquianharmonischen Wurf. Die Kurven C_3, welche durch die Punkte einer Konfiguration $(9_4, 12_3)$ hindurchgehen, haben in ihnen ihre Wendepunkte. Die Konfiguration kann nicht vollständig reell sein. Sie besitzt 12 Diagonalpunkte, welche zusammen mit den 12 Konfigurationsgeraden 4 Dreiecke D bilden. Je 2 dieser Dreiecke sind auf sechsfache Weise perspektiv, die Zentren und Achsen dieser Perspektivitäten werden von den Ecken und Seiten der beiden übrigen Dreiecke gebildet. Die Figur dieser 4 Dreiecke ist zu sich selbst korrelativ: Wie ihre Seiten mit ihren Schnittpunkten eine Konfiguration $(9_4, 12_3)$ bilden, so liegen ihre Ecken zu je 4 auf 9 Geraden und bilden mit ihnen zusammen eine Konfiguration $(12_3, 9_4)$[31]).

Die Punkte der *Pascal*schen Konfiguration lassen sich durch A_i, B_i, $C_i (i = 0, 1, 2)$ derart bezeichnen, daß je drei Punkte $A_i B_k C_l$ in einer Geraden liegen, falls $i + k + l$ durch 3 teilbar ist. Die Punkte und Diagonalen der Konfiguration bilden 3 Dreiecke A, B, C (A mit den Ecken A_0, A_1, A_2 usf.), von denen je zwei dreifach perspektiv sind. Die Perspektivitätszentren sind die Ecken des dritten[32]). Da die Konfiguration zu sich selbst reziprok ist, so gilt Entsprechendes für die Konfigurationsgeraden. Von der zweiten regelmäßigen Konfiguration 9_3 bemerkt *S. Kantor*, daß ihre Punkte und Diagonalen ein Neuneck bilden, welches der durch die Punkte bestimmten C_3 zugleich umbeschrieben ist[33]).

Unter den ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ gibt es zwei, deren Punkte in Quadrupel unverbundener zerfallen. *J. de Vries* bezeichnet sie mit $(12_4, 16_3)A$ und $(12_4, 16_3)B$[34]). $(12_4, 16_3)A$ ist die *Hesse*sche Konfiguration (Nr. 8). Ihre Punkte liegen auf einer zweizügigen C_3. Die Punkte eines jeden Quadrupels haben denselben Tangentialpunkt, und die 3 Tangentialpunkte liegen in einer Geraden g. Daß umgekehrt die Berührungspunkte dreier Tangentenquadrupel, die zu 3 in einer Geraden gelegenen Punkten einer C_3 gehören, eine Konfiguration $(12_4, 16_3)$ bilden, bemerkte schon *Hesse*[35]).

Die Konfiguration $(12_4, 16_3)B$ gehört zu einer Serie von Konfigurationen, die aus der Betrachtung *zyklisch-perspektiver Polygone* entspringt. Perspektiv heißen hier zwei n-Ecke A und B, sofern nur

---

31) Über die zu der Konfiguration gehörige Kollineationsgruppe G_{216} s. Nr. 14 und Enc. I B 3f. Nr. 5 (*O. Hölder*); III C 5, Nr. 18, (*Kohn*).

32) *H. Schroeter*, Math. Ann. 2 (1870), p. 555.

33) *S. Kantor* l. c.[18]) p. 931.

34) *J. de Vries*, Acta math. 12 (1888), p. 63; *H. Schroeter*, J. f. Math. 108 (1891), p. 269.

35) J. f. Math. 36 (1848), p. 153 = Ges. Abh. p. 164.

bei gewisser Zuordnung die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt laufen. Sind A und B mehrfach perspektiv, so gehen bei Festhaltung der Ecken von A die verschiedenen perspektiven Zuordnungen durch Permutationen der Ecken von B auseinander hervor. Liegt eine solche n-fache Perspektivität vor, daß durch Anwendung derselben zyklischen Permutation die verschiedenen Perspektivitäten erhalten werden, so heißen A und B zyklisch-perspektiv. Die Perspektivitätszentren bilden ein drittes n-Eck C. Man kann die Ecken der 3 Polygone so mit A_i, B_i, $C_i (i = 0, \ldots n-1)$ bezeichnen, daß $A_i B_k C_l$ in einer Geraden liegen, sobald $i + k + l \equiv 0 \mod n$ ist. Es ergibt sich so eine Konfiguration $(3n_n, (n^2)_3)$, deren Diagonalen die Seiten der (vollständigen) n-Ecke A, B, C bilden, und man sieht, daß alle drei gleichartig auftreten. Solche Konfigurationen existieren reell für jeden Wert von n, ihre Punkte liegen stets auf einer C_3. Umgekehrt liegen auf jeder reellen allgemeinen C_3 (ebenso auf jeder in einen Kegelschnitt und eine nicht schneidende Gerade zerfallenden, sowie auf der rationalen C_3 mit isoliertem Doppelpunkt) ∞^2 reelle Konfigurationen der hier besprochenen Art[36]). Für $n = 3$ hat man die *Pascal*sche Konfiguration, für $n = 4$ die Konfiguration $(12_4, 16_3) B$[37]).

6. Konfigurationen von Punkten und Ebenen. Es sind hier besonders solche Konfigurationen untersucht worden, bei denen keine zwei Punkte (Ebenen) mehr als zwei Ebenen (Punkte) gemein haben. Dies setzen wir im folgenden, sofern nichts anderes bemerkt, voraus. Sind Punkte und Ebenen in gleicher Anzahl vorhanden, so verwenden wir wieder das einfachere Symbol n_k. Der kleinste interessierende Wert von k ist 4, und es muß alsdann $n \geqq 7$ sein. Die schematische Behandlung des Problems ergibt eine Konfiguration 7_4, die aber nicht geometrisch realisierbar ist[38]). Unter den Konfigurationen 8_4 ist eine seit langem bekannt. Im Jahre 1828 fand *Möbius*, daß zwei Tetraeder einander zugleich ein- und umbeschrieben sein können[39]). Sie bilden alsdann eine Konfiguration 8_4. Werden — unter Beobachtung der Reihenfolge — mit A_0, B_0, C_0, D_0 die Ecken des einen Tetraeders, mit A_1, B_1, C_1, D_1 die auf den gegenüberliegenden Flächen gelegenen Ecken des andern bezeichnet, so werden auf den A_1, B_1, C_1, D_1 gegenüberliegenden Flächen des zweiten Tetraeders die Ecken des ersten

---

36) *E. Steinitz*, Arch. f. Math. u. Phys. (3) 16 (1910), p. 297, 304—306.

37) Der Zusammenhang der Konfiguration $(12_4, 16_3) B$ mit der C_3 findet sich zuerst bei *J. de Vries*, Acta math. 12 (1889), p. 68. Weitere Literatur dieser Konfiguration: *H. Schroeter*, J. f. Math. 108 (1891), p. 297 ff.

38) *Martinetti*, Gi. di mat. 34 (1896), p. 192.

39) J. f. Math. 3 (1828), p. 273 = Werke 1, p. 437.

entweder in der ursprünglichen Reihenfolge sich vorfinden oder eine Permutation aufweisen. Der erste Fall allein wird von *Möbius* behandelt, der auch darauf hinwies, daß *eine* Inzidenzbedingung eine Folge der übrigen ist. Vier Punkte $A_i B_j C_k D_l$ liegen in einer Ebene, wenn $i + j + k + l$ ungerade ist, andernfalls bilden sie ein Tetraeder, welches dem Tetraeder der vier übrigen Punkte ein- und umbeschrieben ist. Den vier in der Konfiguration demgemäß enthaltenen Tetraederpaaren entsprechen vier Nullsysteme; jedes Nullsystem vertauscht die beiden zugehörigen Tetraeder. Die vier Nullsysteme stellen vertauschbare Operationen dar (liegen in Involution) und erzeugen eine Gruppe von 8 Kollineationen und 8 Korrelationen, die gerade ausreicht, alle Elemente der 8_4 ineinander überzuführen. — Unter den Konstruktionen der 8_4 ist eine besonders übersichtlich, welche von zwei Geradenquadrupeln a_i, b_i $(i = 1, \ldots 4)$ einer Fläche zweiter Ordnung ausgeht. Diese Geraden bilden mit ihren Schnittpunkten $A_{ik} = (a_i, b_k)$ und Verbindungsebenen α_{ik} eine Konfiguration $(16_2{}^7, 8_4{}^4, 16_7{}^2)$, in welcher 18 *Möbius*sche Konfigurationen (z. B. A_{ik}, A_{lm}, α_{ik}, α_{lm}; $i, k = 1, 2$; $l, m = 3, 4$) enthalten sind. Andererseits kommt jede *Möbius*sche 8_4 in 3 Konfigurationen $(16_2{}^7, 8_4{}^4, 16_7{}^2)$ vor. Diese Betrachtung zeigt zugleich, daß zwei *Möbius*sche Tetraeder dreifach hyperbolisch liegen, und daß die 8_4 auf drei Arten in zwei vierfach hyperbolische Tetraeder (z. B. $A_0 B_0 A_1 B_1$, $C_0 D_0 C_1 D_1$) zerlegt werden kann[40]).

Nicht lange nach Erscheinen der *Möbius*schen Arbeit regte *Steiner* an, die sämtlichen Fälle ein- und umbeschriebener Tetraeder zu diskutieren[41]). Die Aufgabe fand durch *P. Muth*[42]) und *G. Bauer*[43]) eine Lösung. Den vier verschiedenartigen (d. h. nicht-ähnlichen) Permutationen, die man mit vier Elementen A_0, B_0, C_0, D_0 (abgesehen von der Identität) bilden kann, entsprechen 4 Möglichkeiten. Alle diese lassen sich auch geometrisch realisieren, ohne daß aber, wie im *Möbius*schen Falle, zwischen den Inzidenzbedingungen eine Abhängigkeit besteht. Man hat so 5 verschiedene Konfigurationen 8_4, deren jede zu sich selbst reziprok ist.

Eine schematische Ableitung aller Konfigurationen 8_4 gab *V. Martinetti*[44]). Es zeigte sich aber, daß es nur die 5 schon erwähnten Konfigurationen gibt, sofern man an der Bedingung festhält, daß zwei

40) *G. Galucci*, Napoli Rend. fasc. 3° (1906), p. 29f.

41) Systematische Entw. Art. 58. Berlin 1832 = Werke 1, p. 405 = Ostwalds Klassiker 83, p. 91.

42) Zeitsch Math. Phys. 37 (1892), p. 117.

43) München. Ber. 27 (1897), p. 359.

44) Gi. di mat. 35 (1897), p. 81.

Konfigurationselemente der einen Art nie mehr als zwei der andern gemein haben sollen. Läßt man drei (aber nicht mehr) gemeinsame Elemente zu, so treten noch 10 weitere Konfigurationen auf, ebenfalls sämtlich geometrisch reell ausführbar. *Martinetti* hat in gleicher Weise die Konfigurationen 9_4 untersucht und 26 bzw. 250 derartige Konfigurationen erhalten[45]).

Weitere Untersuchungen *Martinettis* beziehen sich auf den Fall dreier Tetraeder, deren je zwei einander ein- und umbeschrieben sind. Dabei werden nur eigentliche Tetraeder ohne gemeinsame Elemente betrachtet, so daß die Figur eine Konfiguration 12_5 darstellt. Von den 37 Fällen, die sich schematisch aufstellen lassen, existieren nur 28 geometrisch, und diese stellen im ganzen nur 23 verschiedene Konfigurationen 12_5 dar[46]).

Die Anzahl n der Punkte und Ebenen einer n_k kann nicht $< 1 + \frac{k(k-1)}{2}$ sein, und es muß, wenn diese Minimalzahl eintritt, jedes Punktepaar mit einem Ebenenpaar, jedes Ebenenpaar mit einem Punktepaar inzident sein. Die Untersuchung dieser Fälle ergibt eine 4_3, nämlich das Tetraeder, ferner, wie schon erwähnt, eine schematische aber nicht geometrische 7_4. Dasselbe Ergebnis zeigt der Fall 11_5[47]). Anders steht es beim nächsten Fall 16_6. Hier hat man die *Kummer*sche Konfiguration (Nr. **11**). *E. Ciani*[48]) und *V. Martinetti*[49]) zeigten, daß es keine andere Konfiguration 16_6 gibt.

7. Kombinatorische Konfigurationen. s Punkte 1, 2, ... in allgemeiner Lage im projektiven $R_n (s > n)$ bestimmen zu je zweien $\binom{s}{2}$ Geraden (R_1), zu je dreien $\binom{s}{3}$ Ebenen (R_2) usf. Aus dieser Figur, der Verallgemeinerung des vollständigen ebenen s-Ecks, können durch Schneiden, mittels eines $R_r (r \leqq n)$, der durch keinen der s Punkte geht, kompliziertere Konfigurationen gewonnen werden[50]). Die Gruppe

---

45) Atti R. Acc. Pel. 15 (1901), p. 351.

46) Atti R. Acc. Pel. 18 (1903), p. 136.

47) *Martinetti,* Gi. di mat. 34 (1896), p. 193.

48) Gi. di mat. 34 (1896), p. 177 und 37 (1899), p. 62. Erst der zweite Beweis von *Ciani* ist vollständig.

49) Gi. di mat. 35 (1897), p. 235.

50) Diese Konfigurationen wurden zuerst von *Cayley* behandelt, J. f. Math. 31 (1846), p. 213 = Papers 1, p. 317; *S. Kantor*, Wien. Ber. 80 (1879), p. 715; ferner von *G. Veronese*, Math. Ann. 19 (1882), p. 161 ff.; *H. Schubert,* Hamburg. Mitt. Nr. 4 (1884), p. 82; *Fr. Meyer*, Württ. Korresp. 1884, Heft 7, 8; *J. de Vries*, Amst. Versl. en Meded. (3) 6 (1889), p. 8. In dieser Abhandlung wird im Zusammenhang mit den polyedralen Konfigurationen die Figur der 60 Pascalschen Geraden, 60 Kirkmanpunkte, 20 Steinerpunkte und 20 Cayleylinien behandelt,

einer solchen Konfiguration ist mit der symmetrischen Gruppe von s Elementen holoedrisch isomorph.

Für den Fall $r = 2$ erhält man eine ebene Konfiguration $\left(\binom{s}{n-1}_{s-n+1}, \binom{s}{n}_n\right)$. Jeder Punkt (jede Gerade) entsteht durch Schnitt der Ebene mit einem $R_{n-2}(R_{n-1})$ und wird passend durch die Kombination derjenigen $n - 1$ (bzw. n) Elemente bezeichnet, welche den $R_{n-2}(R_{n-1})$ bestimmen. Diese Bezeichnung läßt die Struktur der Konfiguration deutlich übersehen. Ein Punkt ist mit einer Geraden inzident, wenn die ihn bezeichnende Kombination in derjenigen der Geraden enthalten ist. Die Konfiguration ist vollkommen bestimmt durch die beiden Zahlen n und s oder die beiden Indizes $\gamma = s - n + 1$, $\pi = n$, so daß die ganze Klasse von Konfigurationen für jedes Indexpaar π, γ eine Konfiguration besitzt. $\pi = 3$, $\gamma = 3$ gibt die *Desargues*sche Konfiguration. Bei Vertauschung der beiden Indizes geht die Konfiguration in die reziproke über. In jeder Konfiguration sind auch alle Konfigurationen dieser Klasse mit kleinerem Indexpaar enthalten, aber auch viele andere. Man kann diese Konfigurationen auch leicht, ohne vom R_n auszugehen und ohne Herbeiziehung von Hilfspunkten und -geraden linear konstruieren. Ein Punkt, die durch ihn gehenden Geraden und die weiteren auf diesen gelegenen $\gamma(\pi - 1)$ Punkte sind willkürlich wählbar; dann ist die Konfiguration bestimmt.

Die Konfigurationen, in denen π oder γ gleich 3 ist, kann man aus s Kreisen in der Ebene ableiten. Im ersten Falle wird die Konfiguration von den äußeren Ähnlichkeitspunkten je zweier Kreise und den sie enthaltenden Ähnlichkeitsachsen je dreier Kreise gebildet[51]); im zweiten aus den Potenzlinien je zweier und den Potenzpunkten je dreier Kreise. *G. Jung* zeigt, daß m cyklisch geordnete Kräfte, die sich in einer Ebene im Gleichgewicht halten, und n zugehörige Seilpolygone einer Konfiguration $\left(\binom{m+n}{3}_3, \binom{m+n}{2}_{m+n-2}\right)$ der hier besprochenen Art bestimmen, in der die Kraftlinien und Seilpolygone vorkommen und auch die übrigen Elemente eine einfache mechanische Bedeutung haben[52]). *Jung* nennt diese Konfigurationen *polyedrale*, eine Bezeichnung, die von *J. de Vries* und andern auf die ganze Klasse der hier besprochenen Konfigurationen ausgedehnt wird.

---

welche zusammen eine Konfiguration 80_4 bilden. *J. de Vries*, Amst. Versl. en Med. (3) 6, p. 45 (1889), Math. Ann. 34, p. 227 u. 35, p. 401 (1889); u. a.

51) *J. de Vries*, Math. Ann. 34 (1889), p. 227.

52) Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 169. Vgl. Art. IV, 5, Graphische Statik, (*G. Henneberg*).

Die polyedralen (*Cayley*schen) Konfigurationen lassen sich noch verallgemeinern. Es seien im R_3 s Punkte $P_1, P_2, \ldots P_s (s > 3)$ in allgemeiner Lage gegeben. Auf jeder der Geraden $P_1 P_i$ werde ein Punkt $1i = i1$ angenommen. Die Verbindungsgerade von $1i$ und $1k$ heiße $1ik$ und schneide die Gerade $P_i P_k$ in ik. Je 3 Punkte ik, il, kl liegen in einer Geraden ikl, je 4 Geraden ikl, ikm, ilm, klm bilden ein vollständiges Vierseit in einer Ebene $iklm$. Es sei jetzt ν irgendeine natürliche Zahl. Dann gehören zu jedem Punktquadrupel $P_i P_k P_l P_m$ ν^3 Kollineationen $\varkappa$, welche diese Punkte ungeändert lassen und der Bedingung $\varkappa^\nu = 1$ genügen. Dieselben sind allerdings, sobald $\nu > 2$ ist, nicht mehr alle reell. Durch diese Kollineationen wird jeder der Punkte ik, il, im, kl, km, lm in ν Punkte, jede der Geraden ikl, ikm, ilm, klm in ν^2 Geraden, und wird die Ebene $iklm$ in ν^3 Ebenen übergeführt. Verfährt man so mit allen Quadrupeln, so bilden die aus den Punkten ik, Geraden ikl und Ebenen $iklm$ erhaltenen Elemente eine gewisse Konfiguration. Analog kann man im R_n verfahren und dann das entstandene Gebilde durch einen $R_r (r \leq n)$ schneiden. Im Falle $\nu = 1$ erhält man die polyedralen Konfigurationen; aber auch der Fall $\nu = 2$ liefert reelle und linear herstellbare Konfigurationen.

Die einfachsten Konfigurationen dieser Art kann man in der Ebene wiederum erhalten, indem man von s Kreisen $1, 2, \ldots s$ ausgeht, nunmehr aber *alle* Ähnlichkeitspunkte und -achsen in Betracht zieht. Dieselben bilden dann eine Konfiguration $\left(2\binom{s}{2}_{2(s-2)}, 4\binom{s}{3}_3\right)$, von *J. de Vries* mit σ_s bezeichnet[53]). σ_4 ist die *Hesse*sche Konfiguration (Nr. 5 u. 8). Behufs übersichtlicher Darstellung gebe man jedem Kreise zwei Zeichen i und $\bar{i}$ (oder auch $+i$ und $-i$), die man auch geometrisch als die beiden verschiedenen Orientierungen nach dem Umlaufssinn interpretieren kann, und bezeichne mit $ik = \bar{i}\bar{k}$ den äußeren, mit $i\bar{k} = \bar{i}k$ den inneren Ähnlichkeitspunkt. Zu zwei orientierten Kreisen gehört dann ein Ähnlichkeitspunkt, zu dreien eine Ähnlichkeitsachse. Verfährt man im R_3 in gleicher Weise mit Kugeln, so kommt noch hinzu, daß je 4 orientierte Kugeln eine Ebene bestimmen, in der ihre Ähnlichkeitspunkte und -achsen ein vollständiges Vierseit bilden. Es entsteht eine Konfiguration $\left(2\binom{s}{2}_{2(s-2)}^{4\binom{s-2}{2}}, 4\binom{s}{3}_3^{2(s-3)}, 8\binom{s}{4}_6^4\right)$. In derselben kommen noch andere Vierseite vor, welche durch die sämtlichen Ähnlichkeitspunkte und achsen je dreier nicht-orientierter

53) *J. de Vries,* Arch. Néerl. 25 (1892), p. 33.

Kugeln gebildet werden. Fügt man die Ebenen dieser Vierseite hinzu, so hat man eine Konfiguration $\sum_s$ mit dem Symbol

$$\left(2\binom{s}{2}_{2(s-2)}^{s-2+4\binom{s-2}{2}},\ 4\binom{s}{3}_3^{1+2(s-3)},\ \left(\binom{s}{3}+8\binom{s}{4}\right)_6^4\right).$$

Diese Konfiguration ist für $s > 4$ im Gegensatz zu allen anderen in dieser Nr. besprochenen Konfigurationen nicht mehr regelmäßig, weil zwar alle ihre Punkte und Geraden, aber nicht alle Ebenen gleichberechtigt sind. Die Konfiguration $\sum_4$ ist aber die regelmäßige *Reye*sche Konfiguration (Nr. 8).

Andere Arten kombinatorischer Konfigurationen wurden von *J. A. Barrau* angegeben[54]).

8. Die Reyesche Konfiguration und einige verwandte Konfigurationen. Die *Reye*sche Konfiguration, welcher das Symbol $(12_4^6, 16_3^3, 12_6^4)$ zukommt, wurde bereits von *Poncelet* bei Betrachtung der Ähnlichkeitspunkte von 4 Kugeln bemerkt. Die grundlegenden Untersuchungen gaben *C. Stephanos*[55]), *G. Veronese*[56]), *Th. Reye*[57]). Alle *Reye*schen Konfigurationen gehen sowohl durch Kollineationen wie durch Korrelationen ineinander über. Die 12 Punkte der Konfiguration gruppieren sich zu 3 Tetraedern A, B, C, deren Kanten die sämtlichen Diagonalen der Konfiguration darstellen. Die Ecken der Tetraeder lassen sich derart durch $A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} (i, k = 0, 1)$ bezeichnen, daß drei Punkte A_{ik}, B_{lm}, C_{np} in einer Konfigurationsgeraden liegen, sobald die Summen $i + l + n$, $k + m + p$ beide gerade sind. Demnach sind je zwei Tetraeder vierfach (aber nicht zyklisch) perspektiv. Die Perspektivitätszentren bilden die Ecken des dritten Tetraeders, ebenso schneiden sich bei jeder Perspektivität die homologen Ebenen der zwei ersten Tetraeder in den Geraden eines Vierseits, dessen Ebene dem dritten Tetraeder angehört. Die 3 Tetraeder bilden nach der Ausdrucksweise von *C. Stephanos* ein *desmisches System* Δ, indem ihre hier beschriebene Lage die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß sie, als zerfallende Flächen vierter Ordnung aufgefaßt, einem Büschel ($\delta\varepsilon\sigma\mu\acute{\eta}$) angehören. Ein zweites desmisches System Δ' wird von den Ebenen der Konfiguration gebildet. Δ und Δ' heißen *konjugierte* Systeme. Ebenso treten die *Reye*schen Konfigurationen selbst paarweise *konjugiert* auf: die

54) Haarlem, Arch. Musée Teyler (2) 11, 3 (1908), p. 1.

55) Bull. sc. math. astr. (2) 3 (1879), p. 424.

56) Memorie Acc. R. Lincei (3) 9 (1881), p. 307.

57) Acta math. 1 (1882), p. 97; ferner *A. Vietor,* Freiburg. Ber. (8) 2 (1882), p. 206.

Ecken von Δ' und die Ebenen von Δ sind die Elemente der konjugierten Konfiguration[58]). Jedes Tetraeder des einen Systems hat mit jedem des andern ein Gegenkantenpaar gemein. Die beiden auf einer Kante liegenden Eckenpaare, ebenso die hindurchgehenden Ebenenpaare der beiden Tetraeder trennen einander harmonisch. Die Ecken, Kanten, Flächen aller 6 Tetraeder bilden eine Konfiguration $(24_3{}^9, 18_4{}^4, 24_9{}^3)$, die *harmonische* Konfiguration. Die *Hesse*sche Konfiguration und die harmonische Konfiguration $(24_3, 18_4)$ in der Ebene können durch Projektion der Punkte und Geraden der *Reye*schen Konfiguration bzw. der räumlichen harmonischen Konfiguration aufgefaßt werden[59]). Viele ihrer Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus denen der räumlichen Konfigurationen. Je zwei *Hesse*sche Konfigurationen sind „konjugiert", und ihre Punkte sind die Ecken zweier Systeme von je drei „desmischen Vierecken". Die Beziehungen der *Hesse*schen Konfiguration zur Kurve dritter Ordnung wurden oben (Nr. 5) angegeben. *J. de Vries* zeigte, daß die Punkte zweier konjugierter *Hesse*scher Konfigurationen oder also die Punkte der harmonischen Konfiguration $(24_3, 18_4)$ auf einer Kurve vierter Ordnung liegen.

9. Die Gruppe der Reyeschen Konfiguration. Beziehungen zur elliptischen Geometrie und zum 24-Zell des R_4. Um die Regelmäßigkeit der *Reye*schen Konfiguration und ihre Reziprozität in Evidenz zu setzen, kann man folgendes Verfahren einschlagen[60]). 16 Elemente $a_{ik}(i, k = 1, 2, 3, 4)$ zu einem quadratischen System (a_{ik}) angeordnet, deute man als Geraden im Raum, und zwar sollen zwei Elemente, wenn sie derselben Zeile oder Kolonne angehören, windschiefe, andernfalls schneidende Geraden darstellen. Dann hat man die Geraden einer *Reye*schen Konfiguration. Zur Bezeichnung der Punkte und Ebenen der Konfiguration dienen die positiven und negativen Determinanten-

58) Die Ecken, Kanten, Flächen eines Würfels sind Elemente einer *Reye*schen Konfiguration; die Ecken, Kanten, Flächen des dem Würfel einbeschriebenen regulären Oktaeders Elemente der konjugierten Konfiguration; *Reye* l. c. p. 99, 100.

59) *E. Hess*, J. f. Math. 111 (1893), p. 53. Die räumliche harmonische Konfiguration wurde von *Reye* l. c.[57]) und *A. Vietor* l. c.[57]) studiert, die ebene von *J. de Vries*, Amst. Versl. en Meded. (3) 5 (1888); Arch. Néerl. 23 (1888), p. 93; Acta math. 12 (1888), p. 74; Amst. Versl. en Meded. (3) 7 (1890), p. 177; *V. Martinetti*, Atti Acc. Gioenia Sc. nat. Catania (4) 3 (1891), p. 20. Die *Hesse*sche Konfiguration behandeln eingehend *J. de Vries*, Acta math. 12 (1888), p. 72; *H. Schroeter*, J. f. Math. 108 (1891), p. 269; *E. Hess*, J. f. Math. 111 (1893), p. 53.

60) *E. Steinitz*, Arch. f. Math. u. Phys. (3) 1 (1901), p. 124. *G. Gallucci*, Atti del IV. congr. internazionale dei mat. Roma (1909) II, p. 290.

terme (bzw. umgekehrt). Jeder Punkt (jede Ebene) ist mit den Geraden inzident, deren Zeichen in dem Term vorkommen.

Die geometrische Bedeutung des quadratischen Systems (a_{ik}) bleibt bei den Permutationen der Zeilen und der Kolonnen sowie bei den Vertauschungen der Zeilen mit den Kolonnen ungeändert. Mit diesen $24 \cdot 24 \cdot 2 = 1152$ Operationen sind alle Permutationen und Reziprozitäten der *Reye*schen Konfiguration erschöpft. Sie werden sämtlich durch Kollineationen bzw. Korrelationen realisiert. Von Wichtigkeit sind zwei Untergruppen G'_{24} und G''_{24} der Gruppe G_{1152}, welche den *bloßen* Zeilen bzw. Kolonnenpermutationen entsprechen. Durch die Operationen von G'_{24} (oder G''_{24}) wird jeder Punkt, jede Ebene des Raumes in die 12 Punkte und 12 Ebenen einer *Reye*schen Konfiguration übergeführt. Die $2 \cdot 6$ Vertauschungen von je zwei Zeilen oder Kolonnen ergeben die einzigen in G_{1152} enthaltenen Nullsysteme[61]). Die vollständige Aufzählung der verschiedenen in G_{1152} enthaltenen Operationen wurde zuerst von *J. Feder* gegeben[62]).

Durch die Operationen von G_{1152} wird auch die konjugierte Konfiguration in sich übergeführt. Nimmt man noch die Kollineationen und Korrelationen hinzu, welche die beiden konjugierten Konfigurationen miteinander vertauschen, so erhält man eine G_{2304}. Unter ihren Korrelationen ist ein ausgezeichnetes Polarsystem P mit imaginärer Ordnungsfläche F enthalten, in welchem die 6 desmischen Tetraeder Poltetraeder sind. Die Regelscharen von F stehen zu den Gruppen G'_{24} und G''_{24} in einfacher Beziehung. Jede dieser Gruppen läßt die Geraden der einen Schar unverändert, während sie in bezug auf die andere eine *Oktaedergruppe*[63]) darstellt[64]). Die 3 von der Identität verschiedenen Operationen der in einer solchen Oktaedergruppe enthaltenen *Vierergruppe*[65]) geben in Verbindung mit P Nullsysteme. So erhält man $2 \cdot 3$ Nullsysteme, die miteinander vertauschbar sind[66]).

Die Ordnungsfläche F wird durch alle Operationen der G_{2304} in sich übergeführt. Hierauf beruhen die einfachen Beziehungen der *Reye*schen Konfiguration zur elliptischen Geometrie, die sich im Prinzip bei *Hess* finden[67]). Jede Konfigurationsebene wird durch die 4 in ihr

61) *Reye*, l. c.[57]) p. 101.

62) Math. Ann. 47 (1896), p. 375.

63) Enc. I B 3 f (*A. Wiman*), Nr. 2, p. 524.

64) *Steinitz*, l. c., p. 132. Zwei Oktaedergruppen auf den Regelscharen einer Fläche zweiter Ordnung angenommen, bestimmen ihrerseits zwei konjugierte *Reye*sche Konfigurationen.

65) Enc. I B 3 f., Nr. 2, p. 525.

66) Dieselben erzeugen die *Kummer*sche Gruppe (Nr. 11).

67) Nova acta Leop.-Carol. 75 (1899), p. 241.

gelegenen Konfigurationsgeraden in 3 Vierecke und 4 Dreiecke eingeteilt. Werden alle Vierecke entfernt, so teilen die zurückbleibenden Dreiecke den Raum in 12 Oktaeder ein. Wird die Fläche F einer elliptischen Maßbestimmung zugrunde gelegt, so erscheinen die 12 Oktaeder regulär und kongruent. Hiernach wird eine *Reye*sche Konfiguration auch erhalten, indem man das reguläre 24-Zell des R_4 aus seinem Zentrum auf einen R_3 projiziert.

10. Die Konfiguration von Hess. Ähnliche Verhältnisse findet man bei einer von *E. Hess* sehr eingehend behandelten Konfiguration $(60_6^{15}, 72_5^5, 60_{15}^6)$[68]), deren Beschreibung an das Schema einer Determinante 5ten Grades $|a_{ik}|$ angeknüpft sei. Die 60 positiven Determinantenterme dienen sowohl zur Bezeichnung der 60 Punkte wie der 60 Ebenen der Konfiguration; ein Punkt und eine Ebene sind inzident, wenn die zugehörigen Terme genau ein Element a_{ik} gemein haben. Hierdurch ist die Konfiguration vollständig charakterisiert. Das Schema läßt die 72 Geraden, die mit je 5 Punkten und 5 Ebenen inzident sind, ablesen, ebenso 200 3-punktige und 3-flächige Diagonalen. Die Konfiguration enthält 25 desmische Systeme. Die 12 positiven Terme, welche ein gegebenes Element a_{ik} enthalten, stellen die Ecken und Flächen eines solchen Systems dar. Zu der Konfiguration gehört ein ausgezeichnetes Polarsystem P mit imaginärer Ordnungsfläche F. Die beiden durch denselben Determinantenterm bezeichneten Konfigurationselemente werden durch P miteinander vertauscht. Die 60 geraden Zeilenpermutationen werden durch eine Gruppe von 60 Kollineationen (und 60 Korrelationen) verwirklicht. Dieselben lassen die Geraden der einen Regelschar von F unverändert und unterwerfen die der andern einer *Ikosaedergruppe.* Entsprechendes gilt von den Kolonnen. Zwei auf den beiden Regelscharen einer Fläche 2. Grades angenommene Ikosaedergruppen bestimmen stets eine *Hess*sche Konfiguration. Die ganze zur *Hess*schen Konfiguration gehörige Transformationsgruppe umfaßt $60 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 2 = 14400$ Operationen.

Jede Konfigurationsebene wird durch die 6 in ihr gelegenen Konfigurationsgeraden in 6 Fünfecke und 10 Dreiecke eingeteilt. Nach Ausschaltung der Fünfecke teilt die Konfiguration den projektiven Raum in 300 Tetraeder, die bei elliptischer Maßbestimmung mit der Ordnungsfläche F regulär und kongruent werden. Die *Hess*sche Kon-

---

68) Math. Ann. 28 (1886), p. 107; Nova acta Leop.-Carol. 75 (1899), p. 273. Man vgl. auch das Referat über diese Arbeit Arch. f. Math. u. Phys. (3) 3 (1902), p. 302.

figuration wird deshalb auch erhalten, indem man das reguläre 600-Zell des R_4 aus seinem Zentrum auf einen R_3 projiziert.

11. Die Kummersche Konfiguration. Wie schon am Ende von Nr. 6 erwähnt wurde, haben *E. Ciani* und *V. Martinetti* bewiesen, daß es nur eine Konfiguration 16_6 von Punkten und Ebenen gibt, wenn gefordert wird, daß 2 Elemente der einen Art niemals mehr als 2 der andern Art gemein haben sollen. Eine solche Konfiguration wird, wie *E. Kummer* fand, von den 16 Doppelpunkten und 16 singulären Ebenen der nach ihm benannten Fläche vierter Ordnung gebildet[69]). *Kummer* bemerkte auch, daß die 6 in einer Ebene gelegenen Punkte einem Kegelschnitt angehören und die 6 durch einen Punkt gehenden Ebenen Tangentialebenen eines Kegels zweiten Grades sind. Durch die singulären Elemente ist die *Kummer*sche Fläche bestimmt, doch gibt es ∞^3 Konfigurationen 16_6, welche der Fläche zugleich ein- und umbeschrieben sind[70]).

Ein Schema, welches die Inzidenzverhältnisse der Konfiguration 16_6 leicht übersehen läßt, gab *C. Jordan*[71]). Die Punkte und Ebenen lassen sich nämlich so durch zwei quadratische Systeme (A_{ik}) und (α_{ik}), $i, k = 1, 2, 3, 4$ bezeichnen, daß zwischen A_{ik} und α_{ik} Inzidenz stattfindet, wenn entweder $i = l$, $k \gtrless m$ oder $i \gtrless l$, $k = m$ ist. Dies zeigt, daß jede Zeile oder Kolonne des ersten Systems mit der entsprechenden Zeile bzw. Kolonne des zweiten ein Tetraeder darstellt, in dem A_{ik} und α_{ik} einander gegenüberliegen, ferner, daß je zwei Zeilen oder Kolonnen ein *Möbius*sches Tetraederpaar (Nr. 6) darstellen[72]). Daraus aber ist weiter die Existenz von 6 vertauschbaren (involutorisch gelegenen) Nullsystemen abzuleiten, welche die Konfiguration in sich überführen. Auf das Auftreten der *Möbius*schen Tetraeder gründen sich lineare Konstruktionen, welche von *V. Martinetti*[73]) und *L. Berzolari*[74]) gegeben wurden.

In Nr. 9 war auf das Auftreten vertauschbarer Nullsysteme in der zu zwei konjugierten *Reye*schen Konfigurationen gehörigen Gruppe hingewiesen worden. *F. Klein* wurde durch seine Behandlung der Liniengeometrie unmittelbar auf diese Nullsysteme geführt[75]). Indem er die linearen Komplexe oder Nullsysteme des R_3 durch Punkte im

---

69) Berlin. Ber. (1864), p. 247.
70) *F. Klein*, Math. Ann. 27 (1886), p. 106.
71) J. f. Math. 70 (1869), p. 182.
72) *V. Martinetti*, Palermo Rend. 16 (1902), p. 196.
73) l. c.[72]) p. 197.
74) Roma Acc. L. Rend. (5) 16, (1907) p. 726 ff.
75) Math. Ann. 2 (1870), p. 212.

R_5 repräsentiert, erscheinen vertauschbare Nullsysteme als konjugierte Punkte derjenigen quadratischen Mannigfaltigkeit $M^{(2)}$ des R_5, deren Punkte die geraden Linien (oder degenerierten linearen Komplexe) des R_3 darstellen. Ein Polhexatop der $M^{(2)}$ liefert 6 vertauschbare Nullsysteme. Hieraus wird sofort klar, daß zwei derartige Sextupel kollinear zueinander sind und daß bei Berücksichtigung von Realitätsverhältnissen unter den 10 möglichen Einteilungen eines solchen Sextupels in zwei Tripel *eine* ausgezeichnet ist, indem von den 6 konjugierten Punkten des R_5 je 3 zu beiden Seiten der $M^{(2)}$ liegen. Auch die übrigen Verhältnisse lassen sich in der liniengeometrischen Behandlung leicht übersehen. Das Produkt der 6 Nullsysteme ergibt die Identität, die Nullsysteme erzeugen daher eine Gruppe von 32 Operationen — sie werde *Kummer*sche Gruppe genannt. Werden die Nullsysteme mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnet, und wird unter $iklmnp$ eine Permutation dieser Ziffern verstanden, so besteht die *Kummer*sche Gruppe aus der Identität, 6 Nullsystemen i, 15 gescharten Involutionen ik und 10 Polarsystemen $ikl = mnp$. Die Direktrizen von ik sind reell, wenn die Punkte, welche i und k im R_5 repräsentieren, zu verschiedenen Seiten von $M^{(2)}$ liegen, andernfalls konjugiert-komplex[76]). Dasjenige Polarsystem ikl, bei welchem die i, k, l entsprechenden Punkte des R_5 auf derselben Seite von $M^{(2)}$ liegen, hat eine imaginäre Ordnungsfläche, die 9 übrigen Ordnungsflächen sind reell und hyperbolisch. Diese 10 Flächen heißen auch Fundamentalflächen[77]).

Durch die 32 Operationen der zugehörigen *Kummer*schen Gruppe wird jedes Element der Konfiguration 16_6 in jedes andere übergeführt. Dadurch gewinnt man eine übersichtliche Darstellung der 32 Konfigurationselemente, indem man ein beliebiges Element mit 0, jedes andere durch diejenige Operation bezeichnet, durch welche es aus 0 hervorgeht[78]). Diese Darstellung läßt sofort erkennen, daß jedem der 10 Polarsysteme ein *Jordan*sches Schema (s. oben) entspricht, z. B. dem Polarsystem $ikl = mnp$ das Schema

$$\begin{matrix} 0 & i & k & l \\ m & mi & mk & ml \\ n & ni & nk & nl \\ p & pi & pk & pl. \end{matrix}$$

---

76) Es wird hier wie vorher vorausgesetzt, daß alle 6 Nullsysteme reell sind.

77) *F. Klein*, l. c.[75]), p. 208.

78) *H. Weber*, J. f. Math. 84 (1878), p. 332.

Es gibt ∞^{18} *Kummer*sche Konfigurationen, von denen natürlich immer nur ∞^{15} kollinear verwandt sind. Der Überschuß von 3 äußert sich in einem projektiven, 6-elementigen Wurf auf einstufigem Träger, der jeder Konfiguration zukommt[79]). Zwei Konfigurationen, die denselben Wurf haben, sind kollinear. Dieser Wurf, dessen Elemente den 6 Nullsystemen eindeutig zugeordnet sind, tritt in verschiedener Weise an der Konfiguration in Erscheinung. Einmal haben die 6 in einer Ebene 0 gelegenen Punkte i, k, l, m, n, p auf dem sie verbindenden Kegelschnitt diesen Wurf, und Entsprechendes gilt natürlich von den Ebenen eines Punktes. Sodann kommt den 6 Punkten (Ebenen) 0, mn, np, pk, kl, lm in der durch sie bestimmten Raumkurve dritter Ordnung eben dieser Wurf zu. Auf die Punkt- oder Ebenensextupel dieser letzten Art hatten auch die Untersuchungen von *C. W. Borchardt*[80]), *A. Cayley*[81]) und *H. Weber*[82]) über die Parameterdarstellung der *Kummer*schen Fläche durch Thetafunktionen zweier Veränderlichen geführt (vgl. II B 6, *Krazer-Wirtinger*). Dabei zeigte es sich, daß zur Konstruktion der Konfiguration ein solches Sextupel (in allgemeiner Lage) willkürlich angenommen werden darf, und die Konfiguration alsdann eindeutig bestimmt und linear konstruierbar ist. *Th. Reye*[83]), *H. Schroeter*[84]) und *F. Geiser*[85]) leiten dieses Resultat synthetisch her.

Besondere *Kummer*sche Konfigurationen erhält man, indem man den charakteristischen Wurf speziell wählt. Den Fall eines zyklisch projektiven Wurfes repräsentiert eine von *J. de Vries* angegebene Konfiguration[86]), deren Punkte die Kantenmitten und unendlich fernen Punkte der räumlichen Diagonalen eines Würfels sind. *E. Hess*[87]) und *E. Bertini*[88]) behandeln die Fälle, in denen das auf der Konfigurationsebene gelegene *Pascal*sche Sechseck zugleich ein *Brianchon*sches ist.

Zu jeder *Kummer*schen Gruppe gehören ∞^3 Konfigurationen 16_6, da ein beliebiger Punkt P durch die 32 Operationen der Gruppe in die Elemente einer *Kummer*schen Konfiguration übergeführt wird. Ausartungen treten nur ein, wenn P auf einer Fundamentalfläche an-

79) *Th. Reye*, J. f. Math. 86 (1879), p. 84, 209.

80) J. f. Math. 83 (1877), p. 234 = Werke, p. 341.

81) J. f. Math. 83 (1877), p. 210 = Papers 10, p. 157.

82) J. f. Math. 84 (1878), p. 332.

83) l. c.[79]), p. 209.

84) J. f. Math. 100 (1887), p. 231.

85) Zürich Naturf. Ges. 41, 2, (1896), p. 24.

86) Wiener Ber. 100 (1891), p. 828.

87) Nova acta Leop.-Carol. 55 (1890), p. 97. Das Sechseck kann ein 1-, 2-, 3-, 4-, 6-fach *Brianchon*sches sein.

88) Milano R. Ist. Lomb. Rend. (2) 29 (1896), p. 566.

genommen wird. Die Konfiguration wird dann im allgemeinen eine 16_7, bei welcher die Kegelschnitte zerfallen und ihr Doppelpunkt als weiterer Konfigurationspunkt auf die Ebene getreten ist; sie wird eine 8_5, bei der je 4 Punkte und Ebenen mit einer Geraden inzident sind, wenn P auf einer Direktrix einer Involution ik liegt, und reduziert sich auf ein Fundamentaltetraeder (s. Nr. **12**), wenn P Ecke eines solchen ist. *G. Veronese*[89]) und *E. Hess* haben eine Reihe von Konfigurationen angegeben, die sich aus der *Kummer*schen ableiten lassen. *W. Wirtinger*[90]) und *A. Barrau*[91]) untersuchten Analoga zur *Kummer*schen Fläche und Konfiguration in mehrdimensionalen Räumen. Das vollständige Formensystem der *Kummer*schen Gruppe wurde von *E. Study*[92]) angegeben.

Über den Zusammenhang der *Kummer*schen Konfiguration mit den Doppeltangenten einer C_4 sehe man Enc. III C 5 Nr. **73** (*G. Kohn*).

12. Die Kleinsche Konfiguration und Gruppe[93]). Bezeichnet in einer *Kummer*schen Gruppe (ik) das zu der gescharten Involution ik gehörige Direktrizenpaar, so sind zwei Paare wie (ik), (il) windschief, während zwei Paare wie (ik), (lm) einander in 4 Punkten schneiden. Drei Paare (ik), (il), (kl) gehören einer Regelschar — sie heiße (ikl) — an und trennen einander harmonisch, sind also niemals gleichzeitig reell. (ikl) und (mnp) sind die beiden Regelscharen, welche auf der zum Polarsystem $ikl = mnp$ gehörigen Ordnungsfläche (Fundamentalfläche) liegen. Drei Direktrizenpaare $(ik)(lm)(np)$ bilden die Kanten eines Tetraeders, „Fundamentaltetraeder" genannt. Es gibt 15 solche Tetraeder, sie bilden die *Klein*sche Konfiguration $(60_3{}^{15}, 30_6{}^6, 60^3_{15})$. In jedem der Polarsysteme $ikl = mnp$ sind 6 Fundamentaltetraeder, nämlich $(im)(kn)(lp)$, $(in)(kp)(lm)$, $(ip)(km)(ln)$; $(im)(kp)(ln)$, $(ip)(kn)(lm)$, $(in)(km)(lp)$, Poltetraeder; sie bilden zwei konjugierte desmische Systeme. Durch ein desmisches System ist die ganze Konfiguration bestimmt. Besteht die *Kummer*sche Gruppe nur aus reellen Operationen, so gehört zu der imaginären Fundamentalfläche (s. Nr. **11**) ein reelles Paar desmischer Systeme, die übrigen Tetraeder sind imaginär.

Die *Kummer*sche Gruppe, welche jedes Fundamentaltetraeder in

89) Memorie Acc. R. Lincei (3) 9 (1881), p. 307.

90) Gött. Nachr. (1889), p. 474; Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 113.

91) Proceed. Amsterdam (1907/8), p. 263, 503.

92) Leipzig. Ber. 44 (1892), p. 122.

93) Diese Konfiguration findet sich zuerst in *F. Kleins* Dissertation, Bonn (1868), (Abdruck Math. Ann. 23 (1884), p. 539), sodann Math. Ann. 2 (1870), p. 212. Die Gruppe der 6! Operationen zuerst Math. Ann. 4 (1871) p. 356. Zu den in dieser und den folgenden Nummern des Textes behandelten Gruppen vgl. noch *R. Bagnera*, Palermo Rend. 9 (1905), p. 1.

sich überführt, ist ausgezeichnete Untergruppe derjenigen (*Klein*schen) Gruppe, die alle linearen Transformationen umfaßt, durch welche die *Klein*sche Konfiguration (oder *Kummer*sche Gruppe) in sich übergeführt wird. In der liniengeometrischen Behandlung *Kleins* wird diese Gruppe durch die Permutationen und Vorzeichenumkehrungen von 6 homogenen Variablen (den homogenen Punktkoordinaten im R_5) dargestellt. Sie umfaßt $6! \cdot 32 = 23040$ Operationen[94]). Die bloßen Zeichenumkehrungen liefern die *Kummer*sche Gruppe.

Die 320 Geraden der 20 *Reye*schen Konfigurationen, welche zu den desmischen Systemen der *Klein*schen Konfiguration gehören, sind in dieser 3-punktige und zugleich 3-flächige Diagonalen. Jeder Punkt, jede Ebene der Konfiguration ist mit 16 dieser Diagonalen inzident, welche die Geraden einer (speziellen) Konfiguration $(12_4, 16_3)\,B$ (s. Nr. 5) darstellen. Die *Klein*sche Konfiguration besitzt außerdem noch 360 2punktige und zugleich 2flächige Diagonalen[95]). *C. Stephanos* gab ihre Diagonalebenen an[96]). Es sind 240, auf denen je 6 Punkte zu einem Vierseit angeordnet sind und 960, welche je 4 Punkte, davon 3 in einer Geraden enthalten. Weitere sehr umfangreiche Untersuchungen der *Klein*schen Konfiguration führte *E. Hess* aus; auch gab er die geometrische Bedeutung aller in der *Klein*schen Gruppe enthaltener Operationen an[97]).

13. Konfigurationen aus endlichen Kollineationsgruppen: binäres Gebiet. Zu den in den letzten Nummern besprochenen Konfigurationen gehörten Gruppen von Kollineationen (und Korrelationen). Man kann umgekehrt von einer endlichen Kollineationsgruppe ausgehen und nach zugehörigen Konfigurationen fragen. Diese Fragestellung war gegeben, seit man überhaupt anfing, sich mit den endlichen Kollineationsgruppen zu beschäftigen. Im binären Gebiet wurden diese Gruppen von *F. Klein* zuerst vollständig aufgezählt[98]). Das Ergebnis war, daß außer der zyklischen Gruppe beliebiger Ordnung, der Vierergruppe (Diedergruppe der Ordnung 4) und der Diedergruppe von der Ordnung $2n\,(n \geqq 3)$, den einzigen reell darstellbaren Gruppen, nur noch drei Gruppen existieren, die man nach den regulären Polyedern *Tetraeder*, *Oktaeder*, *Ikosaeder* zu bezeichnen pflegt. Wird ein reguläres Oktaeder oder Ikosaeder aus seinem Mittelpunkt auf die umbeschriebene Kugel projiziert, so entsteht auf dieser eine reguläre

94) Enc. I B 3f. Nr. 22, (*Wiman*).

95) *F. Klein*, l. c.[93]), p. 208.

96) Bull. p. 450, s. Note 55).

97) Nova acta Leop.-Carol. 55 (1890), p. 97; 75 (1899), p. 5.

98) Vgl. die Literaturangaben Enc. I B 3f, Nr. 2, (*Wiman*).

Einteilung. Die 24 bzw. 60 Drehungen, welche diese Einteilung in sich überführen, lassen je ein Punktepaar invariant, und diese Pole stellen sich als Ecken-, Kanten- und Flächenmitten des Netzes dar. Bezeichnet man die Punkte der Kugel in üblicher Weise durch komplexe Zahlen z, und deutet man diese als Koordinaten in einem rationalen Träger (Gerade, Kegelschnitt usf.), so entspricht der Gruppe der Drehungen eine Gruppe linear-gebrochener Substitutionen von z bzw. von Projektivitäten des rationalen Trägers. Die hier auftretenden drei Arten von Polen bezeichnen wir als *Ecken-*, *Flächen-*, *Kantenpunkte* und fassen sie alle unter der Bezeichnung *binäre Oktaeder-* bzw. *Ikosaederkonfiguration* zusammen[99]). — Die vier Gegenflächenpaare des Oktaeders werden durch die zugehörige Gruppe auf alle Arten miteinander vertauscht, so daß die Gruppe mit der symmetrischen Gruppe von vier Dingen isomorph ist. Die *Tetraedergruppe* ist in der Oktaedergruppe enthalten und entspricht der alternierenden Gruppe von vier Dingen. — Daß die Ikosaedergruppe mit der alternierenden Gruppe von fünf Dingen isomorph ist, spricht sich darin aus, daß die 30 Kantenpunkte des Ikosaeders die Ecken von fünf Oktaedern bilden, welche bei den Drehungen alle geraden Permutationen erfahren. Die zwei Gegentetraeder, die sich aus den Flächenpunkten eines solchen Oktaeders (die, auf der Kugel betrachtet, zugleich Flächenpunkte des Ikosaeders sind) bilden lassen, treten innerhalb der Gruppe nicht als gleichberechtigt auf, und man erhält demnach zwei verschiedene Systeme von je fünf Tetraedern, zu denen sich die 20 Flächenpunkte des Ikosaeders gruppieren lassen. Vgl. I B 3f., (*Wiman*).

14. Konfigurationen aus Kollineationsgruppen: ternäres Gebiet[100]). In der Ebene zählen wir, unter Beiseitelassung trivialer Fälle, fünf Kollineationsgruppen auf: 1. Die *ternäre Oktaedergruppe* G_{24} (mit der *Tetraedergruppe* G_{12}), 2. die *ternäre Ikosaedergruppe* G_{60}, 3. die *Hessesche Gruppe* G_{216} (mit ihren Untergruppen G_{72}, G_{36}, G_{18}), 4. die *Kleinsche Gruppe* G_{168}, 5. die *Valentinersche Gruppe* G_{360}. — Zu jeder dieser Gruppen gehört ein bestimmter algebraischer Körper in der Weise, daß zur Schreibung der Gruppe die Zahlen dieses Körpers notwendig, aber auch hinreichend sind. Es ist dies bei der G_{24} der Körper R der rationalen Zahlen, bei jeder der Gruppen G_{60}, G_{116}, G_{168} ist es ein Körper zweiten Grades $R(\omega)$, $R(\varepsilon)$, $R(\eta)$, bei der G_{360} ein Körper vierten Grades $R(\omega, \varepsilon)$. Dabei bezeichnen wir mit ω, ω'; ε, ε';

99) Wir gebrauchen hier und im folgenden die Bezeichnung Konfiguration häufig in einer von der ursprünglichen etwas abweichenden, in jedem Falle genau angegebenen Bedeutung.

100) Vgl. I B 3f, Nr. 5 (*Wiman*).

η, η' die Wurzeln der Gleichungen $x^2 + x - 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$, $x^2 + x + 2 = 0$, also

$$\omega, \omega' = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad \eta, \eta' = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}.$$

Man ersieht hieraus, daß nur die beiden ersten Gruppen reell darstellbar sind.

Bei der geometrischen Behandlung dieser Gruppen ist folgendes zu beachten. Jede in einer Gruppe enthaltene Operation zweiter Ordnung stellt sich als eine Involution dar; es gehören zu ihr ein *„Hauptpol"* P und eine *„Hauptachse"* a, alle durch P gehenden Geraden und alle auf a liegenden Punkte bleiben bei der Operation ungeändert. Hat man zwei vertauschbare Operationen zweiter Ordnung σ, τ, so ist auch $\sigma \cdot \tau$ von der zweiten Ordnung. Die Operationen σ, τ, $\sigma \cdot \tau$ und die Identität bilden die *ternäre Vierergruppe.* Zu dieser gehört ein Dreieck (*„Hauptdreieck"*), dessen Ecken und Seiten die Hauptpole und -achsen der drei Involutionen sind. Zu jeder *Diedergruppe* von der Ordnung $2n\,(n \geqq 3)$ gehört ebenfalls ein „Hauptpol" und eine „Hauptachse". Es sind dies die einzigen Elemente (Punkte, Geraden), welche bei allen Operationen der Diedergruppe ungeändert bleiben. Die Diedergruppe enthält außer einer zyklischen Gruppe der Ordnung n noch n Involutionen, deren Hauptachsen mit dem Hauptpol, deren Hauptpole mit der Hauptachse der Diedergruppe inzident sind. Ist n gerade, so enthält die zyklische Untergruppe noch eine Involution, welche denselben Hauptpol und dieselbe Hauptachse hat wie die Diedergruppe.

Das System der Hauptpole und -achsen aller in einer Gruppe enthaltenen Involutionen und Diedergruppen fassen wir unter der Bezeichnung *Konfiguration der Gruppe* zusammen. Dabei sind immer ein Punkt und eine Gerade, welche als Hauptelemente derselben Involution oder Diedergruppe auftreten, einander zugeordnet. Diese Zuordnung, welche wir im folgenden mit Π bezeichnen, stellt eine reziproke Beziehung (Nr. 1) der Konfiguration auf sich selbst dar. — Andere als die schon im vorstehenden erwähnten Inzidenzen finden zwischen den Konfigurations-Elementen nicht statt, und es ist hiernach die Konfiguration durch die abstrakt gegebene Gruppe völlig bestimmt. Da die Konfigurations-Elemente durch die Operationen der Gruppe eindeutig bestimmt sind, so können alle ihre Koordinaten in dem zur Gruppe gehörigen Körper geschrieben werden.

Jede Kollineation der Gruppe bewirkt eine Permutation der zugehörigen Konfiguration. Aber nur im Falle der G_{24} ist die Permutationsgruppe mit der Kollineationsgruppe erschöpft. Dagegen ist

in den Fällen der G_{60}, G_{216}, G_{168} die Permutationsgruppe von der doppelten, im Falle G_{360} von der vierfachen Ordnung. Dies hängt mit den algebraischen Körpern zusammen, welche zu den Gruppen gehören. Die nicht durch Kollineationen realisierbaren Permutationen können durch gewisse andere Operationen („*Pseudokollineationen*") dargestellt werden, die sich aus der Kombination von (nicht notwendig zur Gruppe gehörigen) Kollineationen mit der *Galois*schen Gruppe des Zahlkörpers ergeben[101]). Alle diese Gruppen lassen sich auch in bestimmter Weise durch Korrelationen und — abgesehen von der G_{24} — „Pseudokorrelationen" erweitern.

Wir gehen nun auf die Konfigurationen im einzelnen ein.

Bei der ternären *Oktaeder-* und *Ikosaederkonfiguration*[102]) ist Π ein Polarsystem. Der zugehörige Kegelschnitt $\varkappa$ wird von den Konfigurations-Geraden in den Punktepaaren einer *binären* Oktaeder- bzw. Ikosaederkonfiguration (Nr. **13**) geschnitten. Umgekehrt ist die ternäre Konfiguration durch die binäre bestimmt, was auch daraus hervorgeht, daß jede Projektivität auf einem Kegelschnitt in einer Kollineation der Ebene enthalten und sonach auch jede binäre Gruppe zu einer ternären führt. Ist $\varkappa$ ein Kreis, so ergeben sich die Punkte der ternären Konfigurationen, indem man die Ecken-, Flächen-, Kantenmitten eines regulären Oktaeders oder Ikosaeders aus dem Kugelzentrum O projiziert. Die zu den Projektionsstrahlen senkrechten Ebenen durch O schneiden die zugehörigen Konfigurationsgeraden aus. Man kann also auch bei den ternären Konfigurationen Ecken-, Flächen-, Kantenpunkte unterscheiden. Wir bezeichnen dieselben mit A, B, C, mit a, b, c die zugehörigen Geraden.

Die *Oktaederkonfiguration* wird durch die willkürlich zu wählenden vier Flächenpunkte B bestimmt, und die Gruppe besteht aus den Kollineationen, welche diese Punkte permutieren[103]). Das vollständige Viereck (Vierseit) der Punkte B (Geraden b) hat die sechs Geraden c (Punkte C) zu Seiten (Ecken); die drei Punkte A und Geraden a bilden das Hauptdreieck der Konfiguration, welches sowohl für das voll-

---

101) Zu den Pseudokollineationen gehören auch die Antiprojektivitäten (III AB 5, Nr. **20**, *Schoenflies*). Die hier vorkommenden Pseudokollineationen sind immer nur als Operationen innerhalb des Netzes aufzufassen, dessen Elemente durch die Zahlen des zugrunde liegenden algebraischen Körpers ausgedrückt werden.

102) *Klein-Fricke*, Automorphe Funktionen I (1897), p. 69 ff.

103) Von hier aus läßt sich sofort ein Analogon der Gruppe und Konfiguration in jedem R_n ableiten. Den Fall des R_3 behandelt eine Arbeit von *E. Ciani*, Palermo Rend. 21 (1906), p. 322.

ständige Viereck wie Vierseit Diagonaldreieck ist. Macht man dasselbe zum Koordinatendreieck, einen Punkt B zum Einheitspunkt (1, 1, 1), so haben je zwei durch Π zugeordnete Elemente dieselben Koordinaten. Außer den Elementen der ternären Konfiguration treten als Pole und Achsen[104]) der Gruppe noch die Punkte der binären Konfiguration und die zugehörigen Tangenten auf. Um alle diese Elemente auszudrücken, braucht man den Körper der 24. Einheitswurzeln (vom Grade 8).

Die *ternäre Ikosaederkonfiguration* enthält 6 Punkte A, 10 Punkte B, 15 Punkte C sowie die entsprechende Anzahl von Geraden a, b, c. Jede Gerade a enthält 5 Punkte C, jede Gerade b 3 Punkte C, jede Gerade c 2 Punkte A, 2 Punkte B und 2 Punkte C. Für die Punkte gilt natürlich das Duale. Die Punkte C und Geraden c bilden 5 Hauptdreiecke. Die 24 Operationen 5. Ordnung aus G_{60} zerfallen in zwei Systeme T, T' von je 12; nur die Operationen desselben Systems sind innerhalb der G_{60} (oder auch innerhalb der Gruppe aller Kollineationen der Ebene) gleichberechtigt. Gehört σ zu T, so gehört σ^2 zu T'. Macht man drei der Punkte A zu Ecken eines Koordinatendreiecks und gibt man einem vierten die Koordinaten $(\omega, 1, 1)$, so erhalten die beiden übrigen die Koordinaten $(1, \omega, 1)$ und $(1, 1, \omega)$[105]). Wendet man die Transformation

$$y_1 = \omega' x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_1 + \omega' x_2 + x_3, \quad y_3 = x_1 + x_2 + \omega' x_3$$

an, und vertauscht man hierauf in den Koordinaten aller Punkte ω mit ω', so werden die Konfigurationspunkte nur untereinander permutiert; man hat also eine zur Konfiguration gehörige Pseudokollineation. Die ganze Permutationsgruppe der Konfiguration ist mit der symmetrischen

104) Als Pol wird hier ein Punkt P bezeichnet, der bei einer Operation σ festbleibt, vorausgesetzt, daß er nicht auf einer Geraden g liegt, deren sämtliche Punkte bei σ festbleiben. In diesem Falle heißt P nur dann Pol, wenn noch eine andere Operation τ existiert, welche P, nicht aber alle Punkte von g festhält. Für die Bezeichnung „Achse" gilt Entsprechendes. Aus diesem Grunde sind z. B. bei der ternären Ikosaedergruppe im folgenden die Kantenpunkte der zugehörigen binären Konfiguration nicht zu den Polen gezählt. Nach dieser Erklärung gibt es stets nur eine endliche Anzahl von Polen und Achsen.

105) Aus den 6 Punkten A lassen sich 10 Paare perspektiver Dreiecke bilden, die Punkte B und Geraden b sind die Zentren und Achsen der 10 Perspektivitäten. Das Sechseck der Punkte A ist deshalb ein zehnfach *Brianchon*sches. Von dieser Seite her tritt die Figur schon bei *A. Clebsch* (Math. Ann. 4 (1871), p. 284 und 476) auf. Arbeiten von *H. Schroeter* (Math. Ann. 28 (1886), p. 457) und *E. Heß* (ebenda p. 167) schließen sich an. Aber erst bei *F. Klein* findet sich der gruppentheoretische Gesichtspunkt und die Bemerkung, daß die Figur die Projektion eines Ikosaeders ist.

Gruppe von fünf Dingen isomorph. Die Kollineationen bewirken unter den fünf Hauptdreiecken alle geraden, die Pseudokollineationen alle ungeraden Vertauschungen; die letzteren vertauschen die oben genannten Systeme T, T'. An Polen und Achsen besitzt die G_{60} noch die Ecken- und Flächenpunkte der binären Ikosaederkonfiguration auf $\varkappa$, sowie die zugehörigen Tangenten. Alle diese Elemente können wieder in einem Körper 8. Grades, dem der 15. (oder 30.) Einheitswurzeln geschrieben werden.

Bei den Gruppen G_{216}, G_{168}, G_{360} stellt Π eine Pseudokorrelation (speziell eine Antireziprozität) dar, und man kann, ohne den zur Gruppe gehörigen Zahlkörper zu erweitern, das Koordinatensystem so einrichten, daß zwei durch Π aufeinander bezogene Elemente konjugiert-komplexe Koordinaten haben. Den unten bei den einzelnen Konfigurationen angegebenen Koordinatensystemen kommt diese Eigenschaft zu.

Alle in der G_{216} enthaltenen Involutionen und Diedergruppen kommen schon in einer ausgezeichneten Untergruppe G_{18} vor. Wir bezeichnen die zugehörige Konfiguration deshalb auch als „G_{18}-Konfiguration“. Dieselbe enthält zwei Arten von Elementen: 9 Punkte A (Geraden a), welche den Involutionen, und 12 Punkte B (Geraden b), welche den Diedergruppen (der Ordnung $2 \cdot 3$) entsprechen. Die Punkte A und Geraden b bilden eine $(9_4, 12_3)$, die Punkte B und Geraden a eine $(12_3, 9_4)$ (s. Nr. 5)[106]. Die Punkte B und Geraden b setzen sich zu vier Dreiecken Δ zusammen. Dieselben bleiben bei den Operationen von G_{18} invariant, erfahren durch die Kollineationsgruppe G_{216} alle geraden, durch die Pseudokollineationen (ebenso durch die Korrelationen) der erweiterten Gruppe alle ungeraden Permutationen. Man kann so verfügen, daß ein Dreieck Δ Koordinatendreieck wird, und die Koordinaten x_1, x_2, x_3 der übrigen Punkte B und Geraden b durch $x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = 1$ definiert sind. Die Geraden a und b schneiden sich außer in den Punkten B noch in 36 Punkten C, deren auf jeder Geraden b drei, auf jeder Geraden a vier liegen. Auf jeder Geraden a bilden die Punkte B und C die acht Ecken-Flächenpunkte einer binären Tetraederkonfiguration, die von den a invariant lassenden Operationen der G_{216} hervorgerufen wird. Zu ihr gehören sechs Kantenpunkte D. Im ganzen hat man 54 Punkte D. Den Punkten C und D stehen ebensoviele Geraden c, d gegenüber. Alle diese Elemente sind Pole und Achsen der G_{216}. Außer ihnen gibt es nur noch 72 Pole E und Achsen e, die sich zu 24 Dreiecken anordnen. Jede der vier

106) Vgl. III C 5 (*Kohn*) Nr. 15—18, insbesondere p. 476, vorletzte Zeile ff.

äquianharmonischen Kurven 3. Ordnung, die in den Punkten A ihre Wendepunkte haben, geht durch die Ecken von sechs dieser Dreiecke[107]). Alle 72 Punkte E liegen auf einer Kurve 6. Ordnung, welche bei allen Operationen der G_{216} invariant ist. Die Schreibung aller Pole und Achsen der G_{216} erfordert den Körper der 36. Einheitswurzeln (vom Grade 12).

Die G_{168}[108]) ist isomorph mit der Kongruenzgruppe

$$y_1 \equiv ax_1 + bx_2, \quad y_2 \equiv cx_1 + dx_2 \pmod{7},$$

wenn $x_1, x_2 (y_1, y_2)$ nur ihren Verhältnissen nach in Betracht kommen und nur solche Substitutionen betrachtet werden, für welche $ad - bc$ quadratischer Rest von 7 (und natürlich nicht $\equiv 0$) ist. Diese Gruppe ist einfach[109]). Läßt man für $ad - bc$ auch quadratische Nichtreste zu, so hat man eine Gruppe von 336 Operationen. Mit dieser ist die volle Permutationsgruppe der zur G_{168} gehörigen Konfiguration isomorph. Diese Konfiguration enthält zwei Arten von Punkten und Geraden: 21 Punkte A (Geraden a), den Diedergruppen der Ordnung $2 \cdot 4$ (oder den Involutionen) entsprechend, und 28 Punkte B (Geraden b), welche den Diedergruppen von der Ordnung $2 \cdot 3$ entsprechen. Die Punkte A und Geraden a bilden eine 21_4, die Punkte A und Geraden b eine $(21_4, 28_3)$, die Punkte B und Geraden a eine $(28_3, 21_4)$. Kein Punkt B liegt auf einer Geraden b. Die vier Punkte A einer Geraden a bilden einen harmonischen Wurf. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems gehen die Punkte A aus $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(\eta, 1, 1)$, die Punkte B aus $(1, 1, 1)$, $(\eta', 1, 0)$, $(1 - \eta', 1, 1)$ durch Permutation der Koordinaten hervor. Durch Vertauschung von η mit η' erhält man aus einem Punkt die zugehörige Gerade. *F. Klein* gab eine Aufzählung aller Untergruppen der G_{168}, unter denen besonders 14 Oktaedergruppen bemerkenswert sind. Diese sowie die zugehörigen Konfigurationen treten zwar innerhalb der vollen Permutationsgruppe der G_{168}-Konfiguration als gleichberechtigt auf, in bezug auf die Kollineationsgruppe aber zerfallen sie in zwei Systeme zu je sieben. Den 14 Oktaederkonfigurationen entsprechend besitzt die Konfiguration der G_{168} 14 Hauptdreiecke. Jeder Punkt A tritt in je einer Oktaederkonfiguration eines jeden der beiden Systeme als Ecken-, in je zweien als Kantenpunkt auf. Einer Oktaederkonfiguration gegenüber spalten sich die sieben des

---

107) Hierzu und für die folgende Angabe vgl. III C 5, Nr. 38, (*Kohn*), wo auch die einschlägige Literatur angegeben ist.

108) *F. Klein*, Math. Ann. 14 (1879), p. 428. *H. Weber*, Algebra II (2. Aufl. 1899), § 88, § 133 ff. Vgl. I B 3f., Nr. 16, (*Wiman*).

109) *H. Weber*, Algebra II, § 82.

andern Systems in drei und vier. Mit dreien hat die Konfiguration je eine Ecke des Hauptdreiecks (und die zugehörige Gegenseite), mit den übrigen vieren je einen Flächenpunkt B gemein. Zu jeder Oktaederkonfiguration gehört ein Kegelschnitt $\varkappa$ und auf diesem eine binäre Oktaederkonfiguration. Die Eckenpunkte C und Flächenpunkte D derselben sind vier- bzw. dreizählige Pole der G_{168}. Man hat 42 Punkte C, 56 Punkte D. Jeder Kegelschnitt $\varkappa$ wird von drei Kegelschnitten des andern Systems in einem Punktepaar C (und noch zwei andern Punkten) geschnitten, von den übrigen vieren in je einem Punktepaar D berührt. Außer den Punkten A, B, C, D und den zugehörigen Geraden besitzt die G_{168} noch 24 siebenzählige Pole E, die mit den zugehörigen Achsen e acht Dreiecke bilden. Es sind dies die Fundamentaldreiecke der acht Untergruppen 7. Ordnung der G_{168}.

Es gibt eine Kurve 4. Ordnung, die bei allen Operationen der G_{168} invariant bleibt. Ihre Wendepunkte sind die Punkte E, ihre Wendetangenten die Geraden e, ihre Doppeltangenten die Geraden b und die Berührungspunkte dieser Tangenten die Punkte D[110]).

Die G_{360} ist der alternierenden Gruppe von sechs Elementen $1, \dots 6$ isomorph[111]), ihre Operationen mögen deshalb durch die Substitutionen dieser Elemente bezeichnet werden. Die zugehörige Konfiguration wurde von *F. Gerbaldi*[112]) und *W. Burnside*[113]) untersucht. Sie besteht aus 36 (innerhalb der G_{360}) gleichberechtigten Punkten A (Geraden a), 120 Punkten B (Geraden b), 45 gleichberechtigten Punkten C (Geraden c). Diese Elemente entsprechen den Diedergruppen der Ordnungen $2 \cdot 5$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, die letzteren auch den Involutionen, also Substitutionen von der Form $(ik)(lm)(n)(p)$. Es bilden A und c eine $(36_5, 45_4)$, B und c eine $(120_3, 45_8)$, C und c eine 45_4. Die 120 Punkte B und Geraden b gruppieren sich zu 40 Dreiecken Δ. Andere Inzidenzen finden nicht statt. Die 40 Dreiecke zerfallen in zwei Systeme S, S' zu je 20; nur die zu demselben System gehörigen Dreiecke (bzw. ihre 60 Punkte oder Geraden) sind innerhalb der G_{360} gleichberechtigt. Die Dreiecke des Systems S sind die Fundamentaldreiecke in den Operationen vom Typus $(ikl)(m)(n)(p)$, während die andern den Operationen $(ikl)(mnp)$ entsprechen. Die Konfiguration besitzt ferner zwei Systeme U, U' von je 15 Hauptdreiecken, die von den Elementen C, c gebildet werden. Zu einem Dreieck aus U gehören drei Involutionen $(ik)(lm)$, $(il)(km)$, $(im)(kl)$, zu einem Dreieck aus

110) *F. Klein*, l. c.[108]) p. 437 ff.

111) *A. Wiman*, Math. Ann. 47 (1896), p. 531.

112) Palermo Rend. 12 (1898), p. 23.

113) London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 54.

U' drei Involutionen $(ik)(lm)$, $(ik)(np)$, $(lm)(np)$. Wie bei der Ikosaedergruppe, so teilt sich auch bei der G_{360} das System der Operationen 5. Ordnung — 144 an Zahl — in zwei gleichgroße Systeme T, T'.

Die G_{360} enthält zehn Gruppen G_{18}, die den zehn möglichen Einteilungen von sechs Dingen in zwei Tripel entsprechen. Die G_{360} enthält ferner zwei Systeme I, I' von je sechs Ikosaedergruppen. Die Gruppen aus I erhält man, indem man je eines von sechs Elementen festhält, die übrigen den geraden Permutationen unterwirft; die andern stellen sich als die sechs möglichen transitiven Gruppen der sechs Elemente vom Typus der Ikosaedergruppe dar. Die Konfiguration der G_{360} enthält demgemäß zehn G_{18}-Konfigurationen und zwei Systeme von je sechs Ikosaederkonfigurationen. Die Punkte A, B, C sind die Ecken-, Flächen-, Kantenpunkte der Ikosaederkonfigurationen. Die G_{18}-Konfigurationen setzen sich nur aus den Elementen B, b, C, c zusammen, wobei B, b dieselbe Bedeutung wie früher (p. 510, Z. 20) hat, C, c aber die Stelle des früheren A, a vertritt. Die in den zehn G_{18}-Konfigurationen auftretenden $10 \cdot 4$ Dreiecke Δ sind die 40 Dreiecke Δ der G_{360}-Konfiguration. Jede G_{18}-Konfiguration enthält zwei Dreiecke aus S, zwei aus S'. Die in den sechs Ikosaederkonfigurationen des Systems I (I') auftretenden $6 \cdot 10$ Punkte B und Geraden b sind die Elemente des Systems S (S'), je zwei dieser sechs Konfigurationen haben immer eins der 15 Hauptdreiecke des Systems U (U') gemein, welches auch das gemeinsame Poldreieck der zu den Ikosaederkonfigurationen gehörigen Kegelschnitte $\varkappa$ darstellt. Die sechs Kegelschnitte des Systems I (I') schneiden sich in den $4 \cdot 15$ Punkten B des Systems S (S'). Die Punkte B sind zugleich die Flächenpunkte der auf den Kegelschnitten $\varkappa$ gelegenen binären Ikosaederkonfigurationen. Die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems bezeichnen auf diesen reguläre Tetraeder (äquianharmonische Würfe). Je zwei Ikosaederkonfigurationen verschiedener Systeme haben allemal je einen Punkt A, die zugehörige Gerade a und die mit A und a inzidenten Geraden c und Punkte C gemein. Die zugehörigen Kegelschnitte haben doppelte Berührung. Im ganzen hat man 72 solche Berührungspunkte D; es sind die Eckenpunkte der binären Ikosaederkonfigurationen auf den Kegelschnitten $\varkappa$[114]. Auf jeder Geraden a hat man zwei harmonische Punktepaare A, durch welche ein drittes zu den beiden ersten harmonisches Paar E bestimmt ist. Man hat 90 Punkte E. Die Punkte A, B, C, D, E sind die sämtlichen Pole der G_{360}.

Von einer ternären Ikosaederkonfiguration ausgehend, welche 15

114) Das System der $2 \cdot 6$ Kegelschnitte $\varkappa$ kommt schon 1882 bei *F. Gerbaldi* vor, Torino Atti 17, p. 566.

Punkte C und Geraden c enthält, gelangt man zur G_{360}-Konfiguration wie folgt: Man bestimme die Flächenpunkte der zugehörigen binären Ikosaederkonfiguration. Es seien P_1, P_2 die beiden Systeme von je fünf regulären Tetraedern, zu denen sich die 20 Flächenpunkte auf $\varkappa$ anordnen lassen. Man betrachte die $5 \cdot 4$ Punkte des einen der beiden Systeme als Ecken von fünf vollständigen Vierecken und bilde aus den Tangenten der $5 \cdot 4$ Punkte des andern fünf vollständige Vierseite. Dann geben die Seiten der vollständigen Vierecke und die Ecken der vollständigen Vierseite die noch fehlenden 30 Geraden c und Punkte C. Die Elemente A, B, a, b stellen die übrigen Schnittpunkte der Geraden c und Verbindungsgeraden der Punkte C dar. Es läßt sich daher jede Ikosaederkonfiguration auf zwei Arten zu einer G_{360}-Konfiguration erweitern. Dasselbe gilt von der G_{18}-Konfiguration[115]).

Die volle Permutationsgruppe der G_{360}-Konfiguration wird realisiert durch die Kollineationsgruppe $G_{360} = H_0$, ein System H_1 von Pseudokollineationen, welche ω mit ω' vertauschen, ein System H_2, welches ε mit ε' vertauscht, endlich ein System H_3, durch welches sowohl ω mit ω' als auch ε mit ε' vertauscht wird. Jedes dieser Systeme umfaßt 360 Pseudokollineationen. Entsprechend hat man neben einem System K_0 von 360 Korrelationen noch drei Systeme K_1, K_2, K_3 von je 360 Pseudokorrelationen. Die Operation Π gehört zu K_2. Die Systeme $H_0 + H_1$, $H_0 + H_2$, $H_0 + H_3$ stellen ausgezeichnete Untergruppen der vollen Permutationsgruppe dar; die letzte ist der symmetrischen Gruppe isomorph, indem sie die Ikosaederkonfigurationen eines jeden der Systeme I, I' auf alle Arten vertauscht. Durch H_1 und H_2 werden die Systeme I, I' (und damit auch S, S' sowie U, U') miteinander vertauscht, durch H_1 und H_3 die beiden Systeme T, T' von Operationen 5. Ordnung. Die Korrelationen vertauschen ebenfalls I und I'.

15. Konfigurationen aus endlichen Kollineationsgruppen: quaternäres Gebiet. Nur einzelne der quaternären Kollineationsgruppen sind hinsichtlich der zugehörigen Konfigurationen näher untersucht worden.

Für die mit der symmetrischen Gruppe von 7 Dingen holoedrisch isomorphe Gruppe $G_{7!}$ von Kollineationen und Korrelationen hat *H. Maschke* eine bemerkenswerte Konfiguration angegeben[116]). Zu der genannten Gruppe gelangte *F. Klein* durch die Einführung überzähliger Linienkoordinaten, welche den beiden Bedingungen $\sum_{i=0}^{6} x_i = 0$,

115) Von der G_{18}-Konfiguration ausgehend gelangt *W. Burnside* zur G_{360}-Konfiguration, l. c.[113]).

116) Math. Ann. 36 (1890), p. 190.

$\sum_{i=0}^{6} x_i^2$ genügen (s. Enz. I B 3f., *Wiman*, Nr. **19**). Die geraden Permutationen der 7 Koordinaten stellen Kollineationen, die ungeraden Korrelationen dar. Die Zahlen 3, $\eta, \eta, \eta, \eta', \eta', \eta'$, wo η dieselbe Bedeutung wie in Nr. **14** hat, stellen die Koordinaten einer Geraden dar. Dieselbe wird durch die Operationen von $G_{7!}$ in 140 Geraden (*Hauptgeraden*) übergeführt. Es gibt 120 Punkte (*Hauptpunkte*) und 120 Ebenen (*Hauptebenen*), die mit je 7 Hauptgeraden inzident sind; mit ihnen sind alle Schnittpunkte und Verbindungsebenen von Hauptgeraden erschöpft. Die Haupt-Punkte, -Geraden und -Ebenen bilden eine Konfiguration $(120_7{}^{21}, 140_6{}^6, 120_{21}^7)$, deren Punkte und Ebenen durch die $G_{7!}$ sämtlich untereinander vertauscht werden. Jede Konfigurationsebene wird durch die 21 in der $G_{7!}$ enthaltenen Nullsysteme — welche den Vertauschungen je zweier Koordinaten entsprechen — in die mit ihr inzidenten Hauptpunkte übergeführt. Die 6 mit einer Konfigurations-Geraden inzidenten Punkte (Ebenen) bilden einen bestimmten projektiven Wurf, sie gruppieren sich in zwei Tripel $A_1 A_2 A_3$; $B_1 B_2 B_3$ und drei Paare $A_i B_i (i = 1, 2, 3)$ derart, daß $A_i B_k$ und $A_k B_i$ einander harmonisch trennen[117]). Die 120 Hauptpunkte liegen ferner zu je dreien auf 840 Geraden (*Nebengeraden*), durch jede derselben gehen zugleich drei Hauptebenen. Die Haupt-Punkte und -Ebenen bilden mit den Nebengeraden eine Konfiguration $(120_{21}^{21}, 840_3{}^3, 120_{21}^{21})$.

Ein anderes zur $G_{7!}$ gehöriges Geradensystem betrachtet *E. Meyer*[118]); es sind die 720 Geraden g, deren Koordinaten eine Permutation der Werte $\gamma^k \left(k = 0, 1, \ldots, 6, \gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}\right)$ darstellen. Es gibt 120 Tetraeder, deren Kanten von Geraden g gebildet werden. Jede Gerade g kommt in *einem* Tetraeder vor, und es gruppieren sich daher diese Geraden in 360 Paare von *Gegengeraden*, welche als Gegenkanten in einem Tetraeder auftreten. Außer den Tetraeder-Ecken und -Ebenen gibt es noch 840 Punkte P und ebensoviele Ebenen π, welche mit je drei Geraden g inzident sind. Jede Gerade g ist entweder mit 7 Punkten P und keiner Ebene π (Gerade *erster Art*) oder mit 7 Ebenen π und keinem Punkt P (Gerade *zweiter Art*) inzident. Zwei Gegengeraden sind stets von verschiedener Art. Daher enthält jedes Tetraeder eine *ausgezeichnete* Ecke, deren drei Kanten von derselben

117) *Maschke* bezeichnet einen solchen Wurf als *metharmonisch*. Wenn man einem von 2 regulären Dreiecken und 3 Quadraten begrenzten Prisma die Kugel umschreibt und ihre Punkte, wie üblich, als komplexe Zahlen deutet, so geben die 6 Ecken des Prismas den metharmonischen Wurf; l. c.[116]) p. 201 Anm.

118) Math. Ann. 65 (1908), p. 299.

Art sind. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß sie von der zweiten Art sind, und die der Ecke gegenüberliegende *ausgezeichnete* Fläche des Tetraeders enthält demgemäß drei Geraden erster Art. Die ausgezeichneten Ecken und Ebenen der 120 Tetraeder sind mit den Haupt-Punkten und -Ebenen *Maschkes* identisch.

Eine aus der Gruppe von $25920 = 3 \cdot 40 \cdot 216$ Operationen[119]) entspringende Konfiguration hat *A. Witting* untersucht[120]). Die Gruppe besitzt 40 gleichberechtigte Untergruppen der Ordnung $3 \cdot 216$. Bei jeder derselben bleibt ein Punkt A und eine Ebene α fest. Es gibt 90 Geraden g, deren jede mit vier Punkten A und vier Ebenen α inzident ist, und die einander paarweise zugeordnet sind. Die Punkte A, Ebenen α und Geraden g bilden eine Konfiguration $(40_{12}{}^9, 90_4{}^4, 40_9{}^{12})$. Es gibt keine andere Konfiguration mit diesem Symbol. Die zu einer Ebene α gehörige Untergruppe der Ordnung $3 \cdot 216$ enthält drei Operationen (einschl. Identität), bei denen jeder Punkt von α fest bleibt. Die genannte Untergruppe ergibt daher für α eine ternäre G_{216}. Die zugehörige Konfiguration $(12_3, 9_4)$ wird von den in α gelegenen Konfigurationselementen gebildet. Die Konfiguration $(40_{12}{}^9, 90_4{}^4, 40_9{}^{12})$ besitzt 240 Diagonalen d, jede von ihnen ist mit zwei Punkten A und zwei Ebenen α inzident. Die Elemente A, α, d sind Ecken, Flächen und Kanten von 40 Tetraedern T. Ecken und gegenüberliegende Flächen sind zugeordnete Elemente der Konfiguration. Die Flächen eines solchen Tetraeders enthalten sämtliche Konfigurationspunkte. Man kann so verfügen, daß eins der Tetraeder Koordinatentetraeder wird und die übrigen Konfigurationspunkte und -ebenen die Koordinaten $(0, -\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $(\varepsilon_1, 0, -\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0, \varepsilon_4)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 0)$ erhalten, wo für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ beliebige (gleiche oder verschiedene) dritte Einheitswurzeln zu setzen sind. Je zwei zugeordnete Elemente A, α haben dann konjugiert-komplexe Koordinaten.

119) I B 3f, Nr. 23, (*Wiman*).

120) Dissertation, Göttingen 1887, Math. Ann. 29 (1886), p. 168.

(Abgeschlossen im April 1910.)

III AB 6. DARSTELLENDE GEOMETRIE.

Von

E. PAPPERITZ.

IN FREIBERG (SA).

Inhaltsübersicht.

I. Ziele, Grundlagen und Methoden.

II. Geometrische Darstellungsverfahren vor *Monge*.

III. Begründung eines wissenschaftlichen Systems.

Literatur.

Anmerkung: In das Literaturverzeichnis sind außer wenigen älteren Werken nur Lehrbücher eingereiht worden. Die Hauptwerke aus verwandten Wissensgebieten und die Monographien werden im Texte zitiert.

Ältere Werke.

Albrecht Dürer, Underweysung der Meßung mit dem Zirkel und richtscheyt in Linien Ebnen un̄ gantzen Corporen, Nürnberg 1525 und 1538. Lateinische Ausg. Instit. geometr. libri IV, etc. Paris 1532.

Guidi Ubaldi (e Marchionibus Montis) perspectivae libri sex, Pisauri 1600.

Simon Stevin, De la scénographie, dite vulgairement perspective. Oeuvres math. 1605—1608, V 1. Ausg. v. A. Girard, Leyden 1634.

G. Desargues, Méthode universelle de mettre en perspective les objects donnés réellement, Paris 1636. Coupe des pierres, 1640. Oeuvres de *Desargues* réunies et analysées par *M. Poudra*, Paris 1876.

W. J. s'Gravesande, Essay de perspective, Haag 1711, Rotterdam 1717.

Brook Taylor, New principles of linear perspective, London 1719.

F. A. Frezier, La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie, Straßburg 1737—39.

J. H. Lambert, Freye Perspective, oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen. Zürich 1744 und 1759. — Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae, Augsburg 1760.

Lehrbücher.

G. Monge, Leçons de géométrie descriptive, données à l'École normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes. Journ. des Écoles Normales, I—IV, Paris 1795. Erste Buchausgabe: Géométrie descriptive, leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la république, Paris 1798. 7. Aufl. 1847. Die späteren Auflagen sind zum Teil mit Ergänzungen von *J. N. P. Hachette* und *B. Brisson* (Théorie des ombres et de la perspective, Paris 1838.) versehen. Deutsch von *R. Haussner,* Leipzig 1900.

S. F. Lacroix, Complémens des élémens de géométrie, essais de géométrie sur les plans et les surfaces, Paris 1796. 7. Aufl. 1840.

Fr. Weinbrenner, Architekton. Lehrbuch, Tübingen I. 1810, II. 1819.

J. N. P. Hachette, Traité de Géométrie descriptive, Paris 1822.

B. E. Cousinery, Géométrie perspective ou principes de projection polaire appliquée à la description des corps, Paris 1828.

G. Schreiber, Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach *Monges* géométrie descriptive vollständig bearbeitet, Karlsruhe und Freiburg 1828—29. Malerische Perspektive, Karlsruhe 1854.

J. Adhémar, Traité de perspective linéaire, Paris 1838.

O. Möllinger, Isometrische Projektionslehre, Solothurn 1840.

B. Gugler, Lehrb. d. beschreib. Geom., Nürnberg 1841, 4. Aufl. Stuttgart 1880.

C. F. A. Leroy, Traité de géométrie descriptive suivie de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques etc. 2e éd. Paris 1842. Traité de stéréométrie, Paris 1844. 11e éd. par *E. Martelet,* comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe de pierres et la charpente, Paris 1887, Deutsch von *E. F. Kauffmann,* Stuttgart 1838.

Th. Olivier, Cours de géométrie descriptive, Paris I. 1843. 2. Aufl. 1852. II. 1844, mit zahlreichen Supplementen: Développements (1843), Compléments (1845), Additions (1847), Applications (1847).

G. Bellavitis, Lezioni di geometria descrittiva, Padua 1851. 2. Aufl. 1868.

J. M. de la Gournerie, Discours sur l'art du trait et la géométrie descriptive, Paris 1855. Traité de perspective linéaire, Paris 1859, 1884, 1898. Traité de géométrie descriptive, Paris 1862—1864.

J. L. Weisbach, Anleitung zum axonometrischen Zeichnen, Freiberg 1857.

R. Skuhersky, Orthographische Parallelperspektive, Prag 1858.

Fr. Tilšer, Die Lehre der geometrischen Beleuchtungskonstruktionen, Wien 1862, System der Perspektive, Prag 1867.

E. Koutny, Theorie der Beleuchtung krummer Flächen vom 2. Grade bei parallelen Lichtstrahlen, Brünn 1867.

R. Staudigl, Grundzüge der Reliefperspektive, Wien 1868. Die axonometrische und schiefe Projektion, Wien 1875.

G. A. v. Peschka und *E. Koutny,* Freie Perspektive in ihrer Begründung und Anwendung, Hannover 1868.

G. A. v. Peschka, Kotierte Ebenen (Kotierte Projektionen) und deren Anwendung, Brünn 1877. Darstellende und projektive Geometrie, Wien 1882—85. Neue Aufl. I, Leipzig u. Wien 1899. Freie Perspektive, Leipzig 1888—1889.
J. Schlesinger, Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie, Wien 1870.
W. Fiedler, Die darstell. Geometrie, Leipzig 1871. 2. Aufl. u. d. Titel: Die darst. Geometrie in organ. Verbindung mit der Geometrie der Lage 1875, 3. Aufl. 1883—88. Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme, Leipzig 1882.
F. A. Klingenfeld, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Nürnberg 1871—76.
L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, Leipzig 1871. Grundzüge der Reliefperspektive nebst Anwendung zur Herstellung reliefprojektivischer Modelle, Leipzig 1883.
A. Mannheim, Cours de géométrie descriptive, Paris 1880.
E. Reusch, Die stereographische Projektion, Leipzig 1881.
D. Tessari, Projezioni assonometriche ortogonali et oblique, Torino 1882.
F. Aschieri, Geometria projettiva e descrittiva, Milano 1883—1884, 2. Aufl.: Lezioni di geometria descrittiva 1895.
Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig I. 1884. II. 1887.
K. Rohn und *E. Papperitz*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig 1893—1896. 3. Aufl. 1906.
M. d'Ocagne, Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale, Paris 1896.
E. Lebon, Traité de géométrie descriptive et géométrie cotée, Paris 1901.
F. Enriques, Lezioni di geometria descrittiva, Bologna 1902.
Fr. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere über die Photogrammetrie, Leipzig und Berlin 1904.
R. Schüßler, Orthogonale Axonometrie, Leipzig u. Berlin 1905.
G. Loria, Lezioni di geometria descrittiva, Genua 1906, Vorlesungen über darstellende Geometrie I, deutsch von *Fr. Schütte*, Leipzig und Berlin 1907.
E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I., Leipzig und Berlin 1908.
J. v. Dalwigk, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I., Leipzig und Berlin 1910.

Historische Schriften.

M. Poudra, Histoire de la perspective ancienne et moderne, Paris 1864.
L. Cremona, Sulla storia della prospettiva antica e moderna, Riv. ital. 5, 1865.
Chr. Wiener, Lehrb. d. darstell. Geom., Leipzig 1884, I 1, Geschichte der darstellenden Geom.
F. J. Obenrauch, Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie usw., Brünn 1897.
M. Cantor, Vorl. über Geschichte der Mathematik IV, Leipzig 1908, XXV. Abschn. Perspektive und darstellende Geometrie, v. *G. Loria*.

I. Ziele, Grundlagen und Methoden.

1. Geometrische Zeichen- und Bildersprache. Bestimmung der Lage, Gestalt und Größe der Gebilde. Die *darstellende* (beschreibende oder deskriptive) *Geometrie* lehrt *geometrische Gedanken* durch *gra-*

phische oder *plastische Bilder* ausdrücken. Sie umfaßt die den geometrischen Begriffen selbst entnommenen Mittel zur *Bestimmung* der *Lagebeziehungen* zwischen den geometrischen *Elementen*, der *Gestalt* und *Größe* der aus ihnen erzeugten höheren *Gebilde* oder *Figuren*. Sie ist also fürs erste, wie jede Sprache und Schrift, ein Verständigungsmittel im geistigen Verkehr. Sie war und ist im besonderen die Weltsprache der Ingenieure. Als eine *rein geometrische Zeichensprache*[1]) aber bildet sie die Ergänzung der *arithmetischen Symbolik* oder *Formelsprache*. Ihre Entwicklungsgeschichte führt uns weit zurück bis zu den ersten Anfängen menschlicher Kultur. Denn erst der Versuch, Dinge abzubilden oder abzuzeichnen und primitive Abbildungen symbolisch zu gebrauchen, ließ die Schrift entstehen, wurde der Ursprung der bildenden Künste und in Verbindung mit dem Begriffe des Maßes die Grundlage der Geometrie.

2. Korrespondenz zwischen Begriff und Zeichen. Original und Bild. Soll die darstellende Geometrie nicht bloße *Zeichenkunst* bleiben, sondern eine *Wissenschaft* sein, so muß sie das wesentliche Erfordernis einer *Begriffsschrift* erfüllen. Zwischen ihren *Zeichen* und den *Begriffen* oder *Begriffsverknüpfungen*, die sie bedeuten, muß eine eindeutige, wechselseitige *Korrespondenz*[2]) bestehen. Man muß also nicht nur von dem darzustellenden Gegenstande, dem *Original*, nach genauer Vorschrift, die auf der Definition des Objektes fußt, zu seinem *Bilde* übergehen können, sondern auch umgekehrt aus dem Bilde unzweideutig auf die geometrischen Eigenschaften des Originales und auf seine Lagebeziehungen zu anderen Objekten *zurückschließen* können. Der bildenden *Kunst*, die sich meist nur auf die individuelle Beobachtungsgabe verläßt nnd sich nur selten auf wissenschaftlich begründete Darstellungsregeln stützt, stehen *Freiheiten* zu, weil sie über komplementäre Ausdrucksmittel verfügt, die der Wissenschaft fremd sind. Sie läßt uns die Eigenschaften des Gegenstandes aus dem Bilde mehr erraten als erschließen. Dem *sprachlichen Ausdruck* mathematischer Gedanken gegenüber besitzt das exakte *graphische Bild* den Vorzug fast unmittelbarer *Verständlichkeit*. Dies hat von jeher wissenschaftliche Schriftsteller veranlaßt, dem Texte ihrer Werke erläuternde Figuren beizufügen. Freilich müssen diese, um ihren Zweck zu erfüllen, den Regeln der Zeichenkunst auch wirklich entsprechen. Hinter

1) *E. Papperitz*, Über die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie und ihre Entwicklung bis zur systematischen Begründung durch *G. Monge*, Freiberg 1901.

2) *G. Loria*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, deutsch von *Fr. Schütte*, 1, Leipzig 1907, p. 1.

der Bezeichnung „schematische Figur" verbirgt sich zuweilen der Mangel an deskriptivem Können. Hiermit soll nicht bestritten werden, daß schematische Andeutungen wegen ihrer Übersichtlichkeit häufig zweckentsprechend sind.

3. Die darstellende Geometrie als angewandte und als deduktive mathematische Wissenschaft. Bisher ist die darstellende Geometrie nur im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit gekennzeichnet worden. Damit ist ihr Zweck und ihr Wesen nicht erschöpft. Seit *G. Monge* (1746—1818) seine „Géométrie descriptive" veröffentlichte[3]), hat sie sich zu einer selbständigen *mathematischen Wissenschaft* entwickelt. Diese Disziplin liefert uns nicht nur prägnante und exakte Ausdrucksmittel für geometrische Begriffe, Operationen und Sätze, sondern gewährt uns auch einen klaren Einblick in den *organischen Aufbau*, die *Struktur* der geometrischen Gebilde. Die ihr eigenen *Transformationsgruppen* lassen uns den gesetzmäßigen *Formenwandel* der Raumgebilde, ihre *invarianten Eigenschaften*, ihre inneren *Verwandtschaften* und ihre *Abstammung* von gewissen einfachen *Urformen* erkennen. Und so gut man „im Kopfe" rechnen, überhaupt in irgendeiner Sprache denken kann, ohne die Gedanken schriftlich zu fixieren oder auszusprechen, so kann man auch die geometrischen Operationen ohne Zeichenblatt und Stift rein in Gedanken vollziehen und dabei geometrische Begriffe durch andere abbilden oder darstellen. In diesem Sinne wird die deskriptive Geometrie ein Mittel zur Erforschung mathematischer Wahrheiten. Weil also ihre Methoden uns befähigen, Sätze abzuleiten und zu beweisen, ist sie nicht bloß eine angewandte mathematische Disziplin, sondern reiht sich den deduktiven Wissenschaften ebenbürtig ein.

Ähnlich wie eine Sprache die Laute zu Silben und Wörtern, die Wörter zu Sätzen und diese zu Gedankenreihen vereinigt und dies alles mittels der Schrift symbolisch wiedergibt, verfährt auch die darstellende Geometrie. Sie geht davon aus, für die geometrischen Elemente, also für *Begriffe*, einfache, graphisch wiederzugebende *Zeichen* einzuführen, die jene vertreten und mit ihnen in einer umkehrbar eindeutigen Korrespondenz stehen. Wir wollen sie *Charaktere* nennen. Sie verbindet die Charaktere durch wohldefinierte *Operationen*, gelangt so zur *Abbildung* zusammengesetzter Raumgebilde und zur *konstruktiven Lösung geometrischer Aufgaben*. Schließlich entwickelt sie

3) Leçons données à l'École normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes. Journal des écoles normales, I—IV, Paris 1795. In Buchform zuerst 1798 erschienen.

zusammenhängende *Darstellungsmethoden*, die ebenso gut rein geometrischen Untersuchungen wie praktischen Anwendungen dienen und sich den verschiedenen Zwecken anpassen können.

4. Die graphischen Charaktere. Die *Charaktere* sind *nicht willkürlich* erfundene graphische Zeichen, deren Bedeutung auf einer stillschweigenden Übereinkunft oder auf ausdrücklicher Festsetzung beruht[4]), sondern sie haben in gewissem Sinne einen *natürlichen Ursprung*, und ihre *Bedeutung* drängt sich uns unmittelbar auf, weil ihre *Erscheinungsform* die *Vorstellung* der wesentlichen *Merkmale* jener abstrakten, intuitiven *Begriffe* erweckt, die sie vertreten. Sie wirken auf uns ähnlich wie ein Porträt, das die lebendige Erinnerung an die seelischen Eigenschaften der dargestellten Persönlichkeit hervorruft. Die realen graphischen *Bilder* sind mit den idealen geometrischen *Originalen* nicht identisch, aber sie „gleichen" ihnen, sofern die geistigen Eindrücke, die wir von beiden empfangen, in wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen. Solche Abbildungen können *„ikonische"* (εἰκών, Bildnis) genannt werden. Auf ihrer Anwendung beruht die *anschauliche Deutlichkeit* und *Übersichtlichkeit* der Verfahren und der Ergebnisse der deskriptiven Geometrie. Indessen werden auch „anikonische" Charaktere benützt, z. B. in der Cyklographie (Nr. 45).

Wie jeder Mathematiker numerisch und symbolisch rechnen können muß, um analytisch zu denken, muß er auch „geometrisch schreiben, lesen, rechnen", d. h. *zeichnen, Zeichnungen verstehen* und *konstruieren* lernen, bevor er dahin gelangt „geometrisch zu denken". Dies zeigt auch die Geschichte der Mathematik; denn aus der Blüte der *darstellenden Geometrie* hat sich als reife Frucht die neuere synthetische Geometrie, die *Geometrie der Lage* entwickelt. Gleichzeitig ist aber hiermit die hohe *erzieherische Bedeutung* unserer Disziplin gekennzeichnet, die schon von *G. Monge*[5]) betont wurde, die heute allgemein anerkannt wird[6]), und die darin besteht, daß sie das wirk-

4) Letzteres gilt schon von den „natürlichen" Zahlzeichen, in erhöhtem Maße aber von den „künstlichen" Zahlzeichen, der Ziffernschrift und der arithmetischen Symbolik, (I A 1, Grundlagen der Arithmetik, *Schubert*). Aber auch hier läßt sich ein Grundsatz erkennen. Wie sich die logische Entwicklung der arithmetischen Operationen nach dem „Prinzip der Permanenz formaler Gesetze" (*H. Hankel*, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, p. 10) richtet, so könnte man bei jeder Art mathematischer Symbolik von einem „Prinzip der Konsequenz in der Bezeichnungsweise" sprechen.

5) Géométrie descriptive, 1798, p. 105.

6) *F. Klein* hat in einer akademischen Rede (Leipzig 1880) ausgesprochen: „Ist es nicht eine ebenso würdige Aufgabe der Mathematik richtig zu zeichnen, wie die, richtig zu rechnen?" Zeitschr. f. math.-nat. Unterricht 26, 1895, p. 534.

samste, vielleicht das einzige Mittel bildet, um die *geometrische Vorstellungskraft* zu beleben, zu entwickeln und zu schulen[7]).

5. Die Entstehung und die Darstellung geometrischer Gebilde. Daß die darstellenden Geometer der *Erzeugung* räumlicher Figuren aus einfachen Elementen, etwa durch geregelte Bewegung von Punkten, Geraden, Kreisen, Ebenen, Kugeln usw., oder ihrer *Ableitung* aus bekannten Formen durch *Transformationen*, *Verwandtschaften* die eingehendsten Untersuchungen widmen, hat einen natürlichen Grund. Die *geometrische Definition* einer Figur ist ja eine *begriffliche Beschreibung*, die implicite das Gesetz der Entstehung ausspricht. Umgekehrt, die genaue Angabe seiner *Erzeugung* gibt nicht nur eine zureichende *Definition* des Gebildes, sondern weist uns auch den besten und nächsten Weg zu seiner *graphischen Beschreibung* oder *Darstellung*. Hat man z. B. definiert: Ein Kreis ist der Ort aller Punkte in der Ebene, die von einem gegebenen Punkte gleich entfernt liegen, so hat man schon die Existenz des Kreises behauptet und die Hypothese gemacht, daß es möglich sei, mit einem geeigneten Instrument, dem Zirkel, einen Kreis zu konstruieren oder zu zeichnen.

6. Das Konstruieren. *Konstruieren* heißt aus gegebenen Elementen durch geometrische Operationen gesuchte Elemente ableiten. *Begrifflich* kann man in jedem Raume konstruieren, *praktisch* nur im Raume von drei Dimensionen. Die *wirkliche Ausführung räumlicher Konstruktionen* kommt für die darstellende Geometrie bei der Herstellung von *Modellen* und bei der *kinematischen Darstellung von Raumfiguren* (III AB 6, Anhang, *Papperitz*) in Betracht. Die wichtigste Art des praktischen Konstruierens ist das *Zeichnen*.

Das *geometrische Zeichnen* setzt als *Operationsfeld* eine bestimmte *Zeichenfläche* oder *Tafel* voraus und erfordert weiter, daß man auf dieser gewisse Arten von *Linien* nach genauer Vorschrift beschreiben kann (daher: „*Linearzeichnen*“). Man kann in dem zweidimensionalen Gebiete die zeichnerischen Operationen auf ein Gebiet von einer Dimension, z. B. auf eine Gerade, einen Kreis oder eine andere krumme Linie, *einschränken*. Im Raume aber kann man mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln nicht zeichnen. Als *Zeichenfläche* dient fast immer eine *Ebene*, selten und nur bei besonderen Anlässen eine Kugel, ein Zylinder

---

Vgl. *P. Stäckel*, Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. XIII, 6, 1904. *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 3. Aufl., 1883, Vorrede p. VIII.

7) *Rohn* und *Papperitz*, Darstellende Geometrie, 3. Aufl., 1906, Einleitung.

oder eine andere krumme Fläche. Wir sprechen hier nur vom Zeichnen in der Ebene.

7. Postulate der Konstruktion. Die konstruktive Lösbarkeit geometrischer Aufgaben hängt von der Erfüllung gewisser Bedingungen ab. Theoretisch lassen sich diese als *Postulate der Konstruktion* formulieren, praktisch läuft dies darauf hinaus, die *notwendigen,* bzw. *zulässigen Werkzeuge* des Geometers und die mit ihnen ausführbaren *Grundoperationen* systematisch aufzuzählen. Nach *G. Loria*[8]) genügt es folgende Aufgaben lösen zu können.

In der Ebene:

1. Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden.
2. Den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden.
3. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben ist.

Im Raume:

1. Durch drei gegebene Punkte (oder einen Punkt und eine Gerade) eine Ebene zu legen.
2. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu finden.
3. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden.
4. Eine Kugel zu beschreiben, deren Mittelpunkt und Radius bekannt ist.

Da aber streng genommen nur in der Ebene diese Postulate erfüllt werden können, im Raume nicht, so bildet es, wie schon *Monge* dargelegt hat[9]), die *Hauptaufgabe der darstellenden Geometrie: die im Raume unmöglichen Konstruktionen auf die in der Ebene ausführbaren zurückzuführen.* Man erkennt sofort, daß in dem obigen System von Postulaten der *Punkt* von Anfang an als ein deskriptiv bestimmbares Element angesehen wird. Will man sich auf den Standpunkt stellen, in der darstellenden Geometrie die *Gerade* oder den *Kreis,* oder beide als *primäre Elemente*[10]) zu betrachten, den *Punkt* aber, weil er zumeist graphisch durch den Schnitt von Linien bestimmt wird, als

---

8) Vorlesungen über darstellende Geometrie, deutsch von *Fr. Schütte,* I. Leipzig 1907, p. 1.

9) Géométrie descriptive, 1798, I, 1.

10) *W. Fiedler* betont gegenüber *Monges* Auffassung der Grundprobleme: „daß die Bestimmung der geraden Linie und nicht die des Punktes das Ursprüngliche in ihrer Entwicklung sein müsse.“ Über das System in der darstellenden Geometrie, Zeitsch. Math. Phys., 8, (1863), p. 144 f. und Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage I, Vorrede, 1883.

sekundäres Element, so wird eine andere Anordnung der Postulate notwendig. Zugleich ist die Frage aufzuwerfen, ob es nicht nötig sei, jene Postulate zu ergänzen, etwa indem man als lösbare Aufgaben hinzufügt:

In der Ebene:

4. Die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises oder zweier Kreise zu finden.

Im Raume:

5. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel zu finden.

8. **Die Werkzeuge des Geometers.** Unter den deskriptiven Werkzeugen stehen der *Zirkel* und das *Lineal* in erster Reihe. Beide sind alt, und man kann nichts Bestimmtes darüber sagen, wann und wo sie eingeführt worden sein mögen. Auch welcher Art diese Instrumente ursprünglich waren, läßt sich aus den spärlichen Nachrichten schwer erkennen[11]). Wäre der Erfinder des Zirkels bekannt, so müßte ihn die Geschichte der Mathematik an rühmlicher Stelle nennen. Daß aber diese beiden Instrumente schon in vorchristlicher Zeit allgemein bekannt waren, geht daraus hervor, daß *M. Vitruvius Pollio* die zu seiner Zeit (um 10 v. Chr.) bekannten Darstellungsverfahren als „circini regulaeque modice continens usus" bezeichnet[12]).

Der *Zirkel* (*circinus, compas*) gilt, namentlich in seiner heutigen, vollkommenen Form, als ein Instrument, mit dem sich sehr genau konstruieren läßt.

---

11) Im Altertum scheinen die Handwerker statt des *Lineals* die *Richtschnur* (*κανών, στάϑμη*) benützt zu haben, wie es heute noch die Zimmerleute und Steinmetzen tun. Dies ist eine an beiden Enden festgehaltene, mit Rötel, Kreide oder dergleichen gefärbte Schnur, die angespannt und wieder losgelassen die gewollte gerade Linie auf einer ebenen Fläche abzeichnet. Der deutsche Handwerksname dafür ist „Schmitze". — Statt eines eigentlichen *Zirkels* haben sich die Alten einer Vorrichtung (*διαβήτης, τόρνος*) bedient, die zuerst aus einem Einsatzstifte und einem mittels einer Schnur daran befestigten Zeichenstifte bestanden haben mag (franz. *simbleau*). Diese Art einen Kreis zu beschreiben, bildete offenbar die Vorläuferin der Fadenkonstruktion einer Ellipse. Zum gleichen Zwecke bediente man sich wohl auch einer *Meßkette*, eines *Zirkels mit konstanter Schenkelöffnung*, eines *Streckenübertragers* oder *Eichmaßes* (vgl. *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1903). Übrigens scheint man in früheren Zeiten oft in Ermangelung vollkommenerer Zeichenmittel Punkte durch Einstechen eines spitzen Instruments, Linien durch Einritzen in die Zeichenfläche dargestellt zu haben, wie es handwerksmäßig noch heute vorkommt. Daraus erklären sich Ausdrücke, wie „aufreißen", „Riß", „Reißzeug" usw.

12) *M. Vitruvius Pollio*, De architectura libri decem I, 2. Ausgabe von *V. Rose*, Leipzig 1899, p. 10.

Das *Lineal* oder *Richtscheit* (*regula*, *règle*), das in seiner Ziehkante eigentlich nur das Modell einer geraden Linie vorstellt, gilt mit Recht, und zwar aus technischen Gründen, für weniger genau. Aber keine mechanische Erfindung, die zur exakten Geradführung eines Punktes dienen kann (wie etwa der *Peaucellier*sche Inversor) hat in der Praxis das altbewährte, handliche Instrument verdrängen können. Wenn *Euklides* definiert: die Gerade ist eine Linie, die in bezug auf ihre Punkte gleichmäßig (*ἐξ ἴσου*) liegt (III A B 1, *Prinzipien der Geometrie, Enriques*, Nr. 3), so darf sich dies der Zeichner dahin auslegen, daß es gleichgültig ist, von welcher Seite und mit welchem Teile er an zwei gezeichnete Punkte die Kante eines guten Lineales anlegt, um die Verbindungslinie zu ziehen (*Linealprobe*). Um gerade Linien auch unter anderen Bedingungen leicht zeichnen zu können, benützt der Geometer das Lineal jetzt fast ausschließlich in der Form des Zeichendreiecks.

Das *Zeichendreieck* oder *Winkelscheit* (*équerre*) ist rechtwinklig. Es ist aus dem Modell eines rechten Winkels (*Winkelmaß*, *norma*) hervorgegangen. Seine spitzen Winkel messen gewöhnlich beide 45°, oder der eine 30°, der andere 60°[13]). Verfügt man über zwei Zeichendreiecke, so kann man nicht nur *Parallelen*, sondern auch *Normalen* zu einer gegebenen Geraden zeichnen, indem man die Hypotenuse des einen Dreiecks längs einer Kante des anderen *verschiebt* und die Katheten als Ziehkanten benützt. Der rechte Winkel muß bei seiner Verdoppelung durch die *Umwendung* des Winkelscheits den gestreckten ergeben (*Winkelprobe*). Bei technischen Zeichnungen, in denen vorzugsweise das Grund- und Aufrißverfahren angewandt wird, bedient man sich oft der *Reißschiene* (ein Lineal mit zur Ziehkante rechtwinkligem Anschlagbrett, also eine besondere Art Winkelscheit). Ihr Gebrauch setzt voraus, daß das *Reißbrett* zwei zueinander rechtwinklige Kanten zum Anlegen habe.

Erfindungsgeist und Präzisionsmechanik haben zahlreiche, für spezielle Zwecke wertvolle, im allgemeinen aber für den Geometer entbehrliche *Zeicheninstrumente* hinzugefügt, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird[14]). *Lineal und Zirkel* aber bleiben die

13) Bei *E. Bings* „Kreiswinkel", der die graphische Rektifikation und Quadratur des Kreises erleichtert, verhält sich die längere Kathete zur Hypotenuse wie $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ zu 1. Vgl. *A. zur Megede*, Wie fertigt man techniche Zeichnungen? Berlin 1894, p. 59.

14) Parallelenlineale, Fluchtschienen; Strecken-, Winkel- und Dreiecksübertrager; Proportionalzirkel, Strecken- und Winkelteiler; lineale Maßstäbe, Teilkreise und Nonien; Kurvenzirkel, Storchschnäbel, Pantographen und Perspektographen usw. (III A B 6, Anhang, *Papperitz*).

Hauptinstrumente des Geometers. Die jetzt allgemein gebräuchlichen *Winkelscheitc* darf man den Linealen zurechnen. Insofern die darstellende Geometrie sich nicht allein mit Lageziehungen, sondern auch mit der Bestimmung von Größenverhältnissen der Objekte beschäftigt, benützt sie *Maßstäbe* verschiedener Art; genauer ausgedrückt: sie *bildet* sich *Maßstäbe*, denn jede *Maßangabe* erfolgt auf *deskriptivem* Wege. Die Maßstäbe selbst und die zahlreichen Instrumente, an denen sie eine wesentliche Rolle spielen, sind daher nicht unter die ursprünglichen Werkzeuge des Geometers zu rechnen.

Grundsätzlich wird man die *Auswahl unter den Werkzeugen* nicht ohne zwingenden Grund vergrößern; dagegen ist zu untersuchen, inwieweit man sich Beschränkungen auferlegen kann. Man kann lediglich den *Zirkel* zur Konstruktion benützen, wie *L. Mascheroni* (1750—1800) darlegt[15]. Das *Lineal* allein reicht nicht für alle Zwecke aus; man muß nach *J. Steiner* (1796—1863) noch wenigstens *einen Kreis* zu Hilfe nehmen können[16]. Eine Konstruktion mag *homogen*, und zwar *linear* oder *zirkular* heißen, wenn sie sich nur *eines* Instrumentes, entweder des *Lineals* oder des *Zirkels* bedient[17]. Die *kanonischen* oder *klassischen* Konstruktionen benützen nur diese beiden Werkzeuge; die *modernen* außerdem die *Winkelscheite.*

9. Die Einfachheit graphischer Konstruktionen. Operationssysteme. Geometrographie. Wir wollen die unter gegebenen Voraussetzungen möglichen Konstruktionen hier nicht im Sinne der *Prinzipienlehre* (III A B 1, *Enriques*) erörtern, sondern ihre *graphische Ausführbarkeit mit gegebenen Instrumenten und unter gegebenen Bedingungen* verfolgen. Dies ist unerläßlich, um die Versuche zur Beantwortung der von *J. Steiner*[18]) aufgeworfenen Frage zu würdigen: „Auf welche Weise jede geometrische Aufgabe, theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne, und zwar:

1) welches im allgemeinen,

2) welches bei beschränkten Hilfsmitteln, und

3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei".

---

15) Geometria del compasso, Pavia 1797, neu herausgegeben von *G. Fazzari*, Palermo 1901, deutsch von *Grüson*, Berlin 1825.

16) Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833 = Werke 1, p. 461 = Ostwalds Klassiker 60. Vorher: *J. B. Benedicti*, resolutio omnium Euclidis problematum una tantummodo circini data apertura, Venedig 1553.

17) Im algebraischen Sinne unterscheidet man konstruktive Aufgaben ersten und zweiten Grades.

18) A. a. O. (s. Anm. 16), p. 89.

Chr. Wiener (1826—1896) sucht einen Maßstab für die *Einfachheit der Konstruktionen* zu gewinnen, indem er an verschiedenen Stellen seines Hauptwerkes[19]) die zur Lösung einer Aufgabe erforderlichen *Operationen abzählt*. Dabei wird von einer *Bewertung der einzelnen Operationen* zwar noch nicht gesprochen, aber doch bereits erwähnt, daß der notwendige *Wechsel der Instrumente* nicht belanglos ist. *E. Lemoine*[20]) unternahm es seit 1888, von *E. Bernès* und *G. Tarry* unterstützt, die schwierige Frage durch *systematische Zergliederung der Konstruktionen* zu lösen. Sein Vorgehen hat sehr anregend auf die darstellenden Geometer gewirkt, aber sein System, das auf einer symbolischen Bezeichnung und Bewertung der graphischen Operationen beruht, ist, wie er selbst zugibt, noch verbesserungsfähig, und zwar offenbar deshalb, weil die grundlegenden Annahmen nicht frei von Willkür sind[21]). Nimmt man aber dieses *geometrographische System* (oder ein ähnliches) als zweckdienlich an, um die *Einfachheit* einer Konstruktion zu beurteilen, so muß man zugleich sagen, daß es für sich allein nicht hinreicht, um ihre *Genauigkeit* abzuschätzen. Hierzu kann nur in einer *Theorie der graphischen Konstruktionsfehler* und in der Anwendung der *Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (I D 1, *Czuber*) die rationelle Grundlage gefunden werden.

Die deskriptiven *Elementaroperationen* bestehen darin, *Punkte*, *Gerade* und *Kreise* durch *graphische Charaktere* zu *bestimmen*, und zwar a) *willkürlich* oder b) *unter gegebenen Bedingungen*, d. h. *aus gegebenen Charakteren*. Letzteres erfolgt durch Herstellung der *vereinigten Lage der Charaktere* (*Koinzidenz, Verbindung und Schnitt der Elemente*). Jede Operation umfaßt die zur Herstellung eines graphischen Zeichens erforderlichen Manipulationen an und mit den Werkzeugen. Es empfiehlt sich aber nicht, die Handhabung der Werkzeuge selbst, deren Erfolg von der Geschicklichkeit, Scharfsichtigkeit und Sorgfalt des Zeichners abhängt, zu analysieren. Ebensowenig ist hier auf eine Prüfung der technischen Vollkommenheit und der Tragweite der Instrumente einzugehen. Es handelt sich zunächst nur um die Frage: Kann man die Konstruktionen nach dem Grade ihrer *Einfachheit* systematisch einteilen? Daran schließt sich die von der ersten völlig verschiedene Frage nach der *Genauigkeit* des Ergebnisses.

---

19) Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig I, 1884, II, 1887.

20) Géométrographie, ou l'art des constructions géométriques, Paris (Scientia 18) 1902.

21) *R. Mehmke*, Bemerkungen zur Geometrographie v. M. *E. Lemoine*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 12, (1903), p. 113. Vgl. *R. Güntsche*, Zu Herrn *R. Mehmkes* Bemerkungen usw., ebenda p. 289.

Schließt man sich dieser Auffassung an, so kann man die *Operationen* nach der *Zahl* der zu erfüllenden graphischen *Bedingungen abstufen.* Die Abzählung der Bedingungen braucht nicht von ihrer analytischen Formulierung auszugehen, muß aber mit ihr im Einklang stehen und auf das Prinzip der *Dualität* Rücksicht nehmen. Sie muß auch der Zahl der in einer Aufgabe verfügbaren *Konstanten* und ebenso der Zahl der für die Ausführung zu erwartenden *Fehlerkomponenten* entsprechen. Der Versuch, nach diesem Gesichtspunkte die Operationen zu ordnen, führt zu folgender Übersicht[22]):

Graphische Elementaroperationen.

A. 0. Stufe:

σ willkürlich einen Punkt zeichnen;
ε willkürlich eine Gerade zeichnen;
$\varkappa$ willkürlich einen Kreis zeichnen.

B. 1. Stufe:

σ_1 willkürlich einen Punkt auf eine gegebene Linie setzen;
ε_1 willkürlich eine Gerade durch einen gegebenen Punkt oder in einer gegebenen Richtung ziehen;
$\varkappa_1$ willkürlich einen Kreis um einen Punkt einer gegebenen Linie oder durch einen gegebenen Punkt beschreiben.

C. 2. Stufe:

σ_2 den Schnittpunkt zweier gegebenen Linien finden;
ε_2 die Gerade ziehen, die durch zwei gegebene Punkte oder durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Richtung geht;
$\varkappa_2$ willkürlich einen Kreis um einen gegebenen Punkt oder durch einen gegebenen Punkt und um einen Punkt einer gegebenen Linie beschreiben.

D. 3. Stufe.

$\varkappa_3$ den Kreis um einen gegebenen Punkt und durch einen gegebenen Punkt beschreiben.

Der Unterschied zwischen den Operationssystemen ist leicht zu erkennen. *E. Lemoine* geht von der Handhabung der Instrumente aus; *E. Bernès*[23]) betrachtet die Herstellung der graphischen Charak-

22) Die auf einen Punkt (σημεῖον), eine Gerade (εὐθεῖα) oder einen Kreis (κύκλος) oder auf den Wechsel (μεταβολή) der Instrumente bezüglichen Operationen werden hier durch σ, ε, $\varkappa$ und μ bezeichnet. Der Index gibt die Stufenzahl an. Die von *E. Lemoine* gebrauchten Symbole *R*, *C*, *E* leiten sich offenbar von den Instrumenten her (règle, compas, équerre).

23) *E. Lemoine,* Géométrographie, Paris 1902, Scientia 18, p. 18 Anm.

tere unter gegebenen Bedingungen als ausschlaggebend; *E. Papperitz* sucht diesen Gedanken systematisch durchzuführen. Inwieweit man berechtigt ist, graphische *Operationen* unter sich als *gleichwertig* anzusehen und *Äquivalenzgleichungen* (etwa wie: $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ usw.) aufzustellen, sollte Gegenstand einer Untersuchung sein, die sich auf die Frage richtet, ob die gegebenen Bedingungen voneinander unabhängig erfüllt werden können. Will man aber solche Äquivalenzen annehmen (was zur Vereinfachung zweckmäßig erscheint), so muß man sich dessen bewußt sein, daß man damit *neue Hypothesen* einführt. Der bei einer nicht homogenen Konstruktion nötige *Wechsel der Instrumente* μ ist keine graphische Operation; er muß aber beachtet werden, wenn es sich um die Beurteilung der Einfachheit handelt, weil er wie eine Unstetigkeit oder Unterbrechung auf den Gang des Verfahrens einwirkt. Der *mittlere Zeitaufwand* für die Ausführung einer Konstruktion hängt zu sehr von subjektiven Momenten ab, um hier in Betracht zu kommen.

Um nun ein Urteil über die Einfachheit einer Konstruktion zu gewinnen, schreiben wir zuerst die Symbole der nötigen Operationen und Instrumentenwechsel in der vorgeschriebenen Reihenfolge auf. Die willkürlichen Operationen, welche die zur Fragestellung gehörigen Angaben betreffen, zählen nicht mit. Um die zur Lösung der Aufgabe dienenden Operationen gleichmäßig zu bewerten, machen wir folgende *Hypothesen*:

1) Graphische Operationen gleicher Stufe sind gleichwertig.
2) Eine Operation n^{ter} Stufe ist mit der n-fachen Operation 1. Stufe gleichwertig.
3) Jeder Instrumentenwechsel zählt als eine Operation 1. Stufe.

Multiplizieren wir jetzt jedes Symbol (als eine Einheit genommen) mit seiner Stufenzahl und addieren die Produkte, so erhalten wir eine ganze Zahl

$$n = a\sigma_1 + b\varepsilon_1 + c\varkappa_1 + d\mu$$

als *Stufenzahl einer Konstruktion*, und die Zahl $\frac{1}{n}$ kann als *Maß ihrer Einfachheit* dienen. Ebenso leicht kann die Zahl der benützten Punkte, Geraden und Kreise angegeben werden. Wenn man will, kann man die Instrumentenwechsel unberücksichtigt lassen, also ihre Anzahl $d \cdot \mu$ unterdrücken.

10. Die Genauigkeit graphischer Konstruktionen. Fehlertheorie. Die Frage nach der *Genauigkeit* muß im *praktischen* Sinne ohne umständliche Rechnung beantwortet werden. Die grundlegenden *Hypothesen* über die *Entstehung* und *Fortpflanzung* der *Fehler* müssen daher

möglichst einfach sein, aber mit der *zeichnerischen Erfahrung* einerseits und den Prinzipien der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (I D 1, *Czuber*) andererseits im Einklang stehen. Eine gewisse *Willkür* ist bei ihrer Aufstellung *unvermeidlich.* Für die nachträgliche *Ausgleichung der Fehler* auf Grund von *Überbestimmungen* einzelner Elemente oder von *Wiederholungen* ganzer Konstruktionen muß die von *C. F. Gauß* (1777—1855) auf dem Gebiete der messenden Beobachtungen eingeführte *Methode der kleinsten Quadrate* (I D 2, *Ausgleichungsrechnung, Bauschinger*) in ihre Rechte treten. Die Wiederholung von Konstruktionen zu dem gleichen Zwecke liegt eigentlich nicht im Wesen der deskriptiven Geometrie. Der Zeichner wird es sich vielmehr zur Aufgabe machen müssen, schon bei einmaliger Konstruktion die Entstehung merklicher Fehler zu verhüten.

Den natürlichen Ausgangspunkt für die graphische *Fehlertheorie* bildet die *wirkliche Beschaffenheit der Charaktere.* Die meisten Autoren, die sich mit jener beschäftigen[24]), stimmen darin überein, daß die realen graphischen Charaktere als *Flächen* aufzufassen sind, die in irgendeiner Weise auf dem Zeichenblatt kenntlich gemacht werden. Die Instrumente ermöglichen es zwar, diesen Flächen geeignete *Be-*

---

24) *R. Cotes,* Aestimatio errorum in mixta mathesi etc., Cambridge 1709; *Chr. v. Wolf,* Elementa Matheseos, Halle 1713 und Elementa Geometriae 2, Elementa Trigonometriae planae, p. 58f.; *J. H. Lambert,* Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Berlin 1765, 1[1] (Anmerkungen und Zusätze zur praktischen Geometrie). Mit Regeln über genaues Konstruieren befassen sich *Chr. Wiener,* Über die möglichst genaue mechanische Rektifikation eines verzeichneten Kurvenbogens, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871); Lehrb. d. darst. Geom. 1 (1884), p. 184 und *G. Müller,* Lehrb. d. zeichnenden Geom., 6. Aufl., Stuttgart 1901, sowie *A. Witting,* Geometr. Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene, Progr. Dresden 1899, und *P. Zühlke,* Ausführung elementargeom. Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen, Leipzig u. Berlin 1906. Auf die Notwendigkeit einer rationellen graphischen Fehlertheorie hat besonders *F. Klein* wiederholt nachdrücklich hingewiesen. Unter den Gesichtspunkten der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben *F. Geuer,* Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen, behandelt nach dem *Gauß*schen Ausgleichungsverfahren, Diss. Freiburg (Progr. Durlach) 1902 und *K. Nitz,* Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Diss. Königsberg 1905; Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen, Zeitschr. Math. Phys. (53) 1 (1906), diese Fragen untersucht, von mehr elementaren Gesichtspunkten aus dagegen *P. Böhmer,* Über geometrische Approximationen, Diss. Göttingen 1904. *J. H. Lambert, Chr. Wiener, R. Mehmke, P. Böhmer, K. Nitz* u. a. haben Versuchsreihen zur Ermittlung der wahrscheinlichen Größe von Konstruktionsfehlern angestellt. Die im Texte vorgetragene Auffassung steht der von *K. Nitz* vertretenen am nächsten. Bezüglich der praktischen Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes werden neue, vereinfachende Vorschläge gemacht.

grenzungsformen und *Dimensionen* zu geben; aber gleichwohl bleiben *Unvollkommenheiten* zurück, von denen die unvermeidlichen *Fehler* in der *graphischen Bestimmung* einer *Größe* oder einer *Lagebeziehung* herrühren. Die Erkenntnis ihrer *Ursachen* kann zur *Verminderung der Fehler* beitragen, ist aber für die *Bewertung des Ergebnisses* nicht ausschlaggebend. Die *Fehlerquellen* sind nicht nur in der *Beschaffenheit der Charaktere*, sondern auch in der Art ihrer *Entstehung* und ihrer *weiteren Benutzung* zu suchen. Man kann *technische* (*objektive*) und *persönliche* (*subjektive*) *Fehler* unterscheiden. Sie wirken aber in einer nur sehr schwer kontrollierbaren Weise zusammen. Der *wahre Fehler* läßt sich niemals angeben, sondern nur eine *Grenze*, die sein absoluter Betrag wahrscheinlich nicht übersteigt. Es erscheint daher zweckmäßig, auf Grund des *Gaußschen Fehlergesetzes* einen *mittleren Fehler* zu definieren und zu berechnen. Jeder Fehler bezieht sich auf die Bestimmung einer *einzelnen* Größe. Nach der Art der gesuchten Größen sind daher auch die Fehler zu unterscheiden. Zu einem einheitlichen Ausdruck für den „Gesamtfehler einer Konstruktion“ oder für ihre „Genauigkeit im allgemeinen“ gelangt man also auch auf diesem Wege nicht. Das Ziel der Untersuchung muß vielmehr ein spezielles und scharf bestimmtes sein. Die Frage, in welcher Weise aus allen Einzelfehlern in einer Konstruktion ein Ausdruck für den *Gesamtfehler* herzuleiten sei, bleibt zunächst offen, solange nicht etwa die Aufgabe in der Bestimmung einer einzigen Größe besteht.

Die *Charaktere* lassen sich ebenso einteilen wie die *Operationen*, deren Ergebnisse sie sind. Bei den Operationen 0. Stufe kann man nicht von einem Fehler sprechen; man darf vielmehr annehmen, daß die aus ihnen hervorgehenden *primitiven Charaktere* die idealen Elemente tatsächlich bestimmen. Sowie aber aus gegebenen Charakteren neue *abgeleitet* werden, stellen sich Fehler ein und vererben sich fort. Keine im Laufe einer Konstruktion auftretende Bedingung ist graphisch genau erfüllbar; jede *unabhängige Bedingung* bringt also eine *Fehlerkomponente* mit sich. Die Fehler zerfallen in zwei Arten: *Strecken- oder Abstandsfehler* und *Winkel- oder Richtungsfehler*. Ihre *mittlere Größe* läßt sich schrittweise ermitteln. Hier eröffnet sich ein weites Feld für theoretische Untersuchungen. Aber unser nächstes Ziel ist, die Fehlertheorie durch Einführung geeigneter *Hypothesen* praktisch anwendbar zu machen.

A. Die *Operationen 0. Stufe* sind *willkürlich*, folglich *fehlerfrei*. Als *primitive Charaktere* für den *Punkt*, die *Gerade* und den *Kreis* sehen wir eine kleine Kreisfläche, einen schmalen von zwei parallelen Geraden oder einen von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten

Flächenstreifen an und nennen diese Realgebilde einen *Punktkreis, Geradenstreifen* oder *Kreisstreifen.* Die *idealen Elemente* gelten uns als durch den Mittelpunkt oder die Mittellinie des realen Gebildes *genau bestimmt.* Die *Breite* eines primitiven Charakters, also der *Punktdurchmesser* oder die *Strichbreite* ist eine *willkürliche Konstante.* Wir erteilen ihr für alle primitiven Charaktere, die im Laufe derselben Konstruktion vorkommen, den *gleichen Wert* $2b$. Ferner mag ein sehr kurzer *Kreisbogen* durch seine *Tangente,* also der ihm entsprechende Kreisstreifen durch einen Geradenstreifen ersetzt werden. Wir haben es dann nur mit *Lagebeziehungen von Punkten und Geraden* oder ihrer Charaktere zu tun, die durch *Abstände* und *Winkel* bestimmt werden.

B. Die *Operationen 1. Stufe* stellen die *vereinigte Lage* der Elemente her. Der *mittlere Abstandsfehler* $\pm m$, der sich einstellt, wenn ein Punkt mit einem Punkte, oder ein Punkt mit einer Linie, oder eine Linie mit einem Punkte vereinigt werden soll, darf bei *primitiven* Charakteren als *konstant* angesehen werden. Seine Größe ist zwar für die Operationen σ_1, ε_1, $\varkappa_1$ experimentell ein wenig verschieden gefunden worden; er ändert sich aber, wie es scheint, nur mit der *Breite* der Charaktere. Solange diese konstant ist, ist er es auch. Überdies entspricht unsere Annahme dem Gesetze der *Dualität* Nimmt man (was den Gepflogenheiten guter Zeichner entspricht) etwa $b =$ 0,05 mm, so ist der mittlere Abstandsfehler $\pm m$ annähernd ebenso groß[25]); er wächst aber langsamer als die Breite selbst. Statt der faktischen Breite $2b$ führen wir nun $2m$ als *virtuelle Breite* ein und denken uns die reellen Charaktere durch *virtuelle Charaktere* (mittlerer Fehlerkreis oder Fehlerstreifen) ersetzt. Der *mittlere Richtungsfehler* $\pm\,\theta$ einer Geraden hängt außer von der *virtuellen Breite* auch von der *Länge* o des Geradenstreifens ab; er ist o umgekehrt proportional.

C. Die *Operationen 2. Stufe* betreffen die *Schnitt-* und *Verbindungselemente.* Hier haben wir es mit *abgeleiteten Charakteren* zu tun, für welche die seitherigen Annahmen teilweise nicht mehr aufrecht erhalten werden können. Die *mittleren Abstandsfehler* werden bei ihnen veränderlich, die *mittleren Richtungsfehler* werden es in höherem Grade. Die *Art der Erzeugung* und der *Benutzung* der Charaktere macht ihren Einfluß geltend. Wenn auch die realen Gebilde, deren man sich nach wie vor bedient, ihre Formen und Abmessungen nicht ändern, so werden doch die *Fehler* nun auch *von den Lagebeziehungen der bestimmenden und der gesuchten Elemente abhängig.* Dem kann

25) *K. Nitz,* Beiträge usw. § 5.

man Rechnung tragen, indem man sich an die Stelle der Realgebilde *virtuelle Charaktere* von anderer Begrenzungsform und wechselnder Breite gesetzt *denkt*. Der ideale Schnittpunkt zweier Geraden z. B. ist nach einer geläufigen Auffassung innerhalb des Parallelogramms zu suchen, das den beiden Geradenstreifen gemeinsam ist. Betrachten wir nun sogleich den allgemeinen Fall, wo die virtuellen Breiten $2m_1$ und $2m_2$ der Streifen voneinander verschieden sind, so ist jenes Parallelogramm die sogenannte *Spielfläche des Schnittpunktes*. Andererseits folgert man aus dem Fehlergesetz, daß alle mit gleicher mittlerer Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Treffpunkte auf einer *mittleren Fehlerellipse*[26]) liegen, von welcher die Mittellinien des Parallelogramms konjugierte Durchmesser sind. Den Begriff der *Spielfläche eines Elementes*, den *K. Nitz* als ungeeignet verwirft, kann man so abändern, daß er aufhört, dem Fehlergesetz und der Wahrscheinlichkeit zu widersprechen. Man definiere etwa: Die Spielfläche eines Elementes oder sein virtueller Charakter ist die Fläche der mittleren Fehlerkurve. Für den Schnitt zweier Linien ergibt sich dann eine *Punktellipse*, allgemeiner ein *Punktoval* (von einer Kurve höherer Ordnung begrenzt); für die Verbindungslinie zweier Punkte findet man eine *Strahlhyperbel* und für einen Kreis einen von zwei Äquidistanten einer Punktellipse (allgemeiner eines Punktovals) begrenzten *Ringstreifen, Kreistoroid*. Hier kommen nur Punktellipsen und Strahlhyperbeln in Betracht.

Eine *Punktellipse* hängt von den virtuellen Breiten $2m_1$ und $2m_2$ der sich schneidenden Linien und von ihrem Winkel ω ab. Ist sie gegeben, so kommt für ihre weitere Benutzung ihre virtuelle Breite $2m_\psi$ in einer bestimmten Richtung in Betracht, die durch den Winlel ψ mit der ersten Linie bestimmt sein mag. Dies ist ein Durchmesser ihrer Fußpunktkurve oder der Abstand der beiden zu der gegebenen Richtung parallelen Tangenten. Der mittlere Abstandsfehler in dieser Richtung ist m_ψ. Es ist zweckmäßig, sich die Ellipse jetzt wieder durch einen Kreis mit dem Radius m_ψ ersetzt zu denken (virtueller Punktkreis).

Eine *Strahlhyperbel* wird von allen gleich wahrscheinlichen Lagen der idealen Verbindungslinie zweier Punkte umhüllt. Die Strahlhyperbel (mittlerer Wahrscheinlichkeit) hängt ab von den virtuellen Breiten der gegebenen Punktellipsen normal zur Verbindungslinie der Mittelpunkte und von ihrer Entfernung o. Für ihre weitere Benutzung

26) Den Begriff der „Fehlerellipse" hat schon *A. Bravais*, Analyse mathém. sur les probabilités des erreurs de situation d'un point, Paris 1846, Mém. prés. p. div. savants, 9, p. 255. (Vgl. I D 2, Ausgleichungsrechnung, *Bauschinger*, Nr. 14.)

ist ihre virtuelle Breite $2m_p$ an einer bestimmten Stelle maßgebend, die durch den Abstand p vom ersten Punkte gegeben sein mag.

D. Die Fehler bei den *Operationen 3. Stufe*, die den Kreis betreffen, setzen sich in leicht erkennbarer Weise aus den Fehlern der Operationen niederer Stufe zusammen.

K. Nitz[27]) hat gezeigt, wie sich aus solchen einfachen Ansätzen die mittleren *Abstands- und Richtungsfehler* mit Hilfe *dreier Grundgleichungen berechnen* und dann *zusammensetzen* lassen. Es bleibt nur zu wünschen, daß die hierzu nötigen, vorläufig noch etwas umständlichen Rechnungen durch *numerische Hilfstabellen* erleichtert werden. Eine zweckmäßige Einrichtung solcher Tafeln erscheint einigermaßen dadurch erschwert, daß drei bis vier der Größen $m_1, m_2, \omega, \psi, o$ und p als unabhängige Argumente auftreten. Aber auch in dieser Beziehung sind noch Vereinfachungen (etwa durch Einführung von Verhältniszahlen oder Doppelverhältniswerten) denkbar.

Ein Versuch, zu einem Ausdruck für den *Gesamtfehler einer ganzen Konstruktion* oder zu einem „coefficient d'exactitude" im Sinne von *E. Lemoine* zu gelangen, läßt sich vielleicht auf folgenden Wegen unternehmen. Entweder, man führe die verschiedenartigen Fehler auf lauter *lineare* zurück und füge diese zusammen, indem man das Quadrat des *Gesamtfehlers* der Summe der Quadrate aller linearen Fehler gleichsetzt. Oder man gehe von den Flächen der virtuellen Charaktere, also den *Spielflächen*, aus und addiere diese, um eine *Gesamtspielfläche* für alle Konstruktionselemente zusammen zu erhalten. Beides ist aber nur denkbar, wenn man das *Operationsfeld* willkürlich *abgrenzt*. Denkt man sich etwa dieses Gebiet für jede Operation als eine Kreisfläche (Aktionskreis) mit dem Halbmesser a (Aktionsradius), so kann man etwa statt eines Richtungsfehlers θ den linearen Fehler $a \cdot \theta$ einführen und andererseits bei den Strahlhyperbeln nur die Flächen in Rechnung stellen, die durch einen um ihren Mittelpunkt mit dem Radius a beschriebenen Kreis begrenzt werden. Solchen Ansätzen haftet aber ein reichliches Maß von Willkür an. Sie eignen sich allenfalls dazu, die Übereinstimmung der graphischen Fehlertheorie mit der zeichnerischen Erfahrung in ein-

27) Beiträge usw., § 6. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist:

$$\begin{cases} m_\psi^2 = \dfrac{m_1^2 \cos^2(\psi - \omega) + m_2^2 \cos^2\psi}{\sin^2\omega}, \\ \sin^2\theta = \dfrac{m_1^2 + m_2^2}{o^2}, \\ m_p^2 = m_1^2\left(1 - \dfrac{p}{o}\right)^2 + m_2^2 \cdot \left(\dfrac{p}{o}\right)^2. \end{cases}$$

facher Weise und für einzelne Operationen klar zu machen, die man aber auch schon aus den *Nitz*schen Formeln herausliest.

Wichtig sind die *besonderen Näherungsmethoden*, durch welche man die nach den allgemeinen Konstruktionsregeln zu erwartenden Fehler zu vermindern und die Bestimmung einzelner Elemente (Tangenten, Normalen usw.) an *gezeichneten Kurven* zu verschärfen sucht. Auch dieses geschieht mittels gewisser *Hilfskurven*, die man „Näherungskurven, Fehler- oder fehlerzeigende Kurven" genannt hat[28]).

11. Projizieren und Durchdringen. Sehprozeß und Schattenbildung. Schon die einfachsten Operationen, die *Vereinigung* (*Deckung*), die *Verbindung* und der *Schnitt* geometrischer Elemente legen in abstrakter Ausdrucksform physische Tatsachen oder physiologische Vorgänge fest. Wie diese der Beobachtung zugänglich sind, so lassen sich umgekehrt jene sichtbar oder greifbar versinnlichen. Das *Projizieren* ahmt den Vorgang beim Sehen der Körper oder die Entstehung ihrer Schatten nach.

Die *Zentralprojektion* entsteht als Schnitt der Bildfläche mit dem Bündel der *projizierenden Strahlen* (*Sehstrahlen, Lichtstrahlen*), welche aus einem *Zentrum* (*Augpunkt, Lichtquelle*) nach den Punkten des Objektes gezogen sind, oder mit dem *Scheine* des Gegenstandes. Wird das Zentrum durch einen unendlichfernen Punkt (eine Richtung) ersetzt, so ergibt sich die (*schiefe oder orthogonale*) *Parallelprojektion.* Die *Schattenkonstruktionsaufgaben* sind mit denen der Projektion auf krumme Flächen identisch. Man unterscheidet am Objekte und in der Bildfläche die von den Sehstrahlen getroffenen oder nicht getroffenen Teile; sie werden durch die *wahren* und *scheinbaren Umrißlinien* getrennt. Bei den Schattenkonstruktionen scheidet man zwischen der *Zentralbeleuchtung* und der *Parallelbeleuchtung,* je nachdem die punktförmig vorgestellte Lichtquelle sich in endlichem oder unendlichem Abstande vom Gegenstande befindet. Die unbeleuchteten Flächenteile liegen entweder im *Eigenschatten* oder im *Schlagschatten* des Körpers. Ihre Randlinien heißen *Lichtgrenze* oder *Schlagschattengrenze.* Die Annahme *leuchtender Flächen* (oder Körper) führt zu einer Erweiternng dieser Theorie, bei der es vornehmlich auf die Konstruktion der Grenzen der *Voll- und Halbschatten* ankommt. Die *Beleuchtungstheorie,* welche die *Lichtstufen* auf krummen Oberflächen konstruieren lehrt, knüpft zwar ihre besonderen Methoden an die Lehre von der Schattenkonstruktion an, fußt aber andererseits auf *physikalischen Hypothesen.*

---

28) *Chr. Wiener,* Lehrb. d. D. G. 1 (1884), p. 165 f.; *K. Rohn* und *E. Papperitz,* Lehrb. d. D. G. 1 (1896), p. 222 f.

Verfolgt man die Entwicklung, die der Begriff der *Projektion* erfahren hat, so ist es psychologisch interessant festzustellen, daß bei ihr der Wunsch, Gegenstände möglichst täuschend so abzubilden, wie sie das Auge sieht, eine größere Rolle gespielt zu haben scheint als die Beobachtung der Schattenbildung an Körpern.

Die Lösung der *Durchdringungsaufgaben* erfordert oft die Einführung von Hilfselementen.

12. Einteilung der Darstellungsmethoden. Alle Darstellungsmethoden beruhen in erster Linie auf dem *Projektionsverfahren.* Gleichwohl sind *andere Verfahren* nicht nur *zulässig,* sondern in allen den Fällen *notwendig,* wo jenes versagt. Neben den *Projektionen* sind namentlich *Schnitte* und *Spurelemente* unentbehrlich. Die *Methodenlehre* hat eine doppelte Aufgabe; sie soll Regeln aufstellen, 1) um vom Objekte zum geometrischen Bilde zu gelangen (*Konstruktion des Bildes*), 2) um aus diesem auf die Eigenschaften des Objektes zurückzuschließen (*Rekonstruktion des Originales*). Anfangs wurde fast ausschließlich die erste Aufgabe ins Auge gefaßt; die Notwendigkeit der zweiten hat eigentlich erst *Monge* klargestellt und die vollständige Lösung gegeben. Sein schöpferisch verwerteter Grundgedanke war: *Eine* Projektion genügt nicht, um ein Objekt durch die Zeichnung zu bestimmen; folglich muß entweder eine zweite Projektion hinzugenommen werden, oder andere Angaben müssen die fehlenden Bestimmungsstücke ersetzen. Aus diesem Gedanken zog *Monge* die Folgerungen, die für den Ausbau eines *Systems der deskriptiven Methoden* entscheidende Bedeutung erlangen sollten[29]). Sein Hauptverdienst besteht also darin, die *Aufgabe der darstellenden Geometrie* und *die Mittel zu ihrer Lösung* klar erkannt zu haben. Welche Art der Projektion, welche komplementären Bestimmungsweisen man anwenden will, richtet sich nach dem jeweiligen Zwecke. Die Darstellungsmethoden sind daher einzuteilen: 1) nach der *Art der Projektion,* 2) danach, ob sie wesentlich von *Lagebeziehungen* oder von *Maßrelationen* ausgehen. Da sich die Maßangaben gewöhnlich auf Breiten, Höhen und Tiefen oder auf drei rechtwinklige Achsen eines Koordinatensystemes beziehen, hat man den Namen „Axonometrie“ gebildet. Den „axonometrischen“ Verfahren stehen die „freien“ Projektionen gegenüber. Wird auf spezielle (z. B. architektonische) Aufgaben Rücksicht genommen, so spricht man auch wohl von „angewandten“ Darstellungsmethoden.

---

29) Géom. descr. 1798, 1, 1—13, p. 5—31.

Übersicht der gebräuchlichen Darstellungsmethoden.

A. *Parallelprojektion.*

1. *Grund- und Aufrißverfahren.* Orthogonale Projektion auf zwei rechtwinklige Tafeln. Charaktere: Projektionen und Spurelemente.
2. *Orthogonale axonometrische Projektion* auf eine Tafel. Angabe des Achsenkreuzbildes und der Achsenmaßstäbe.
3. *Kotierte Projektion* (topographisches Verfahren). Orthogonale Projektion auf eine Ebene mit Angabe der Koten (Höhenmaßzahlen).
4. *Freie schiefe Projektion* auf eine Tafel mit Angabe eines Projektionsdreiecks. Charaktere: Projektionen, Spur- und Hilfselemente.
5. *Schiefe axonometrische Projektion* auf eine Tafel. Angabe des Achsenkreuzbildes und der Achsenmaßstäbe.
6. *Angewandte schiefe Projektion* (Kavalier-, Militär- oder Vogelperspektive). Grundriß (Aufriß) mit Angabe des Verkürzungsverhältnisses der schief projizierten Höhen (Tafelabstände)[30]).

B. *Zentralprojektion.*

7. *Freie Perspektive.* Zentralprojektion auf eine Tafel mit Angabe des Hauptpunktes und des Distanzkreises. Charaktere: Projektionen, Spur- und Fluchtelemente.
8. *Axonometrische Perspektive.* Zentralprojektion auf eine Tafel mit Benutzung der Fluchtmaßstäbe für Breiten und Höhen oder Tiefen (veraltetes Verfahren).
9. *Angewandte Perspektive* (architektonisches Verfahren). Zentralprojektion auf eine Tafel, ausgehend vom Grund- und Aufriß. Angabe der Grundlinie, des Horizontes, des Hauptpunktes und der Distanz.

Alle Darstellungsverfahren lassen sich aus der *Zentralprojektion* als der *allgemeinsten Form* entwickeln[31]). Welche Methode aus didaktischen Rücksichten an die Spitze zu stellen sei, ist eine andere Frage. Mehrfache zentrale Projektion kommt als eigentliche Darstellungsmethode wenig in Betracht. Als Prinzip der Photogrammetrie (Nr. **44**) dient sie zur Lösung der zweiten Hauptaufgabe (Rekonstruktion des Originales).

13. Hilfsverfahren und Transformationen. Zur Lösung deskriptiver Probleme müssen nicht nur die *Projektionselemente* durch *Spur-*

---

30) In der Fortifikationslehre nannte man früher kleinere Aufbauten auf Festungswerken „Kavaliere"; daraus erklärt sich der Name „Kavalierperspektive".

31) Dies hat namentlich *W. Fiedler* wiederholt betont; z. B. in der Einleitung zur Darst. Geometrie 1, 3. Aufl. 1883. Die Namen der Geometer, an die sich die Entwicklung der einzelnen Darstellungsmethoden knüpft, werden an späteren Stellen genannt.

und *Fluchtelemente* ergänzt werden, sondern es sind auch *Hilfselemente* und *Hilfskonstruktionen* nötig. Als Hilfselemente dienen meist Gerade, Kreise, Ebenen, Kugel-, Kegel- und Zylinderflächen. Die Zwischenkonstruktionen verlangen entweder eine *Hilfsprojektion* (auf eine neue Tafel von geeigneter Stellung, z. B. den in der Methode der zugeordneten Normalrisse neben dem Grund- und Aufriß häufig vorkommenden *Seiten-* oder *Kreuzriß*) oder eine *Transformation*. Die Transformationen beziehen sich auf *Lagen-*, *Größen-* oder *Formveränderungen*: 1) Um eine für die Lösung der Aufgabe *günstige Lage des Objektes zur Zeichentafel* zu erlangen, hat man eine bestimmte Bewegung des Objektes oder der Tafel bis zu dieser Lage und eventuell wieder zurück bis zur Anfangslage in einer Nebenkonstruktion zu verfolgen. Als *Bewegungsformen* kommen die *Parallelverschiebung*, die *Drehung* (namentlich als *Umlegung oder Umwendung* ebener Figuren) und die *Verschraubung* in Betracht. 2) Verkleinerungen und Vergrößerungen der Bilder richten sich gewöhnlich nach den Gesetzen der *perspektiven Ähnlichkeit*. Mit den *Verkleinerungen* oder *Reduktionen* bezweckt man häufig die Benutzung unzugänglicher (zu weit entfernt liegender) Elemente zu vermeiden. *Vergrößerungen* werden angewandt, um schwer erkennbare Details der Hauptzeichnung in einer Nebenfigur deutlich zu machen. 3) Zur graphischen *Rektifikation* von Kurvenbögen oder zur *Komplanation* abwickelbarer Flächen oder zur Bestimmung *geodätischer Linien* auf ihnen ist das *Ausrichten* und *Biegen* der krummen Linien und Flächen, ihre *Abwicklung* und *Aufwicklung* auszuführen.

14. Nomenklatur. Bezeichnungsweise. Zeichnerische Regeln. In der darstellenden Geometrie hat sich die *Nomenklatur* erfreulicherweise einheitlich entwickelt. Hierzu mag viel beigetragen haben, daß sie als wissenschaftliche Disziplin noch verhältnismäßig jung ist und daß *Monge* sogleich mit einem fertigen, wohlabgerundeten Systeme hervortrat. Nicht genau das gleiche läßt sich von der *Bezeichnungsweise* sagen, die in der deskriptiven Geometrie insofern wichtig ist, als sie einerseits durch die *Beschriftung der Zeichnungen* diese *leicht verständlich*, andererseits den *sprachlichen Gedankenausdruck kurz* und *übersichtlich* machen soll. Indessen sind die bei neueren Autoren aufgetretenen Divergenzen der Auffassung nicht so erheblich, daß sie nicht ausgeglichen werden könnten. Selbstverständlich kann man es keinem geometrischen Schriftsteller verwehren, seine eigene, wohlerwogene Bezeichnungsweise anzuwenden; es liegt aber namentlich im Interesse des Unterrichts, eine Verständigung wenigstens in den Hauptfragen anzubahnen. In den Zeichnungen treten als *wesentliche Elemente Punkte* und *Linien* auf; es handelt sich also vornehm-

lich darum, wie diese bezeichnet werden sollen, ob mit großen und kleinen lateinischen Buchstaben oder umgekehrt. Die erstgenannte Bezeichnungsweise hat sich zweifellos früher eingebürgert und weiter verbreitet (nicht nur in vielen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, sondern überhaupt in ungezählten mathematischen Schriften und Lehrbüchern). Für sie spricht also das Prinzip der Wahrung der historischen Kontinuität. Auch für die andere Art der Bezeichnung sind Gründe angeführt worden[32]). Viel leichter als über diese Kardinalfrage dürfte sich eine Einigung über die Bezeichnung der *Ebenen* und der *Winkel* sowie über die *Operationszeichen* erzielen lassen. Über die *zeichnerischen Regeln* endlich bestehen keine nennenswerten Meinungsverschiedenheiten Es ist allgemein gebräuchlich geworden, die in einer Darstellung vorkommenden Flächen als undurchsichtig zu betrachten und nur die (in der Projektionsrichtung) sichtbaren Linien mit vollem Striche auszuziehen, alle übrigen aber (die Hilfslinien eingeschlossen) nur durch punktierte oder gestrichelte Linien anzudeuten.

II. Geometrische Darstellungsverfahren vor Monge.

15. Darstellungsverfahren im Altertum. Die Rißkunst des Mittelalters. Zu den ersten Versuchen, graphische Bilder nicht nach bloßem Augenmaß, sondern nach geometrischen Regeln und genauen Maßen zu entwerfen, lag die Veranlassung in den praktischen Aufgaben der *Feldmeßkunst* und der *Baukunst*. Später erwuchsen der *Malerei* die schwierigeren Probleme der Perspektive. Schon die Reste großartiger Bauten der ältesten Kulturvölker lassen in ihrer Anlage und Ausführung eine Sicherheit und Genauigkeit erkennen, die nur durch die Annahme erklärlich werden, daß *Pläne* und *Werkzeichnungen* benutzt worden sind. Auch sind noch einzelne historische Beweisstücke erhalten[33]).

Welcher Art die frühesten Darstellungen waren, geht aus zwei Stellen in dem Werke des römischen Agrimensors und Architekten *M. Vitruvius Pollio* hervor[34]). Drei Formen waren es: die *Ichnographie* (ἴχνος, Fußstapfe), die *Orthographie* (ὀρθός, aufrecht) und die *Scenographie* (σκηνή, Bühne). Sie entsprechen dem *„Grundriß“*, dem

32) *E. Müller*, Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie, Zeitschr. Math. Phys. (49) 1 (1903); *R. Mehmke*, ebenda 48, p. 144.

33) *Chr. Wiener*, Lehrb. d. darst. Geom. 1, p. 5 f., führt mehrere interessante Dokumente an.

34) De architectura libri decem, I 2 u. VII praef., Ausgabe von *V. Rose*, Leipzig 1899, p. 10 u. 157. *E. Papperitz* interpretierte diese Stellen[1]).

„Aufriß“ und einer *„Perspektive in gerader Ansicht“*. Breiten und Tiefen, in der Grundebene aneinander getragen, ergaben gleichsam den Abdruck eines Gebäudes auf dem Boden; Breiten und Höhen, in aufrechter Ebene zusammengesetzt, ein Bild der Front ohne Rücksicht auf Tiefen. Die Scenographie aber bezweckte, Gemälden durch geeignete Linienführung eine plastische Wirkung zu verleihen. Dieses ästhetische Bedürfnis trat zuerst in der Theatermalerei hervor und führte dazu, die *Zentralprojektion als Konstruktionsprinzip* anzuwenden. *Vitruv* spricht bei der Scenographie von einem *„Zentrum“*. Darunter ist an der einen Stelle unser *Hauptpunkt*, an der anderen der *Augpunkt* zu verstehen.

Die wenigen Kenntnisse von der *Perspektive*, die sich im Altertum nachweisen lassen, scheinen in den kulturarmen Zeiten der Völkerwanderung völlig in Vergessenheit geraten zu sein. In der Malerei machte sich die „byzantinische Manier“ breit. Die Kunst der asiatischen Kulturvölker (Inder, Japaner, Chinesen) zeigt keine perspektive Raumauffassung. Die malerische Perspektive wurde erst in der Renaissancezeit von spekulativen Künstlern wiederentdeckt. Das Verfahren der Grund- und Aufrisse dagegen erhielt sich das ganze Mittelalter hindurch und wurde in den *„Bauhütten“* wegen der immer schwieriger werdenden Aufgaben des *Steinschnittes* gepflegt. Aber Gemeingut der mathematisch Gebildeten konnte es nicht werden, weil in jenen Zeiten auf dem Gebiete wissenschaftlicher Entdeckungen und nützlicher Erfindungen die Geheimniskrämerei an der Tagesordnung war.

16. Die malerische Perspektive von der Renaissance bis zum Ende des 16. Jahrhunderts. Mit dem Wiederaufblühen der Künste beginnt für die darstellende Geometrie eine neue Epoche. Waren es zuerst auch nur einzelne *Probleme der Perspektive*, an deren geometrischer Lösung sich namentlich italienische Meister versuchten, so trugen sie doch vieles zur Klärung der Grundanschauungen und zur Bildung der wichtigsten Begriffe bei und bereiteten eine mathematische Behandlung vor, die mit *Guido Ubaldo del Monte* (1545—1607) einsetzt. Der Grundgedanke der *Zentralprojektion*, wonach die Perspektive eines Gegenstandes als Schnitt der „Sehstrahlenpyramide“ mit der Bildfläche entsteht, tritt klar hervor und wird zum Ausgangspunkt aller Bemühungen, mit Zirkel und Lineal oder mit dioptrischen Apparaten die Unvollkommenheiten der Linienführung in Zeichnungen, Gemälden und plastischen Bildwerken zu beseitigen oder zu vermindern. Aus jener Zeit datiert die Einführung einer ganzen Reihe von fundamentalen Begriffen, wie z. B. *Gesichts-* oder *Augpunkt, Bildebene,*

Distanz, *Hauptpunkt*, *Boden-* oder *Grundebene*, *Grundlinie*, *Horizontlinie*, *Distanz-* und *Accidentalpunkte* usw. Die Fragestellung entsprach den Anwendungen in der bildenden Kunst.

Als *Grundaufgaben* betrachtete man 1) die *Abbildung der Punkte der Grundebene* (die man sich meist als quadratisch getäfelten Fußboden vorstellte), 2) die der *Höhen über dem Boden*. *Leon Battista Alberti* (1404—1472) löste die erste Aufgabe (für gerade Ansicht) mittels des *Hauptpunktes* und eines *Distanzpunktes*, gab aber keine Beweise[35]). Er wandte den *Flor* an (ein ausgespanntes Fadennetz, durch dessen Maschen man die Objektpunkte anvisierte). *Piero degli Franceschi* (1420—1492)[36]) kannte die Fluchtpunkte beliebiger Horizontalen. Die Anwendung seiner Regeln zeigt das (mutmaßlich *erste gedruckte*) Werk über Perspektive von *Viator* (*Pèlerin*)[37]). Der feine Sinn für Perspektive, den schon die Werke der Frührenaissance offenbaren, führte dahin, einzelnen Meistern, wie *Filippo Brunelleschi* (1377—1446) und *Lorenzo Ghiberti* (1378—1455), genaue Kenntnisse ihrer mathematischen Regeln zuzuschreiben, womit wohl etwas zu viel gesagt ist. Die berühmten Bronzetüren des *Ghiberti* am Baptisterium zu Florenz zeigen eine geniale Übertragung der Prinzipien der malerischen Perspektive auf die *plastische Zeichnung* im *Relief*, bilden aber *kein* Beispiel für die Anwendung der *Zentralkollineation des Raumes* (s. Nr. **34**), die man mit wenig Berechtigung als *Reliefperspektive* bezeichnet hat. *Leonardo da Vinci* (1452—1519) spricht das Gesetz aus, daß sich die Bildlängen gleicher aufrechter Strecken (in einer Ebene durch das Auge) wie die reziproken Distanzen vom Auge verhalten[38]). *Albrecht Dürer* (1471—1528) benutzte teils dioptrische Apparate, teils bestimmte er das perspektive Bild mit Hilfe von zugeordneten Normalrissen (s. Nr. **17**). Auch *Jean Cousin* (1501—1590)[39]), *G. Barozzi da Vignola* (1507—1579)[40]) und *Daniele Bar-*

35) Sein Werk: De pictura, vor 1444 verfaßt, wurde lateinisch in Nürnberg 1511 gedruckt. Italienisch: Della pittura e della statua, v. *R. Dufrèsne*, Paris 1701 und Neapel 1733.

36) Seine Schrift: De prospectiva pingendi befindet sich in der Biblioteca Ambrosiana zu Mailand; sie wurde herausgegeben unter dem Titel: *Petrus Pictor Burgensis*, De prospectiva pingendi, von *Winterberg*, Straßburg 1899.

37) De artificiali perspectiva. Das Werk enthält wenig Text, aber zahlreiche schöne Figuren. Ort und Jahr des Erscheinens sind auf dem Titel nicht vermerkt. Nach *Chr. Wieners* Angabe: Toul 1505.

38) Trattato della pittura, Ausg. von *R. Dufrèsne*, Paris 1701 u. Neapel 1733, p. 15.

39) Livre de la perspective, Paris 1560.

40) *Vignolas* Werk liegt in einer Bearbeitung von *Egnatio Danti* vor: Le due regole della prospettiva pratica etc., Rom 1644.

baro[41]) bedienten sich noch neben geometrischen Sätzen solcher empirischer Hilfsmittel. *G. Ubaldo*[42]) endlich verzichtete völlig auf diese und operierte rein geometrisch. Er gab den allgemeinen *Begriff des Fluchtpunktes* („punctum concursus") paralleler Geraden und löste die Grundaufgaben der Perspektive, namentlich für ebene Figuren, auf zahlreiche Arten, indem er dabei die *Umlegungen* benutzte. In *G. Ubaldo* darf man den *Begründer der theoretischen Perspektive* sehen.

17. Dürers „Unterweisung"[43]). Der Name des deutschen Malers *Albrecht Dürer* (1471—1528) wird in der Geschichte der Mathematik rühmend erwähnt[44]); aber worin seine selbständigen Leistungen und Fortschritte auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie bestehen, ist noch nicht genügend bekannt.

Dürer will nicht als ein Mathematiker gelten[45]), sondern die

---

41) La pratica della prospettiva, Venedig 1569.

42) Perspectivae libri sex, Pesaro 1600. Die vier ersten Bücher bringen fast alle *Hauptsätze der Perspektive.* Die Konstruktionen gehen aus vom *Grundriß* (planta) der Objektpunkte und ihrer Höhe über dem *Boden* (subjectum planum); die *Bildebene* (erectum planum) ist vertikal; das *Bild* (sectio) wird mittels der Sehstrahlen gefunden. Die streng bewiesenen Regeln werden nicht nur zur Darstellung *geradliniger* und *ebenflächiger Gebilde* angewandt, sondern auch auf *krumme Linien* und *Flächen* ausgedehnt (Kreis, Zylinder, Kegel, Kugel). Das fünfte Buch handelt von den *Schattenkonstruktionen*, das sechste von der *Theaterperspektive.*

43) Dies Werk erschien zuerst in Nürnberg 1525; es hat sieben Auflagen erfahren und „Schule gemacht". In der zweiten deutschen Ausgabe führt es den Titel: „Vnterweysung der Messung mit dem Zirckel vnd richtscheyt / in Linien Ebnen vñ gantzen Corporen / durch Albrecht Dürer zusammengezogen / vñ durch jn selbs (als er noch auff erden war) an vil orten gebessert / in sonderheyt mit XXIJ. figurẽ gemert / die selbigen auch mit eygner handt aufgerissen / wie es dann eyn yder werckman erkeñen wirdt. Nun aber zu nutz allen kunst liebhabenden in truck geben. 1538." Eine in Nürnberg von *J. Camerarius* bearbeitete lateinische Übersetzung ist zuerst 1532 in Paris erschienen.

44) *A. G. Kästner,* Gesch. d. Math. 2, Göttingen 1797, p. 9; *M. Chasles,* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie, Paris 1837; deutsch von *Sohnke,* 1839, p. 623 f. *C. J. Gerhardt,* Gesch. d. Math. in Deutschland, München 1877, p. 25 bezeichnet *Dürers* Werk als „die erste darstellende Geometrie in deutscher Sprache". *Chr. Wiener,* Lehrb. d. darst. Geom., Leipzig 1884, p. 10 u. 14; *S. Günther,* Die geometr. Näherungskonstruktionen A. Dürers, Progr. Ansbach, 1885; Gesch. d. math. Unterrichts im deutschen Mittelalter, Berlin 1887; Albr. Dürer, einer der Begründer der neueren Kurvenlehre, Bibl. math. 3 (1886); *H. Staigmüller,* Dürer als Mathematiker, Progr. Stuttgart 1891. *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. d. Math. 2, Leipzig 1900, p. 459—468; im 4. Bd., Abschn. XXV (Perspektive u. darst. Geom.), 1908, bezweifelt *G. Loria* die Berechtigung der *Gerhardt*schen Auffassung.

45) Seine Schrift beginnt er mit den Worten: „Der aller scharff sinnigst

geometrische Zeichenkunst künstlerischen Zwecken und vor allem der Erziehung junger Künstler dienstbar machen. Darin liegt seine Stärke, nicht aber in den eingestreuten Versuchen, mathematische Sätze zu demonstrieren, die mit dem Hauptinhalte seiner Schrift oftmals nur in losem Zusammenhange stehen. *Er erfindet neue geometrische Formen*, er erdenkt für sie eine gesetzmäßige Erzeugung und wendet diese sofort *deskriptiv* an; aber eine streng mathematische Analyse ist ihm fremd. Er zeigt sich stets als ein Synthetiker, der in den Formen der Kunst und in der organischen Natur geometrisch faßbare Gesetze wiedererkennen will[46]).

Dürers Figuren sind auf den ersten Blick verständlich; weniger leicht seine altertümliche Sprache. Er meidet die Fremdwörter; fehlen ihm deutsche Namen, so erfindet er welche. Wir lesen von *Zirkel-*, *Schlangen-*, *Eier-*, *Brenn-*, *Gabel-*, *Schnecken-*, *Schrauben-*, *Muschel-* und *Spinnenlinien*, von *Barlinien* (Parallelen), *Zwerchlinien* (horizontalen Querlinien) und *Ortstrichen* (Diagonalen, Transversalen). Er braucht das Wort *Ebene*, wo wir heute *Fläche* sagen (also auch für krumme Flächen). Er spricht von einer *platten gevierten Ebene* (Quadrat), einer *runden Ebene* (Kreisfläche), einer *hohlen oder erhabenen gekugelten Ebene* (Halbkugel), einer *gebogenen* (Zylinder) und einer *gebeulten* (welligen) Ebene. Statt *Geometrie* sagt er meist *Messung*. Das Wort *Perspektive* gebraucht er nicht; eine perspektive Zeichnung nennt er ein *abgestohlenes Gemälde* („Gemel“). In die Sprache unserer Zeit übertragen, würde also der Titel seines Werkes etwa lauten: *Geometrische Anleitung, Linien, Flächen und Körper mit Zirkel und Lineal zu zeichnen*. Die Bezeichnung als *Darstellende Geometrie* würde sinngemäß sein, denn dem Autor war das *Grund- und Aufrißverfahren in der vervollkommneten Form* geläufig, die nach irriger Meinung erst *Monge* eingeführt haben soll. Aber weder *Dürer* noch *Frezier* noch *Monge* nimmt die Erfindung der *Methode der zugeordneten Normalrisse*, wie sie *E. Müller* treffend nennt[47]), für sich in Anspruch. Sie war schon zu *Dürers* Zeiten nichts Neues mehr, sondern gehörte zu den Zunfttraditionen der *„Bauhütten“*.

Dürer war als Maler an die aufrechte Stellung der Bildfläche gewöhnt. Er stellt den *Grund* horizontal, den *aufgezogenen Riß* ver-

---

Euclides / hat den grundt der Geometria zusammengesetz / wer den selben wohl versteht / der darff diser hernach geschriben ding gar nit.“

46) Das letztere geht deutlich aus einer anderen bekannten Schrift *Dürers* hervor: Von menschlicher Proportion, Nürnberg 1528.

47) *E. Müller*, Lehrb. d. darst. Geom. f. techn. Hochschulen 1, Leipzig und Berlin 1908, p. 12.

tikal; er zeichnet den Schnitt der Tafeln als *Zwerchlinie* und den ersten Riß unter dem zweiten. Offenbar denkt er sich die erste Tafel umgelegt, denn er spricht vom *niedergedrückten Grund.* Die beiden Risse eines Punktes bezeichnet er mit gleichen Zahlen oder Buchstaben und verbindet sie durch aufrechte Linien. Im Gebrauche dieser Mittel aber geht er nicht systematisch vor. Verschiedenartige Gebilde wechseln in bunter Reihe. Von den eingestreuten *Sätzen* sind *nur die rein deskriptiven* beachtlich. Er bildet von ihm erdachte, teilweise auch schon vor ihm bekannte mechanische und dioptrische *Zeichenapparate* ab.

Die *Unterweisung* besteht aus vier Büchern. Im I. Buch werden vornehmlich *Spiralen* und *Kegelschnitte* behandelt; im II. *Polygone* und mosaikartige *regelmäßige Einteilungen der Ebene in Felder*; im III. *architektonische Formen, Gnomonik und Buchstabenschnitt*; im IV. *Polyeder, Perspektive und Schattenkonstruktion.*

I. Buch. In *Dürers* Art, *Spiralen* zu konstruieren, erkennt man die Keime zur *Methode der ebenen Polarkoordinaten*, vgl. III A B 7, Nr. 9, *E. Müller.* Er dreht nämlich einen linealen Maßstab durch gleiche Winkel um den Nullpunkt der Teilung als Pol, zieht Vektoren und begrenzt sie nach einer in der Erzeugung des Maßstabes ausgeprägten Regel. So findet er die *Archimedische Spirale* ($r = a \cdot \varphi$), eine *Schneckenlinie* $\left(r = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{n}\right)$ und eine Art *Kardioide* $\left(r = a \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right)\cdot$ Weiter *versucht* er eine *ewige Linie*, die stetig einwärts nach einem Zentrum (umgekehrt aber endlos in die Weite) läuft, nach der Vorschrift zu zeichnen, daß sich der Vektor bei jedem Umlauf auf die Hälfte vermindert. Dies gibt eine *logarithmische Spirale* $\left(r = a \cdot 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}\right)$. Indem er zwischen gleichmäßig geradlinig verschobene Kreise gleiche kleine Strecken einträgt, erhält er eine Kurve, die als *Grundriß einer Linie gleichen Falles auf einem schiefen Kreiszylinder* aufgefaßt werden kann; sie zeigt den Typus einer Cykloide. Aber auf die Konstruktion der *Rollkurven* ist *Dürer* nicht gekommen. Ist für eine bewegte Gerade die Summe der Abschnitte auf zwei rechtwinkligen Achsen $= a$ und für einen ihrer Punkte der Abstand vom ersten Achsenschnitt $= b$, so beschreibt er *Dürers Muschellinie*[48]) $((xy - y^2 + b^2)^2 + (x + y - a)^2 \cdot (y^2 - b^2) = 0)$. Von dieser Kurve wird nur ein Stück gezeichnet; ihre Asymptoten

---

48) Sie ist von der *Konchoide* des *Nikomedes* (vgl. *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. d. Math. 1 (1894), p. 334 f.) verschieden. Die Zeichenapparate *Dürers* und des *Nikomedes* haben eine gewisse Ähnlichkeit. Vielleicht hat *Dürer* eine ungenaue Kenntnis der alten Konstruktion gehabt.

und die Hüllparabel der Konstruktionslinien bleiben unbeachtet. *Dürers Spinnenlinie* ist eine *Epizykloide* und wird mit Hilfe von Epizyklen konstruiert; der Name ist von der Konfiguration der Hilfslinien hergeleitet. Die drei Arten der *Kegelschnitte* werden aus den Projektionen eines Drehkegels mittels einer zum Aufriß normalen Schnittebene in wahrer Gestalt gezeichnet, von der *Hyperbel* (Gabellinie) nur *ein Zweig ohne Asymptoten.* Die *Ellipse* wird auch als „in die Länge gezogener Kreis" durch eine besondere *affine* Transformation erhalten. Daß *Dürer* ihre *doppelte Symmetrie* entgangen sei, weil er sie „Eierlinie" nennt und ungenau zeichnet, ist möglich, aber nicht erwiesen, weil er vorher die Umrißform eines Eies besonders behandelt und seine Konstruktionsregeln an sich richtig sind[49]). Von der *Parabel* (Brennlinie) kennt er die Eigenschaft des Brennpunktes.

Dürer kennt zwei Arten *räumlicher Schneckenlinien* (vgl. III D 4, *Scheffers*). Er läßt einen Punkt im Grundriß entweder einen Kreis oder eine Spirale beschreiben und erteilt ihm gleichzeitig eine dem Drehwinkel seines Vektors proportionale Verschiebung aufwärts. Im ersten Falle erhält er eine *Schraubenlinie*[50]) und als ihren Aufriß eine *allgemeine Sinuslinie* $\left(\frac{y}{b} = \sin\frac{x}{a}\right)$. Die Erfindung der *gemeinen Sinuslinie* ($y = \sin x$) schreibt man *G. P. Roberval* (1602—1675) zu, der sie 1635 als Begleitkurve („comes, socia") der gespitzten Zykloide fand[51]). *Dürer* benutzt *graphische Maßstäbe* statt numerischer Tafeln für die Sinus und Tangenten. Die Grundideen des *graphischen Rechnens* (I F *Numerisches Rechnen, R. Mehmke*) waren ihm nicht fremd. Hier interessieren *graphische* Lösungen *deskriptiver Aufgaben*: die Zusammensetzung der erwähnten Eiform aus Kreisbögen, die Aufsuchung des Zentrums eines gezeichneten Kreisbogens, der Kreis durch drei Punkte und der Berührungspunkt einer gezeichneten Kreistangente. Ferner seine Auffassung von den *Parallelen*: bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich die nach ihm aus einem festen Punkte gezogene Ortlinie, neigt sich stetig näher zur Barlinie und „komen doch ewiglich nymer meer zusamen"[52]).

Das II. Buch „von den ebnen Feldern" und das III. „von den körperlichen Dingen" bringen deskriptiv wenig Neues. In planimetrischen und stereometrischen Fragen zeigt sich *Dürer* abhängig von den

49) Vgl. *M. Cantor,* a. a. O. 2, p. 461 u. *H. Staigmüller,* p. 16.

50) „Eyn andre Schneckenlini / die auch die Steinmetzẽ zu den stigen gebrauchen / sie wirdet aber billicher ein schrauffen lini genannt", a. a. O. Bl. B 2.

51) *G. Persone Roberval,* Mém. Académie Royale des Sciences 6, Paris 1730, p. 302. Vgl. *M. Cantor,* Vorl. 2, p. 878.

52) a. a. O. Bl. C 1.

antiken Geometern, deren Sätze ihm unvollständig aus Übersetzungen oder Exzerpten[53]) oder aus der Überlieferung des Kunsthandwerkes bekannt waren. Er unterscheidet zwischen den „mechanice“ oder „demonstrative“ gefundenen Sätzen, läßt sich aber dennoch dazu verleiten, aus rein zeichnerischen Ergebnissen unrichtige Schlüsse zu ziehen. So hindern ihn z. B. bei der Zusammensetzung regulärer Polygone nur graphische Fehler, *Schließungssätze* richtig zu erkennen. Am Anfang des IV. Buches stellt er die *regulären* (*Platonischen*) und viele *halbreguläre* (*Archimedische*) Polyeder durch Normalrisse dar. Einige Fehler beweisen, daß *Dürer* die Geometrie der Alten nicht vollkommen verstanden hat. Was er selbständig und deskriptiv anfaßt, z. B. die Entwicklung der *Polyedernetze*, gelingt ihm. Auf dem Boden fremder Ergebnisse aber fühlt er sich unsicher. Die *Schattenkonstruktion* setzt *Dürer* an dem Beispiele eines gerade aufgestellten Würfels auseinander. Er zieht aus beiden Rissen des Lichtpunktes die *Projektionen der Lichtstrahlen* durch die Ecken und sucht ihre *Spurpunkte* (genau so, wie es rund 260 Jahre später *G. Monge* lehrte). Unabhängig von italienischen Meistern hatte *Dürer* sein Verfahren entwickelt, die *Perspektive* eines Gegenstandes und seines Bodenschattens *aus Normalrissen* abzuleiten. *Licht- und Augpunkt* bestimmt er durch *Grund-* und *Aufriß*, die *Bildebene*[54]) stellt er wie einen Seitenriß zu beiden Tafeln normal, zieht *Sehstrahlen* in beiden Rissen und bestimmt ihre *Spurpunkte* in dem Seitenriß, den er umlegt. Als „nehern Weg“ trägt er das *Verfahren des Haupt-* und *Distanzpunktes* vor, das er auf seiner italienischen Reise (1506, vielleicht von *Luca Pacioli*) gelernt hatte.

Dürer stand mit seinen geometrischen Kenntnissen über seinen Zeitgenossen. Wenn ihm auch mathematische Strenge unerreichbar blieb, war er doch der *erste fruchtbare Schriftsteller* auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie und der *Begründer* der *„angewandten Perspektive“* in Deutschland.

18. Die axonometrische Perspektive bei Desargues und seinen Zeitgenossen. Durch die Auffassung der Italiener von den Grundproblemen (Abbildung der quadratischen Bodentäfelung und der Höhen)

---

53) Hierher gehört die *„Geometria deutsch“*, unbekannten Verfassers, Nürnberger Stadtbibliothek, veröffentlicht von *S. Günther*, Zeitschr. Math. Phys. 22, hist.-liter. Abt., p. 5 f.

54) „Eyn ebne durchsichtige Abschneidung aller der streymlinien die auß dem aug fallen auff die ding die es sicht“, a. a. O. Bl. P 1. Es ist genau dieselbe Konstruktion, die *G. Loria*, Vorl. üb. darst. Geom. 1, deutsch v. *Fr. Schütte*, Leipzig 1901, p. 31, anführt.

war eine *maßstäbliche* oder *axonometrische* Behandlung der *Perspektive* nahegerückt; ebenso war der *Koordinatenbegriff* vorbereitet, auf dem *R. Descartes* (1596—1650) die *analytische Geometrie* aufbaute[55]). Die Idee der *perspektiven Maßstäbe* verwertete *G. Desargues* (1593—1662) zu einer allgemeinen Methode. Mehrere von den Aperçus dieses mit *Descartes* befreundeten Geometers und Architekten, die man verloren glaubte, die aber *M. Poudra*[56]) größtenteils aufgefunden und herausgegeben hat, betreffen *deskriptive* Aufgaben der *Perspektive*[57]) und des *Steinschnittes*[58]) und der *Gnomonik*. Daß *Desargues* durch seine Ideen über unendlichferne Elemente, perspektive Lage, Kegelschnitte, Transversalen, Involutionen, Pole und Polaren usw.[59]) wesentlich zur Grundlegung der *projektiven Geometrie* (III A B 4a, *Fano*; III A B 5, *Schoenflies*) beigetragen und seinen Schülern, darunter *Bl. Pascal* (1623—1662), fruchtbringende Anregungen gegeben hat, erkennen *J. V. Poncelet* (1788—1867)[60]) und *M. Chasles* (1793—1880)[61]) an; ersterer nennt ihn den „Monge de son siècle". *Desargues* liebte es, allgemeine Sätze oder Methoden dogmatisch zu geben. Der Kupferstecher und Radierer *A. Bosse* (1605—1678) bemühte sich die Ideen seines Lehrers auszuarbeiten[62]) und weiterzuführen[63]); seine Kommentare wurden von *Desargues* ge-

55) *R. Descartes*, Géométrie, Leyden 1637. Deutsch v. *L. Schlesinger*, Berlin 1894.

56) Oeuvres de *Desargues*, réunies et analysées par *M. Poudra*, 2 Bände, Paris 1876.

57) Méthode universelle de mettre en perspective les objects donnés réellement ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage, p. G. D. L. Paris, priv. 1630, gedr. 1636, Original verloren, reprod. von *A. Bosse* 1647. — Perspective adressée aux théoriciens, Paris 1643.

58) Brouillon project d'exemple d'une manière universelle du sieur G. D. L. touchant la pratique du trait à preuve pour la coupe des pierres en l'architecture et de l'éclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en perspective comme en géométral et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil, Paris 1640.

59) Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan etc., Paris 1639.

60) Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, Introduction p. XXXVIII f.

61) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Paris 1837, p. 74 f., 331 f.

62) *A. Bosse*, La pratique du trait à preuve de M. *Desargues* Lyonnois, pour la coupe des pierres en l'architecture, Paris 1643. Manière universelle de M. *Desargues* pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral etc., Paris 1648. Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux ou surfaces irrégulières etc., Paris 1653.

63) *A. Bosse*, Traité des pratiques géométrales et perspectives enseignées

billigt. Andererseits hatte dieser Feinde, die ihm die Priorität seiner Erfindung der *Fluchtmaßstäbe* bestritten[64]) und seine Verdienste durch anonyme oder öffentliche Flugschriften[65]) zu verkleinern suchten.

In der *Perspektive* geht *Desargues* von *Koordinaten*, nämlich *Tiefen-, Breiten- und Höhenmaßen*, aus. Den *Tiefenmaßstab* (échelle fuyante), den *Breiten- und Höhenmaßstab* (échelle des mesures) leitet er aus dem *wahren Maßstab* (échelle de petits-pieds) ab, der für den Grundriß (plan géométral, assiète) gilt und auf der Grundlinie gezeichnet ist. Er benützt den *Hauptpunkt* des *Horizontes* und statt des eigentlichen *Distanzpunktes* einen *reduzierten*, den er durch gleichmäßige Verkleinerung der Distanz und des Grundmaßstabes erhält. In einem *Anhange* zur *Méthode universelle* werden für „les contemplatifs" die Begriffe des *Sehstrahles* (ligne de l'oeil), der *Sehstrahlenebene* und des *Fluchtpunktes* paralleler Geraden erörtert, auch bemerkt, daß ein Strahlbüschel durch Parallelen abgebildet wird, wenn der Sehstrahl des Scheitels zur Tafel parallel ist. Wie zur Bestimmung der *Bildrichtungen horizontaler Geraden* eine *maßstäbliche Einteilung der Horizontlinie* dienen kann, fügte *E. Migon* hinzu[64]). *M. Battaz*[66]) erreichte diesen Zweck durch Umlegung der Grund- und Horizontebene, indem er *Flucht-* und *Teilungspunkt* einer horizontalen Geraden durch *umgelegte Sehstrahlen* bestimmte.

Die *Grundaufgaben des Steinschnittes* legt *Desargues* an dem allerdings instruktiven *Beispiel* eines *schrägabsteigenden gewölbten Durch-*

---

dans l'Académie Royale de la peinture et sculpture, Paris 1665, bringt Anwendungen der Perspektive auf Basreliefs.

64) *E. Migon* schrieb sie fälschlich dem Ingenieur *Aleaume* zu. *Aleaumes* 1628 privilegiertes Werk: Introduction à la perspective pratique, ensemble l'usage du compas optique et perspectif, von dem nur wenige Blätter gedruckt wurden, enthält jene Methode nicht. *E. Migon* erwarb die unvollendete Schrift und gab sie mit eigenen Zusätzen unter dem Titel: La perspective spéculative et pratique. De l'invention de sieur *Aleaume*, ingénieur du Roy. Mise au jour par *E. Migon*, Paris 1643, heraus. Er reproduziert die von *Desargues* 1636 publizierte Methode der perspektiven Maßstäbe, bringt aber als etwas Neues eine Einteilung der Horizontlinie hinzu, die man nach *M. Poudra* als eine „échelle des directions" bezeichnen kann. Dieser Maßstab gibt die Fluchtpunkte der Horizontalen von bestimmter Tafelneigung und wird erhalten, wenn man in der Horizontebene einen Teilkreis aus dem Augpunkt als Zentrum auf die Horizontlinie projiziert.

65) *J. Curabelle*, Examen des oeuvres du sieur *Desargues*, Paris 1644. Näheres über die unfruchtbaren Streitigkeiten der Gelehrten in jener Zeit findet man bei *M. Poudra*, Oeuvres de *Desargues* 2. — *Vaulezard*, Abregé ou racourcy de la perspective par l'imitation, Paris 1644.

66) *M. Battaz*, Abréviations des plus difficiles opérations de perspective pratique, Paris 1644.

ganges in einer *Böschungsmauer* (descente biaise dans un mur en talus) dar. Er bestimmt mittels Hilfsebenen und *Achse* (essieu) die *Wölbfläche* (voûte) aus einzelnen Erzeugenden, die Stellungswinkel der *Widerlager* (coussinets), der *Fugen* (joints) und *Seiten* (panneaux) der Wölbsteine und den *Lehrbogen* (arc droit, cintre). Auch hier vermißt man jede Begründung der Konstruktionen. Über die Natur der Wölbfläche erfährt man nichts Näheres.

19. Die freie Perspektive bei Stevin, Gravesande, Taylor und Lambert. *S. Stevin* (1548—1620) steht zwar auf dem Boden der *angewandten Perspektive*, bringt aber, wie *G. Ubaldo*, in seiner *Optik*[67]) Sätze, in denen man die Keime zur *Zentralkollineation ebener Figuren* erkennt. Um zur Perspektive eines Gegenstandes zu gelangen, die sein Kommentator *Girard* „ombragement" nennt, nimmt er das *Auge*, seinen *Grundriß* (pied de l'oeil), die *Tafel* (vitre), die *Grundlinie* (vitrebase), die *Höhe des Horizontes* darüber (mesure du spectateur), den *Grundriß* des Objektes (orthographie, plan, pavé) und den *Aufriß* (orthographie, profil, relief) als gegeben an. Eine Gerade bestimmt er durch ihren *Spurpunkt* (attouchement) und *Fluchtpunkt* (point de conjonction). Er kennt den Satz, daß die *perspektive Beziehung zweier Ebenen* bei der *Drehung* um die Achse *erhalten* bleibt[68]). Er zieht *verschiedene Lagen der Tafel* in Betracht[69]), sucht *Abkürzungen* und *Kontrollen* der Konstruktion (brievetés et certitudes sur l'opération) und behandelt die Aufgabe, die *Lage des Augpunktes* aus der Perspektive *wiederzufinden*[70]) unter Benützung des Satzes, daß je *zwei Vierecke* (quadrangle ombrageable et l'ombre) in *perspektive Lage* gebracht werden können[71]). Auch bildet er *perspektive Maßstäbe*[72]).

W. J. s'Gravesande (1688—1742) entwickelte neue Methoden der beschreibenden Perspektive[73]), indem er nicht nur *Spur-* und *Fluchtelemente*, sondern auch *Verschwindungselemente* anwandte. Er gebraucht

---

67) *S. Stevin*, Math. Werke, Leyden 1605—1608; von *W. Snellius* aus dem Holländischen ins Lateinische übersetzt 1608. Hier wird die französische Ausgabe von *A. Girard*, Leyden 1634, zitiert: Oeuvres mathématiques, V. livre de l'optique, 1) de la scénographie, dite vulgairement perspective. — Vgl. *M. Chasles*, Aperçu historique etc., 2. Aufl., Paris 1875, p. 347.

68) Tourner le vitre sur la vitrebase comme axe et la ligne du spectateur sur le pied: a. a. O. p. 533.

69) Le vitre à angle oblique sur le pavé, p. 535; parallele avec le pavé, p. 536.

70) De l'invention de l'oeil, p. 550.

71) Seine Konstruktion ist nicht ganz allgemein.

72) De l'ombragement par quarrés, Appendice 5, p. 548.

73) *G. J. s'Gravesande*, Essay de perspective, La Haye 1711, Rotterdam 1717.

die Namen: *ligne de terre* (Grundlinie), *point de vue ou principal* (Hauptpunkt), *rayon principal* (Sehstrahl normal zur Tafel), *point de station* (Grundriß des Augpunktes), *points de distance* (Distanzpunkte des Horizontes) und *ligne géométrale* (Verschwindungslinie im Grundriß). Durch Umlegungen gelangt er zu einer Theorie der *Zentralkollineation in der Ebene* und geht insofern über seine Vorgänger hinaus, als er die perspektiven *Umrisse* eines *Drehkegels*, *Zylinders* und einer *Kugel* (mit Angabe der Achsen der Umrißellipse) bestimmt.

Brook Taylor (1685—1731)[74]) verallgemeinerte die Verfahren der Perspektive, die man zuvor meist nur auf ebene Figuren von besonderer (horizontaler oder vertikaler) Stellung angewandt hatte, und schuf bereits eine *einfache* und *allgemeine Methode*, fast in dem Sinne, wie sie später *W. Fiedler*[75]) an die Spitze seiner *Methodenlehre* stellte. *Taylor* geht vom *Zentrum* (point of sight) zum *Hauptpunkt* (centre of the picture) über und benutzt die *Distanz* (aber nicht grundsätzlich den Distanzkreis); er legt die *Verschwindungsebene* (directing plane) durch das Zentrum parallel zur Tafel. Eine beliebige *Gerade* bestimmt er durch ihren *Spurpunkt* (intersection) in der Tafel und ihren *Verschwindungspunkt* (directing point) oder *Fluchtpunkt* (vanishing point), ebenso die *Ebenen* durch die analogen Bestimmungsstücke: *Spurlinie, Verschwindungs-* oder *Fluchtlinie;* auch bedient er sich des *Normalrisses* (seat) eines Punktes oder einer Geraden in der Tafel. Mit diesen Mitteln löst er die *deskriptiven Grundaufgaben,* z. B. Aufgaben über den Parallelismus und die rechtwinklige Stellung von Geraden und Ebenen, über das Auftragen gegebener Strecken und Winkel u. a. m. Aber als echter Mathematiker begnügt sich *Taylor* nicht damit, die *direkten Aufgaben der Perspektive* gelöst zu haben, sondern *kehrt* sie auch *um*, indem er aus der perspektiven Zeichnung die Eigenschaften der Originalfigur und die Hauptbestimmungsstücke der angewandten Zentralprojektion *rekonstruiert.*

J. H. Lambert (1728—1777) verfolgt das Ziel, die Perspektive

---

74) *Br. Taylor*, Linear perspective, 1715; verbesserte Aufl.: New principles of linear perspective, London 1719; Bearbeitung von *J. Colson,* London 1749. *Taylors* Werk wurde übersetzt, kommentiert und mit Zusätzen bereichert: italienisch von P. *Jaquier,* Elementi di prospettiva secondo li principi di Brook Taylor etc., Roma 1755; französisch von unbek. Verf., Nouveaux principes de la perspective linéaire etc., Amsterdam 1759; *J. Kirby,* Dr. Brook Taylors Method of Perspective etc., Ipswich 1754. — *H. Hamilton,* Stereography or a general treatise of Perspective in all its branches, London 1748, knüpfte an *Taylor* an.

75) *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871, 1. Kap., p. 5 f. Vgl. Jahresber. des deutschen Math.-Ver. 1905, p. 493. *W. Fiedler,* Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit.

unabhängig von Normalrissen zu entwickeln; darum nennt er seine Methode die *freie Perspektive.* Das hier zu betrachtende Werk[76]) gliedert sich in acht Abschnitte; die zweite Auflage enthält Zusätze. Im I. Abschnitt: „Von den Gründen der Perspektive und den Gesetzen, nach denen ebene Flächen und daraufstehende Körper entworfen werden", führt *Lambert* die *Grundbegriffe* ein: *Gesichtspunkt, Hauptaugenpunkt, Entfernung, Fundamental-* oder *Grundlinie, Horizontallinie, Vertikalfläche* (normal zur Tafel durch das Auge) und die *Abweichung* der horizontalen Geraden von der Tafelnormalen sowie ihre *Fluchtpunkte.* Um die Bildrichtung horizontaler Geraden zu bestimmen, führt er ähnlich wie *E. Migon*[64]) einen „*Winkelmesser*" oder eine „Meßleiter" auf der Horizontlinie ein; dieser Maßstab gibt die Tangenten der Winkel mit der Tafelnormalen. *Lambert* behält die für die Originalelemente gültigen Ausdrücke der Lagebeziehungen auch für die perspektive Abbildung bei. Er spricht von „perspektivischen Parallelen und Normalen" und von einer „*perspektivischen Geometrie*"[77]), in der wir die Anfänge zu einer *projektiven Maßbestimmung* erkennen. Mit seinem Winkelmesser löst *Lambert* mehrere Grundaufgaben, z. B. die Abbildung eines Kreises von gegebener Chorde und gegebenem Gradmaß des Bogens. Der II. Abschnitt: „Von der geschickten Lage des Auges und der Entfernung der Tafel von demselbigen" wendet sich an die ausübenden Künstler. Der III. Abschnitt: „Von verschiedenen Instrumenten, dadurch die Ausübung der Perspektive verkürzt wird" handelt vom Gebrauche eines Proportionalzirkels, den *Lambert* für wichtig genug ansah, um ihm eine besondere Schrift zu widmen[78]). Der IV. Abschnitt: „Die Ausübung obiger Regeln in ausführlichern Exempeln" zeigt, daß *Lambert* die *Konstruktion der Voll- und Halbschatten* beherrscht. Der V. Abschnitt: „Von

76) *J. H. Lambert*, Freye Perspektive, oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen, Zürich 1759, 2. Aufl. 1774. Eine französische Ausgabe, Zürich 1759, führt den Titel: La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral. Den gleichen Namen brauchte in etwas anderem Sinne P. *Ch. Bourgoing,* Perspective affranchie, Paris 1661, der sich von den Maßstäben des *Desargues* freimachen und die Fluchtpunkte an ihrer Stelle verwerten wollte. — *J. H. Lamberts* Grundregeln der Perspektive aus Betrachtung einer perspektivisch gezeichneten Landschaft abgeleitet, zum Druck befördert von *C. F. Hindenburg,* Leipzig 1799, bewegen sich mehr auf dem Gebiete künstlerischer Anwendungen. — Vgl. *Fr. Schur,* Johann Heinrich Lambert als Geometer, Festrede, Karlsruhe 1905.

77) A. a. O. § 30, p. 12.

78) Kurzgefaßte Regeln zu perspektivischen Zeichnungen vermittelst eines zu deren Ausübung sowie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportionalzirkels, Augsburg 1768.

der Entwerfung schiefliegender Linien und Flächen und dessen, was darauf vorkömmt“ und der VI. Abschnitt: „Verschiedene Anmerkungen und Beyspiele, so zur Erläuterung dessen dienen, was erst von der Zeichnung schiefliegender Flächen gelehrt worden“ bringen die Anwendung der Begriffe: *Grenzlinie* (Fluchtlinie) einer Ebene und *Fluchtpunkt* der Ebenennormalen. Wichtig ist der VII. Abschnitt: „Von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte“, weil er fast vollständig die der *Affinität* eigenen Lage- und Maßbeziehungen ausspricht. Der VIII. Abschnitt: „Umgekehrte Aufgaben der Perspektive“ lehrt die *Rekonstruktion der Bestimmungsstücke einer Zentralprojektion* aus der Zeichnung und enthält bereits *Prinzipien*, die heute in der *Photogrammetrie* zur vollen Geltung gelangt sind (s. Nr. 44). *Lambert* ist auch unter den Begründern der *Beleuchtungstheorie* zu nennen (s. Nr. 35).

E. Zanotti (1709—1782)[79]) löste die Probleme der *Perspektive konstruktiv* in ähnlichem Sinne wie *s'Gravesande, Taylor* und *Lambert*. Aus *analytischen Gesichtspunkten* wurde der gleiche Gegenstand von *N. L. la Caille* (1713—1762)[80]) und *A. G. Kästner* (1719—1800)[81]) betrachtet. *W. J. G. Karsten* (1732—1787)[82]) schloß sich *Lambert* an, benutzte aber auch die Rechnung.

20. Die Weiterentwicklung der Rißkunst an den Aufgaben des Steinschnittes durch Frezier. In einem reichhaltigen Werke[83]) behandelt der Genieoffizier *A. F. Frezier* (1682—1773) die Anwendungen der Rißkunst auf die Aufgaben der *Stereotomie* und viele damit zusammenhängende Fragen der *deskriptiven Geometrie*. In dem ersten der drei „Discours préliminaires“: „Sur l'utilité de la théorie dans les arts relatifs à l'architecture“, legt der Autor den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen dar: es sind die Bedürfnisse des ausführenden Architekten und Bauingenieurs. In dem zweiten: „Exposition et division du sujet dont il s'agit“ wird der Stoff nach folgenden Kapiteln eingeteilt: 1. *Tomomorphie* (Figures des sections des solides), 2. *Tomo-*

---

79) *E. Zanotti*, De perspectiva in theorema unum redacta, Bonon. Comment. 3, 1755, p. 169 f. — Trattato teorico-pratico di prospettiva, Bologna 1766.

80) *N. L. la Caille,* Leçons élémentaires d'optique, Paris, 1. Aufl. 1750, 3. T.

81) *A. G. Kästner,* Perspectivae et projectionum theoria generalis analytica, Leipzig 1752.

82) *W. J. G. Karsten,* Lehrbegriff der gesamten Mathematik 7, 2. T. Die Optik und die Perspektive, Greifswald 1775.

83) La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties de bâtimens civils et militaires, ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture, par M. *Frezier,* Straßburg und Paris, 1 (1737), 2 (1738), 3 (1739).

graphie (Description des sections, pratique des traits), 3. *Stéréographie* (Description des solides), 4. *Tomotechnie* (L'art de faire des sections). *Frezier* sagt selbst, daß der erste Teil seines Werkes von der *Wissenschaft*, der zweite von der *Kunst* des *Steinschnittes* handelt. In dem dritten Discours: „De l'origine de la coupe des pierres et de l'usage qu'on en doit faire“ erwähnt *Frezier* mehrere frühere Werke über seinen Gegenstand[84]), die aber mathematisch nicht von Interesse sind. Er bezeichnet es als seine *Aufgabe*, eine genaue Kenntnis der *krummen Linien* und *Flächen* zu geben, die bei Gewölbekonstruktionen vorkommen, frühere *Irrtümer* zu *berichtigen*, die Konstruktion von *Rissen* (épures) zu lehren und den *Methoden Beweise* hinzuzufügen.

Das I. Buch bringt nach einigen allgemeinen Bemerkungen über Wölbflächen im 1. Teil eine *Theorie der ebenen Schnitte der Kugel*, der *Kreiskegel* und *Kreiszylinder*, des *Rotationsellipsoides* (sphéroide), des *Rotationsparaboloides* und *zweischaligen Hyperboloides* (conoides réguliers) und der des *Kreisringes* (corps cylindrique annulaire) parallel zur Drehachse. Das *einschalige Hyperboloid* tritt nicht auf. Der 2. Teil behandelt die aus der *Durchdringung* (pénetration) von *Kugeln*, *Kegeln* und *Zylindern* entspringenden *Raumkurven 4. Ordnung 1. Art*. Diese untersucht zu haben bildet ein wesentliches Verdienst von *Frezier*. Ohne eine systematische Einteilung dieser Kurven geben zu können, bestrebt er sich, die sich durchdringenden Flächen in mannigfacher Weise zu kombinieren, um möglichst alle praktisch verwertbaren *Typen* zu erhalten und bezeichnet diese mit neuen *Namen*, die er von dem lateinischen Worte *imbrex* (hohler Dachziegel) ableitet: „cicloimbre, ellipsimbre, ellipsoïdimbre, paraboloïdimbre, hyperboloïdimbre“[85]). Die Figuren stellen (soweit sie nicht schematisch sind) die Gebilde in einer Parallelperspektive dar, wobei gerade und schiefe Ansichten wechseln.

Im II. Buch handelt es sich um die *Beschreibung* (description) der vorerwähnten ebenen und Raumkurven. Was hier *Frezier* vorträgt, ist für die *Entwicklung der deskriptiven Methoden* in der Geo-

84) *Philibert de Lorme*, Traité d'architecture 1567. — *M. Jousse*, Secrets d'Architecture, La Flèche 1642. — P. *Dechalles*, De lapidum sectione 1672, stützt sich auf P. *Deran*, Architecture des voûtes ou l'art des traits et coupes des voûtes 1643.

85) Die letzten drei Namen könnten heute leicht mißverstanden werden. Es ist hier nicht von den Begriffen: Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid mit bezug auf die *Flächen* 2. Ordnung die Rede, sondern von *Raumkurven*, die mit einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel gestaltlich eine gewisse Übereinstimmung zeigen. Zu allgemeinem Gebrauche sind die Bezeichnungen nicht gelangt.

metrie von größter Bedeutung. Der 1. Teil führt in die Darstellung der *Kegelschnitte* und einiger anderer Kurven in der Ebene ein. Die Konstruktion des *Kreises* unter erschwerenden Bedingungen, wo weder der gewöhnliche *Zirkel* noch die *Kreisschnur* (simbleau)[11]) benutzt werden kann (z. B. bei unzugänglichem Zentrum oder sehr großem Radius), wird vom Gesichtspunkte des Zeichners aus erörtert und dabei verschiedener *Apparate* Erwähnung getan, die den Kreis (z. B. durch drei gegebene Punkte) *mechanisch* (organiquement) zu zeichnen gestatten. Im gleichen Sinne werden die *Kegelschnitte* behandelt, und zwar auf zweierlei Weise: entweder geht der Autor von der *gezeichneten Kurve* (considerée comme étant faite) aus, um ihre Hauptbestimmungsstücke (*Zentrum, konjugierte Durchmesser, Achsen, Brennpunkte, Tangenten*) graphisch zu finden, oder er stellt zureichende Bedingungen auf, um die Kurve (considerée comme à faire) aus Achsen, Durchmessern, gegebenen Punkten, Tangenten und ihren Berührungspunkten zu konstruieren. Wir dürfen in diesen echt deskriptiv gehaltenen Ausführungen die Quelle einer ganzen Reihe von Konstruktionen erblicken, aus der spätere Autoren bewußt und unbewußt geschöpft haben; zugleich aber liegen in der von *Frezier* geschilderten *Erzeugung von Kurven* „par un mouvement continu" die ersten Ansätze zu einer *Geometrie der Bewegung* (IV 4, *Schönflies*). Durch *affine Transformationen* löst der Verfasser das Problem, Kegelschnitte so zu verlängern oder zu verkürzen, daß die verwandelte Kurve mit der ursprünglichen auf einem Zylinder liegt[86]). Den *Kreisring* und die *Schraubenröhrenfläche* stellt sich *Frezier* als *deformierten Kreiszylinder* vor, dessen Achse kreisförmig (corps cylindrique annulaire) oder nach einer Schraubenlinie (hélicoide) gebogen ist. Er zeichnet eine Art ihrer ebenen Schnitte parallel zur Dreh- oder Schraubenachse als „une ovale du quatrième ordre"[87]). Dann wendet er sich den *Spiralen* zu. Zuerst konstruiert er die *Archimedische Spirale*, dann *elliptische*, *parabolische* und *hyperbolische Spiralen*, indem er die Ordinaten der „generatrice" für gleichmäßig wachsende Abszissen als Radienvektoren für gleichmäßig wachsende Drehwinkel benützt. Er kehrt den Umlaufsinn um und verwandelt seine Kurven durch *affine Transformationen*[88]), die er auch sonst verwendet[89]). Weiter spricht er von der

86) Alonger ou racourcir les ellipses en telle raison qu'on voudra, en sorte qu'elles soient toujours les sections d'un même cylindre 1, p. 145.

87) Im Falle der Schraubenfläche ist dies nur bedingt richtig.

88) „Quarreaux changez en parallelogrames" 1, p. 173.

89) z. B. um einen „arc de courbe régulière" in einen „arc rampant" zu verwandeln.

„imitation“ der Kurven durch Zusammensetzung von Kreisbögen, von Sätzen über Tangenten, Normalen und Brennpunkte der Kegelschnitte und benützt Hilfskurven, um die Fußpunkte der Normalen von außerhalb gelegenen Punkten zu finden. Der 2. Teil ist der *Beschreibung von Kurven auf konkaven oder konvexen Flächen* gewidmet. Dabei wird schon der *Projektionsmethode im allgemeinen* gedacht. Es handelt sich um die Bestimmung der *Hauptkreise* auf einer *Kugel*, der *Kreisschnitte* des *Kegels* und *Zylinders* und der Formen der ebenen Schnitte eines geraden Kreiskegels. Hierbei werden Normalrisse verschiedenartig angewendet. Der 3. Teil behandelt die *Raumkurven 4. Ordnung 1. Art*, ihre Beschreibung auf krummen Flächen und ihre Darstellung in einer ebenen Projektion, ebenso die *Schraubenlinien* (hélices) und *Schneckenlinien* (limaces) auf dem Kegel und der Kugel.

Das III. Buch: „De la description des divisions des solides“ ist wichtig, weil darin die *Hilfsmittel* der geometrischen *Darstellung körperlicher Gebilde* besprochen werden. *Frezier* führt die *Rißkunst*[90]) auf vier verschiedene *Formen der Beschreibung* zurück: 1) *Ichnographie* (Grundriß, plan), 2) *Ortographie* (Aufriß, élévation; Seitenriß, profil; Vertikalschnitt, coupe), 3) *Epipedographie* (développement, Netz von Polyedern, Abwicklung krummer Flächen) und 4) *Goniographie* (description des biveaux, Bestimmung der Winkel)[91]). Die 5) *Scenographie* (Perspektive) wird für die Anwendung in der Stereotomie als ungeeignet ausgeschaltet. Hierbei ist besonders interessant, was *Frezier* über die *Zusammenstellung der Zeichnungen in einem Risse*[92]) sagt; er empfindet deutlich den Mangel eines einheitlichen Prinzips, entscheidet sich selbst aber gleichwohl nicht für eine bestimmte Anordnung der Risse, die ihren Zusammenhang unmittelbar erkennen läßt[93]). Andererseits warnt er davor, aus Zufälligkeiten in der Zeichnung auf notwendige Zusammenhänge zu schließen. Es blieb *G. Monge* vorbehalten, die *Zuordnung der Normalrisse* zueinander zum *Grundsatz* zu erheben.

Der Inhalt des IV. Buches, welches den 2. und 3. Band füllt (1. Teil: Über die *Tomotechnie* oder die Kunst des Steinschnittes für die Konstruktion von Gewölben usw., 2. Teil: Über den Schnitt der Gewölbe mit zwei oder mehreren Oberflächen), ist vorwiegend *techni-*

---

90) „On peut donc réduire tout *l'Art de tracer une Epure* à quatre sortes de descriptions“ 1, p. 270.

91) *Frezier* behandelt auch die *Dreikantsaufgaben*.

92) „De l'Arrangement des Dessins dans l'Epure“ 1, p. 271.

93) Wie *Frezier* sich diesen denkt, geht klar aus mehreren seiner Figuren hervor, z. B. Fig. 170, Pl. 16; Fig. 249, Pl. 20; Figg. 264, 265, Pl. 22.

scher Natur. Aber am Anfange gibt *Frezier* sehr bemerkenswerte Untersuchungen über die *Erzeugung krummer Flächen* durch gesetzmäßig bewegte Linien, namentlich über *windschiefe Regelflächen.* In dem Abschnitt „De la connoissance des surfaces“[94]) versucht *Frezier* die (für architektonische Zwecke in Betracht kommenden) *krummen Flächen* nach dem *Grade* ihrer *Regelmäßigkeit* einzuteilen. Dieser Begriff wird aber nicht scharf definiert. Er unterscheidet zunächst „surfaces régulieres et irrégulieres“. In die ersteren bezieht er außer den Oberflächen der „corps primitifs“ (Kugel, Kreiskegel und Zylinder) auch die „surfaces régulierement irrégulieres“ ein (d. h. Sphäroide, Kegel und Zylinder von nicht kreisförmiger Basis, Ringflächen usw.). Die Zahl der irregulären Flächen ist unendlich; zu diesen rechnet er die *windschiefen Flächen* (surfaces gauches) und alle übrigen, die ihm einfallen. — In dem Kapitel: „Des surfaces courbes régulierement irrégulieres“[95]) führt der Autor vier Arten von „Surfaces gauches“ an, denen er Namen gibt, die von dem lateinischen Worte *limus* (scheel, schielend) abgeleitet sind. Er *definiert* sie (wenn auch nicht vollständig) durch die *Art ihrer Erzeugung.* Er denkt sich die schiefen Flächen durch Vierecke begrenzt, die gerade oder krummlinige Seiten haben, und benützt zwei Gegenseiten als *Leitlinien,* welche die Erzeugende beständig schneiden soll. 1) *„Planolime“* nennt er die Fläche, die eine *Gerade* beschreibt, wenn sie zwei feste windschiefe Gerade beständig schneidet (und einer Ebene parallel bleibt), 2) *„mixtilime“*, wenn die eine Leitgerade durch eine Kurve ersetzt wird, 3) *„doliolime“*, wenn beide Leitlinien krumm sind (dolium, Faß). Dies sind *Regelflächen.* Wird aber eine *Kurve* als Erzeugende benutzt, so nennt er die Fläche 4) *„sphericolime“*. Für die weiteren Aufgaben des Steinschnittes werden verschiedene Arten solcher Flächen tatsächlich benützt und beschrieben.

Frezier hat unzweifelhaft die *Methoden der darstellenden Geometrie* ein bedeutendes Stück vorwärts gebracht und seinem berühmten Nachfolger *G. Monge* auch darin vorgearbeitet, daß er die Aufmerksamkeit der Mathematiker wieder auf die Fruchtbarkeit einer *synthetischen Behandlung der Geometrie* nach *Euklidischem* Muster lenkte[96]).

94) 2, p. 3.

95) „En Termes de l'Art: Des Paremens Gauches“ 2, p. 7.

96) Im II. Discours préliminaire sagt er: „Je sçai qu'aujourd'hui la Geometrie Lineaire n'est plus gueres à la mode, et que pour se donner un air de Science, il faut faire parade de l'Analyse; cependant „l'ancienne Geometrie“ (dit un Sçavant) quoique moins sublime, moins piquante, même moins agréable, est plus indispensablement necessaire, et plus sensiblement utile“. Er zitiert hierbei *B. Fontenelle,* Eloge d'Ozanam, Mém. de l'acad. d. sc. Paris 1717.

III. Begründung eines wissenschaftlichen Systems.

21. Monges „Géométrie descriptive". *G. Monge* (1746—1818)[97]) trat 1795 mit einem in der Stille sorgfältig vorbereiteten Werke hervor, das zu einer Zeit gewaltiger politischer Umwälzungen auch auf dem Gebiete der geometrischen Wissenschaften eine Art Revolution einleitete. Man vergleiche den Artikel: *Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie* (III A B 4a, *Fano*, Nr. 5). Er bereicherte die reine Geometrie mit einer neuen Disziplin, der er den Namen gab: *„Géométrie descriptive"*, und dies geschah, während noch die fruchtbaren Anregungen, welche *R. Descartes* durch seine *analytische Geometrie* den Mathematikern gegeben hatte, in vollster Wirkung standen und auf allen Gebieten der Analysis große Entdeckungen gemacht wurden, an denen *Monge* selbst durch eigene Untersuchungen hervorragend beteiligt war[98]). Seine Professur an der École normale und der École polytechnique gewährte *Monge* die erste Möglichkeit, über seine neue Methode, die er während seiner früheren Tätigkeit an der Artillerieschule zu *Mézières* (1765—1783) ausgebildet hatte, aber wie ein militärisches Staatsgeheimnis zu hüten gezwungen gewesen war, öffentlich vorzutragen. Seine Vorträge erschienen zuerst in dem Journal des écoles normales unter dem Titel: „Leçons de géométrie descriptive, données à l'école normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes", Paris an III, 1795, und bald darauf in Buchform als „Géométrie descriptive", an VII, 1798, mit 25 Figurentafeln. Das Werk erlebte eine Reihe von Auflagen, von denen die dritte (1811) mit Zusätzen von *J. N. P. Hachette*, die 4. und 5. Auflage (1820 und 1827) mit Supplementen von *B. Brisson* versehen war; Übersetzungen und Bearbeitungen folgten nach.

Den ungeheuren Einfluß, den die von *Monge* entwickelten Prinzipien der beschreibenden Geometrie auf die Fortschritte der geometrischen Wissenschaften ausübten, machte *M. Chasles* (1793—1880) zum Gegenstand eingehender Untersuchung im V. Kapitel und den

---

97) Über die Lebensschicksale und die wissenschaftliche Laufbahn von *G. Monge* findet man Näheres in der Lobrede, die *F. Arago* (1846) dem Andenken des berühmten Geometers in der Pariser Akademie widmete, Oeuvres complètes de *F. Arago* 2, Paris 1854, p. 427 f. Man vgl. *Ch. Dupin*, Essai sur les services et les traveaux scientifiques de *G. Monge*, Paris 1819, und die Anmerkungen, welche *R. Haußner* seiner deutschen Übersetzung der Darstellenden Geometrie von 1798 (Ostwalds Klassiker Nr. 117, Leipzig 1900, p. 181) anfügt.

98) *G. Monge*, Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie etc., Paris 1794—95. — Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde, Journ. de l'école polyt. 2 (1795), p. 145.

Noten XXIII und XXIV seiner Geschichte der Geometrie[99]), ebenso auch *Chr. Wiener* im I. Abschnitt seines Lehrbuches[100]).

C. F. Gauß[101]) empfiehlt die *Géométrie descriptive* als eine „kräftige Geistesnahrung" zur „Belebung und Erhaltung des echten geometrischen Geistes". In der Tat brachte *Monges* Schöpfung einen Umschwung hervor; sie belebte aufs neue die *rein geometrischen Methoden*, nicht im *Gegensatz* zur *Analysis*, sondern als ihre willkommene *Ergänzung*. *Monge* gibt den *Projektionsmethoden* einen neuen Wert, indem er sie anwendet, nicht nur um die *Verwandtschaften ebener Gebilde* und ihre gewissen Transformationsgruppen gegenüber invarianten Eigenschaften zu finden, sondern die *Geometrie des Raumes* auf die der *Ebene* zurückzuführen. *Monge* geht sogleich von umfassenden Gesichtspunkten aus: die begrifflichen Konstruktionen im Raume sollen in der Ebene mit Zirkel und Lineal ausführbar werden. Die *Aufgabe der beschreibenden Geometrie* ist darum eine doppelte: 1) Methoden zu geben, um auf einer Zeichenfläche (feuille de dessin) von zwei Dimensionen körperliche Figuren (corps) von drei Dimensionen auf Grund ihrer geometrischen Definition darzustellen, 2) aus dieser Darstellung alle Sätze abzuleiten, die aus der Gestalt und gegenseitigen Lage der Figuren folgen[102]). Die zur Erreichung dieses Zweckes dienlichen *Verfahren* („procédés qu'une longue expérience a fait découvrir") waren schon längst praktisch und theoretisch so weit entwickelt, daß es nur an einem *einheitlichen Prinzip* fehlte, um ihre *Bestimmungsweisen* umkehrbar *eindeutig* und *allgemein* anwendbar zu machen. Nachdem *Monge* verschiedene Möglichkeiten, einen Punkt des Raumes deskriptiv zu bestimmen, durchgesprochen hat, entscheidet er sich dahin, der *Forderung der Eindeutigkeit* durch die *feste Zuordnung zweier Normalrisse* zueinander zu entsprechen. In diesen werden den Elementen *Punkt*, *Gerade*, *Ebene* bestimmte *Projektions-* oder *Spurelemente* als *Charaktere* zugewiesen, auf welche sich die Methoden zur allgemeinen Auflösung der stereometrischen Aufgaben gründen. Das Prinzip, durch welches *Monge* der *Forderung der Allgemeinheit und Vollständigkeit* der Lösungen gerecht wird, findet sich nicht ausdrücklich formuliert, geht aber aus seiner Beweisart deutlich hervor, welche es erlaubt, die Gültigkeit der Sätze und Methoden unabhängig von zufälligen Beziehungen (rélations contingentes) zu erkennen[103]).

---

99) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837, Paris 1875, deutsch von *L. A. Sohnke*, Halle 1839.

100) Lehrb. der darst. Geom. 1, Leipzig 1884, p. 25.

101) *C. F. Gauß*, Werke 4, p. 359. — Gött. gel. Anz. 121 (1813).

102) Géom. descr. 1798, p. 5.

Diese Auffassung wurde von *L. N. M. Carnot* (1753—1823) zu seinem *Korrelationsprinzip*[104]) und von *J. V. Poncelet* (1788—1867) zum *Prinzip der Kontinuität*[105]) weiterentwickelt und beherrscht seitdem die Beweisarten der *projektiven Geometrie* (*A. Schoenflies*, III A B 5). Die geometrische Beschreibung betrifft nicht mehr, wie bei *Monges* Vorläufern, eine einzelne Art von Gebilden, sondern zeigt die Anwendung der Methode auf *alle analogen Fälle.* Dies forderte zu Untersuchungen darüber auf, welche Figuren als analoge im deskriptiven Sinne gelten dürfen, und führte zur *Theorie der geometrischen Verwandtschaften* allgemeinster Art, sowie zu den *Transformations-* und *Übertragungsprinzipien*, die diese vermitteln. Die deskriptiv wichtigsten sind: 1) die *Kollineationen*[106]), welche speziell zur *Ähnlichkeit* und *Affinität* (einschließlich der *Kongruenz* und *Symmetrie*), der *Perspektivität* (bei *Poncelet: Homologie*) oder allgemein zur *Projektivität* (bei *Chasles: Homographie*) führen; 2) *die Beziehungen zwischen räumlichen und ebenen Figuren*, die durch *Projizieren* und *Schneiden* hergestellt werden[107]); 3) die auf der *Polarentheorie* beruhende *Reziprozität*[108]) und die allgemeine *Dualität*[109]) in der Ebene und im Raume; 4) die Beziehungen, die sich bei der Projektion räumlicher Objekte aus den *Transformationen des Bezugssystems*, d. h. aus den Lageveränderungen der Bildebene, des Zentrums oder aus der *Bewegung* des Originals ergeben. Alle diese *Umwandlungsprinzipien* zielen dahin, den *deskriptiven Methoden* dieselbe *Allgemeinheit* zu verleihen, welche die *analytischen* durch die *Unbestimmtheit der Koeffizienten* in den Gleichungen, also durch die *Variation der Konstanten* erreichen. Und wenn *Monge* diese Grundsätze auch nicht in der heute üblichen Form ausgesprochen hat, so überzeugen uns doch die an mehreren Stellen angestellten Vergleiche zwischen den Methoden der *deskriptiven Geo-*

---

103) Vgl. *M. Chasles*, Aperçu 5, § 10 ff., und III A B 4a, Nr. 5, *Fano.*

104) Traité de la corrélation des figures, Paris 1801. Vgl. III AB 4a, Nr. 6, *Fano.*

105) Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, Introduction p. XIII und p. 413 ff. Vgl. III A B 4a, Nr. 7, *Fano*; III A B 5, Nr. 3, 4, *Schönflies.*

106) Auf den allgemeinen Begriff der Kollineation wurde zuerst *A. F. Moebius* (1790—1868) durch den *baryzentrischen Kalkül*, Leipzig 1827, geführt. Vgl. J. f. Math. 4 (1829), p. 101; Ges. W. (1885—87) 1, p. 417.

107) *M. Chasles*, Aperçu hist. 5 (7), bezeichnet diese mit dem Worte: *Transmutation des figures.*

108) *J. V. Poncelet*, Mém. sur la théorie générale des polaires réciproques, Journ. f. Math. 4 (1829), p. 1 ff.

109) *J. D. Gergonne*, Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. Ann. de mathém. 17 (1826/27), p. 214 ff. Vgl. III A B 4a, Nr. 7, *Fano*; III A B 5, Nr. 5, *Schönflies.*

metrie und der *Algebra* und zwischen den *Konstruktionen* im *Raume* und in der *Ebene*[110]) davon, daß sie seiner Denkweise zugrunde gelegen haben.

Das *Prinzip der Kontinuität* führt ferner notwendig zur Unterscheidung der *allgemeinen* und der *besonderen, ausgearteten Eigenschaften* der Gebilde, die in der *Koinzidenz* gewisser Elemente oder anderen *zufälligen Beziehungen* (*Singularitäten*) ihren Grund haben (vgl. III D 1, 2, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen, *v. Mangoldt*, Nr. 3; III C 4, Abschn. II, *Berzolari*), sowie zu den Eigenschaften, die den Transformationen einer gewissen Gruppe gegenüber *invariant* bleiben. Endlich leitet dies Prinzip über zu dem (schon bei den grundlegenden Aufgaben zweiten Grades zu beobachtenden) *Auftreten imaginärer Elemente.* Wo im algebraischen Sinne imaginäre Elemente oder Beziehungen als gegeben angesehen werden dürfen (z. B. bei den *Doppelelementen vereinigter projektiver Gebilde* oder *Involutionen*, bei den *konjugierten Kegelschnitten*[111]) und der *Imaginärprojektion*[112])), sind hier *reelle graphische Daten* zu benützen, welche die konstruktive Lösbarkeit der Aufgaben gewährleisten. (Vgl. III A B 4a, Nr. **14**, **15**, *Fano*; III A B 5, Nr. **19**, *Schönflies.*)

23. Die Erzeugung krummer Flächen. Theorie der Raumkurven. Das Grund- und Aufrißverfahren reicht vollkommen aus, um alle Gebilde darzustellen, die aus einzelnen Punkten und Linien bestehen. Für die Bestimmung der Gestalt und Lage der Flächen aber erweist sich dieses Verfahren als unzulänglich und unfruchtbar. Die *Darstellung der Flächen* erfordert ein *neues Prinzip*[113]), welches *Monge* darin findet, der Lösung der vielen wichtigen Probleme, die sich hier darbieten (wie der Frage nach den *Tangentialebenen, Normalen*, den beiden *Krümmungen* in jedem Flächenpunkte, den *Krümmungslinien*, den *Rückkehrkurven*, den *mehrfachen Kurven* und *Punkten* usw., vgl. III D 1, 2, *v. Mangoldt*; III D 3, III D 5, *v. Lilienthal*) bestimmte *Erzeugungsweisen der Flächen* zugrunde zu legen. Daß jede krumme Fläche durch die *Bewegung einer krummen Linie* erzeugt werden kann, die entweder eine *unveränderliche* oder eine *gesetzmäßig veränderliche Gestalt* besitzt, erläutert *Monge* an den *Zylinder-*,

---

110) Géom. descr. 1 (10), 3 (49—50), 4 (88—89).

111) *Poncelet*, Propr. proj., p. 29, nennt sie *sections coniques supplémentaires.*

112) Mit dieser beschäftigte sich eingehend *Chr. Wiener*, Lehrb. der darst. Geom. 1, p. 315 ff. u. 382 ff. Über scheinbare Unstetigkeit geometrischer Konstruktionen, welche durch imaginäre Elemente derselben verursacht wird, Zeitschr. Math. Phys. 2 (1867), p. 388 ff.

113) Géom. descr. 1 (11—13).

Kegel- und *Umdrehungsflächen*[114]) und empfiehlt unter den *unendlich vielen Erzeugungsweisen* zwei geeignete auszuwählen, um durch jeden Flächenpunkt *zwei Erzeugende* zu legen, deren Kenntnis bei den meisten Aufgaben genügt. Sofort wendet er sein Prinzip auf die *Ebene* an und hebt unter ihren Geraden die beiden *Spurlinien* (traces), später auch die *Spurparallelen* hervor, die wir heute *Haupt-* oder besser *Streichlinien* nennen. Die zu diesen normalen *Falllinien* treten in der Folge ebenfalls auf.

Mit der Entstehung und den Eigenschaften der Raumkurven und abwickelbaren Flächen hatte sich *Monge* schon vorher beschäftigt[115]). Hier stellt er die *Durchdringungskurven krummer Flächen* nach der *Methode der schneidenden Hilfsflächen* dar. In den einfachsten Fällen wählt er horizontale Hilfsebenen; bei zwei Kegelflächen legt er die Ebenen durch beide Spitzen, bei Zylinderflächen parallel zu den Erzeugenden; bei zwei Rotationsflächen mit sich schneidenden Achsen benutzt er konzentrische Kugelflächen. Die *Tangente einer Raumkurve* ergibt sich als Schnitt der *Tangentialebenen* der Flächen, die sich in ihr durchdringen. Auch die Methode von *G. P. Roberval* (1602—1675) zur Tangentenbestimmung bei der *Bahnkurve eines bewegten Punktes*[116]) wird erwähnt. Aber bei dem Versuch, sie auf Raumkurven auszudehnen, bezieht sich *Monge* auf ein unzutreffendes Beispiel[117]). Die weiteren Ausführungen über *doppeltgekrümmte Linien*, die sich wesentlich mit dem Inhalt der oben[115]) zitierten Abhandlung decken, werden nicht deskriptiv verwertet.

24. Der Aufgabenbereich. *Monges Géométrie descriptive* ist kein alle Teile der Disziplin gleichmäßig berücksichtigendes und methodisch geordnetes Lehrbuch. Sie ist aus Vorträgen entstanden, in denen didaktische Rücksichten und bei der Neuheit des Gegenstandes

---

114) Als viertes Beispiel führt er die *windschiefen Regelflächen* (surfaces gauches) und ihre drei Leitkurven an, darunter das Hyperboloid mit beiden Scharen der Erzeugenden, p. 130, Addition II.

115) Mém. sur les développées, les rayons de courbure et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure (1771), Mém. prés. p. div. sav. Paris 10 (1785), p. 51 ff. (vgl. Schlußkap. der Feuilles d'analyse). Mém. sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et pénombres (1775), Mém. prés. p. div. sav. Paris 9 (1780), p. 382 ff.

116) Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes, herausgeg. von *Du Verdus*, Mém. de l'acad. d. sc. Paris 6 (1730). Vgl. IV, 4, Nr. 7, Note 66, *Schönflies*.

117) Es ist eine *ebene* Kurve. Vgl. *R. Haußner*, Anm. 16 zur deutschen Übersetzung der Géom. descr.

vor allem der Wunsch, das Interesse an den Darstellungsmethoden unter beständigem Hinweis auf die Erfolge der Analysis zu beleben, den Ausschlag gaben. Was diesem Werke an erschöpfender Vollständigkeit und Systematik mangelt, ersetzt es reichlich durch die Fülle anregender Gedanken, durch die Klarheit des Stiles, die Einfachheit und Eleganz der angewandten Methoden. Die *Beispiele,* die für die *praktische Verwertung* der Theorie angeführt werden, sind nicht alle glücklich gewählt; einzelne müssen uns erkünstelt erscheinen, was uns nicht wunder nehmen darf, da ja die enorme Tragweite der deskriptiven Methoden für die praktische Ingenieurkunst sich erst nach vielseitiger Erprobung und nicht sogleich am Anfang zeigen konnte. Jedenfalls hat *Monge* ihre künftige Bedeutung vorausgeahnt [118]). Das der Ausgabe von 1798 vorgedruckte *Avertissement* besagt, daß die *Géométrie descriptive* nur den ersten Teil eines umfassenden Werkes bildete, an dessen Fortsetzung *Monge* durch politische Aufträge gehindert wurde und welches noch die *Linearperspektive,* die *Schattenkonstruktionen,* die *Beschreibung der Maschinenelemente* sowie die *Stereotomie* (die Lehre vom Schnitt der Steine und Hölzer) behandeln sollte. Die Figurentafeln waren schon graviert, dienten aber zunächst nur den Schülern der École polytechnique als Vorlagen und *Monges* Nachfolgern als Fingerzeige für den weiteren Ausbau der Gedanken ihres Meisters.

---

118) Er sagt (Programme, p. 2) von der darstellenden Geometrie: „c'est une langue nécessaire à l'homme de génie, qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties“. *Monge* führt einige wichtige Anwendungen aus der *Geodäsie,* der *Fortifikationslehre* und dem *Steinschnitt* an: die Reduktion eines Winkels auf den Horizont (I, 22), Defilements von Festungswerken (II, 3), Terrainaufnahmen (drei Probleme, IV, 95—102), Fugenschnitt der Gewölbsteine (II, 24; V, 130). In den stereotomischen Aufgaben übertrifft er *Frezier,* indem er für die normale Lage der Fugenflächen zueinander und zur Wölbfläche die statischen Gründe wenigstens andeutet und die Theorie der *Krümmungsflächen* und *Normalenflächen* anwendet. Wenn man aber schon von der geistreichen Lösung der drei geodätischen Aufgaben sagen darf, daß sie sich für die wirkliche Anwendung kaum eignen, so gilt dies (wie *Monge* selbst sich nicht verhehlt) in noch höherem Maße von dem, was er über die Anwendung der *Tangentialebenen* und *Krümmungslinien* in der *Malerei* und der *Radierkunst* zur Bestimmung der Farbentöne, Helligkeitsgrade, Glanzpunkte (II, 25, 34) und der geeigneten Lage der Schraffierungslinien (V, 131) sagt. Ein Gebiet praktisch wertvoller Anwendungen der graphischen Methoden (*Verzahnungstheorie*) streift *Monge* mit der Bemerkung (V, 105), daß sich die *Kreisevolvente* als Form von *Maschinenelementen* (Daumenwellen, Hebezapfen an Pochstempeln, Zahnrädern) verwenden lasse, wobei er des seinerzeit berühmten Mechanikers *J. Veaucanson* (1709—1782) gedenkt.

Die *Géométrie descriptive* ist in *fünf Teile* gegliedert, von denen der letzte mehr der „rationellen" als der „darstellenden" Geometrie angehört. Der I. Abschnitt (1—22) hat keine Überschrift; er handelt von den Aufgaben und Methoden der darstellenden Geometrie überhaupt und den stereometrischen Aufgaben insbesondere. Die Auswahl unter den letzteren ist so getroffen, daß daraus die wesentlichen Methoden entnommen werden können. Der Inhalt der folgenden Abschnitte ist durch ihre Überschriften meist genügend gekennzeichnet: II. (23—47) Des plans tangens et des normales aux surfaces courbes. Dieser Abschnitt enthält Untersuchungen, die auf die *Theorie der konjugierten Pole, Polaren und Polarebenen* bei dem *Kreise*, der *Kugel*, den *Kegelschnitten* und den *Flächen 2. Ordnung* sowie der *Ähnlichkeitspunkte* von *Kreisen* und *Kugeln* führen[119]); III (48—87) Des intersections des surfaces courbes; IV (88—102) Application de la méthode de construire les intersections des surfaces courbes à la solution de diverses questions; V (103—131) De la courbure et des développées des courbes à double courbure. Von den *Additions* bezieht sich I. auf die Schnittpunkte dreier Kreiszylinder, II. trägt die Überschrift: De la génération des surfaces (IV. exemple), III. Du plan tangent à une surface gauche.

25. Lacroix, Monges Rivale. Als *Complément des élémens de géométrie*, die in seinen *Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier*[120]) enthalten waren, ließ *S. F. Lacroix* (1765—1843) die *Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, Paris 1796, erscheinen, ein Werk, das wahrscheinlich nicht ganz unabhängig von den Einflüssen entstanden ist, die *Monges* Ideen auf seine Zeitgenossen ausübten[121]). *Lacroix* geht systematischer vor als *Monge*, aber im wesentlichen stimmen seine Methoden mit denen seines Lehrers und nachmaligen Kollegen überein. Nach der Methode der *plans coordonnés* behandelt er die *Darstellung* der *Geraden*[122]), der *Ebene* und der *Kugel* und löst regelrecht die *Fundamentalaufgaben*, darunter auch die des *Dreikants*. Der zweite Teil

119) Vgl. *E. Kötter*, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. des deutsch. Math.-Ver. 5 (1898), p. 48, 88 u. 112. Die Sätze über die Ähnlichkeitspunkte von Kugeln unterliegen gewissen Einwänden. Vgl. *G. Loria* in M. Cantors Gesch. der Math. 4 (1908), p. 629.

120) S. Avis du libraire, 6. éd., Paris 1829.

121) Die Entstehungsgeschichte des Werkes wird einigermaßen verschieden geschildert von *Ch. Dupin*, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de *Gaspard Monge*, Paris 1819, und von *Th. Olivier* in der Vorrede zum Cours de géométrie descriptive 1, Paris 1852.

122) Neu erscheint der Ausdruck „plans projetans".

bringt die *Erzeugung der Flächen* (namentlich der *Kegel-*, *Zylinder-* und *Umdrehungsflächen*), der *Kurven doppelter Krümmung* und der *Durchdringungskurven*. Es folgen die *windschiefen* und *abwickelbaren Regelflächen*, die Aufgaben der *Abwicklung*, der *Tangentialebenen* und der *Krümmungstheorie*. Den Schluß bildet ein *Essai sur la perspective*, der bekannte Methoden wiedergibt.

26. Monges Schule. Seinen Schülern hatte *Monge* Anregungen und Stoff gegeben, die sie zum Ausbau einer der nützlichsten Wissenschaften verwerten konnten. Dies geschah bei den wiederholten Neuauflagen der *Géométrie descriptive* durch *Zusätze*, die *J. N. P. Hachette* (1769—1834) und *B. Brisson* (1777—1827) verfaßten, aber auch in selbständigen Schriften. Hatte schon *Monge*[123]) auf die Wichtigkeit der Aufgaben über das *Dreikant* hingewiesen, in denen die ganze *sphärische Trigonometrie* enthalten sei, so brachte *Hachette* ihre vollständige Lösung[124]) unter gleichzeitiger Verwendung des supplementären oder *Polardreikants*. Ferner führten *Hachette* und *Brisson* das von *Monge* aufgestellte Programm insofern durch, als sie die *Schattenkonstruktionen*, die *Grundlagen der Beleuchtungslehre* und die *Perspektive* nach *Monges* Gesichtspunten und teilweise nach seinen Aufzeichnungen bearbeiteten[125]). Nach den Materialien, die *Monge* der École polytechnique überlassen hatte, bearbeitete *C. F. Dupuis* einen Aufsatz, der die *Abstufungen der Helligkeit* in den Zeichnungen betraf[126]). *Hachette* schrieb einen *Traité de géométrie descriptive*, Paris 1822, der außer der Theorie der *Schatten*, der *Perspektive* und der *Stereotomie* noch Untersuchungen über die *Flächen 2. Ordnung, windschiefe Regelflächen*, *Schraubenflächen*, über die *Oskulation von Flächen* und die *Krümmung der Raumkurven* enthält. *F. P. Ch. Dupin* (1784—1873) trug durch seinen Satz über die *konjugierten Tangenten einer Fläche* zur Vereinfachung der *Schattenkonstruktionen* bei *krummen Flächen* bei[127]). *Hachette* verwertete diesen Satz zur Bestimmung der *Spitzen*

---

123) Journ. polyt. (an III) 1796. Vgl. Géom. descr., p. 28.

124) Solution complète de la pyramide triangulaire, Corresp. sur l'école polyt. 1 (1813), p. 41ff.; Traité de géom. descr., Paris 1822, p. 122ff. — *G. Bellavitis*, Lezioni di geometria descrittiva, Padua 1851, p. 43 ff., leitete aus der Konstruktion die *Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie* ab, und *F. Hemming*, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 159 ff., vervollkommnete diese Ableitung.

125) *Monge-Hachette*, Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes, Corresp. sur l'école polyt. 1, (1813), p. 295ff.

126) Mém. sur la détermination géométrique des teintes dans les dessins, J. éc. polyt. 1 (1797), p. 167 ff.

127) Vgl. *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geom. 1 (1906), p. 309.

der *Schlagschattengrenzen* von Flächen negativer Krümmung. *Dupin* förderte aber namentlich die *Theorie der Flächenkrümmung*[128]) durch die Betrachtung der *Indikatrix* und der *Haupttangenten* in einem Flächenpunkte. Seine Untersuchungen über die *konfokalen Flächen 2. Ordnung* und ihre *Schnittlinien*, die Krümmungslinien, sind in diesem Zusammenhange ebenfalls zu erwähnen. Auch die Schriften von *C. F. A. Leroy* (1780—1854) knüpfen an *Monge* an und suchen die in den Anwendungen seiner Theorien noch vorhandenen Lücken auszufüllen[129]). Näheres über die hier berührten Probleme findet man in den Artikeln: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen* (III D, 1, 2, *v. Mangoldt*), *Die auf einer Fläche gezogenen Kurven* (III D 3, *v. Lilienthal*) und *Die Flächen 2. Ordnung* (III C 2, *Staude*).

27. Die Nachwirkung der Ideen Monges blieb nicht nur lange Zeit unter den französischen Geometern lebendig, sondern verbreitete sich auch auf andere Länder. Dies beweist eine große Anzahl von Lehrbüchern, unter denen wir die von *Th. Olivier* (1793—1853)[130]) *J. A. R. de la Gournerie* (1814—1886)[131]), *Fr. Weinbrenner* (1766—1826)[132]), *G. Schreiber* (1799—1871)[133]) und *B. Gugler* (1812—1880)[134]) anführen, welche sich der Auffassung *Monges* anschließen.

IV. Neuere Entwicklung der Darstellungsmethoden.

28. Die Geometrie der Lage. Indem die darstellende Geometrie auf elementarer Grundlage und mit den ihr eigenen Mitteln die Lehre von den *Projektionen*, den *Schnitten* und anderen *Umformungen* der Raumgebilde entwickelte, bezeichnete sie den Stoff der *reinen Geometrie* und lehrte die Eigenschaften der räumlichen Formen auf eine neue allgemeine Art erkennen. *Monge* liebte es, die *deskriptiven Operationen* mit denen der *Algebra* zu vergleichen[135]); aber seit das *Prinzip der Kontinuität* in der Geometrie, von der es herstammt, zu voller

128) Développements de géométrie, Paris 1813.

129) Traité de géométrie descriptive, Paris 1836, deutsch von *E. F. Kauffmann*, Stuttgart 1838; Traité de stéréotomie. Paris 1844, deutsch von *E. F. Kauffmann*, Stuttgart 1844.

130) *Th. Olivier*, Cours de géométrie descriptive Paris 1 (1843), 2 (1844), Développements 1843, Compléments 1845, Additions 1847, Applications 1847.

131) *J. de la Gournerie*, Traité de géométrie descriptive, Paris 1 (1860), 2 (1862), 3 (1864).

132) *Fr. Weinbrenner*, Architekton. Lehrbuch, Tübingen 1 (1810), 2 (1819).

133) *G. Schreiber*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach Monges Géom. descr. vollständig bearbeitet, Karlsruhe u. Freiburg 1828—29.

134) *B. Gugler*, Lehrb. der beschreibenden Geometrie, Nürnberg 1841.

135) Géom. descr. (1) 10 und (3) 49—50.

Geltung gelangt war, seit den starren Formen der antiken Geometrie durch das *Prinzip der Erzeugung*, das sie aus beweglichen Elementen entstehen läßt, neues Leben eingeflößt worden war, zeigte sich, daß viele *Methoden der darstellenden Geometrie* auch denen der *Infinitesimalrechnung* nahe verwandt sind. In der Tat kann die erstere die Begriffe des *Unendlichkleinen* und *Unendlichgroßen*[136]) nicht umgehen, wie sie ja überhaupt den *Maßbegriff* benutzen muß, da die Bestimmung der *Größenverhältnisse* der Figuren ebenso einen Teil ihrer Aufgabe bildet, wie die der *Lagebeziehungen*. Die *perspektive Abbildung der unendlichfernen Elemente* und die *deskriptive Auffassung des Parallelismus* bieten wahrhaft geometrische Mittel dar, um den Begriff des Unendlichen der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen. Den *Grenzwertbestimmungen* der *Analysis* treten *geometrische Transformationen* zur Seite, von deren Natur es abhängt, in welcher Form sich das Unendliche in der menschlichen Anschauung widerspiegelt. Die in der deskriptiven Auffassung der *unzugänglichen* und *uneigentlichen Elemente* beruhende prägnante Ausdrucksweise bedeutet eine Reform der *Sprache der Geometer*, die klärend und vereinfachend wirkt, indem sie den *Grundsätzen ausnahmslose Geltung* verschafft. Die darstellende Geometrie führt zu neuen *abstrakten Begriffsbildungen* in der *reinen Geometrie*. Die *deskriptiven Erzeugungs- und Transformationsmethoden* werden zum Fundament einer neuen Wissenschaft, der *Geometrie der Lage*. Diese schaltet die *Maßbegriffe* zunächst aus und verwertet, unabhängig von ihrer praktischen Durchführbarkeit, die *Konstruktionen* rein begrifflich. Sie ordnet stetig gereihte Elemente durch *Projizieren* und *Schneiden* einander zu, ändert die ursprünglich vorausgesetzte *perspektive Lage* der *aufeinander bezogenen Gebilde*, bei welcher das eine aus dem anderen oder beide aus demselben dritten als *Schein* oder *Schnitt* hervorgegangen waren, in eine *schiefe Lage* ab und untersucht die *neuen Gebilde*, deren Elemente sich abermals durch *Verbinden* oder *Schneiden* aus den sich *projektiv entsprechenden Elementen* ergeben. Die so gewonnenen Erzeugnisse dienen als Elemente, um aus ihnen *Raumformen höherer Stufe* aufzubauen. Durch die Herbeiziehung der *Mittel der Analysis* noch allgemeiner aufgefaßt, führen diese Prinzipien zur *projektiven Geometrie*, deren Entwicklung sich an viele berühmte Namen knüpft. Wir nennen hier nur wenige: *L. N. M. Carnot*[137]), *Ch. J. Brianchon*[138]), *J. V. Poncelet*[139]), *A. F.*

---

136) *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geom. 1, 3. Aufl., p. 214 f.

137) Géométrie de position, Paris 1801, deutsch von *Schuhmacher*, Altona 1808—10.

138) Mém. sur les lignes du second ordre, Paris 1817.

Möbius[140]), *J. Steiner*[141]), *M. Chasles*[142]), *G. K. Chr. v. Staudt*[143]), *L. Cremona*[144]) und *Th. Reye*[145]).

Bezüglich der *projektiven Geometrie* ist auf *A. Schoenflies* (III AB 5) zu verweisen. Ihre *synthetischen Methoden* entstammen großenteils der *deskriptiven Geometrie;* eine glückliche Verbindung derselben mit der *Methode der Koordinaten* im weitesten Sinne und der *Theorie der algebraischen Formen* von beliebig vielen Variabeln verleiht ihr eine größere *Allgemeinheit.* Von den *zufälligen Einflüssen der Bezugssysteme* und von den *Besonderheiten der Einzelformen* macht sie sich durch die *Theorie der Invarianten* und der *geometrischen Verwandtschaften* frei und unterwirft sogar die *Metrik* in der Lehre von den *projektiven Maßbestimmungen* ihren allgemeinen Gesichtspunkten. Vgl. auch III A B 1, Abschn. IV, *Enriques.*

29. Die Kollinearverwandtschaften. Schon im Altertum haben die Geometer die einfachsten *Verwandtschaften der ebenen Figuren* gekannt. *Euklides* (um 300 v. Chr.) zieht die *Ähnlichkeit* und die (perspektive) *ähnliche Lage* in Betracht[146]). Bei *L. Euler* (1707—1783) tritt der Begriff des *Ähnlichkeitszentrums* (centrum similitudinis) auf[147]). Die perspektiv ähnlichen Figuren nennt *M. Chasles homothetisch*[148]). Sätze über die ähnliche Lage von Kreisen, Kugeln usw. wurden vielfach mit deskriptiven Mitteln bewiesen[149]). Die Gesetze der *Ähnlichkeit* werden leicht aus der *Zentralprojektion paralleler Ebenen* abgeleitet und auf den *Raum* ausgedehnt. Sie charakterisieren die Verwandtschaft als *Kollineation,* bei der Punkten, Geraden und Ebenen gleichartige Elemente entsprechen, ferner entsprechende Winkel gleich, korrespondierende Längen, Flächen und Volumina aber proportional sind[150]).

139) Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822.

140) Der barycentrische Calcül, Leipzig 1827.

141) Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten, Berlin 1832; Ges. Werke, herausgeg. von *C. Weierstraß,* Berlin 1882, 1, p. 229—469 = Ostwalds Klassiker 82, 83.

142) Mém. de géométrie sur deux principes généraux, la dualité et l'homographie, Paris 1837: Traité de géométrie supérieure, Paris 1852.

143) Geometrie der Lage, Nürnberg 1847; Beiträge zur Geom. der Lage, Nürnberg 1856.

144) Elementi di geometria projettiva, Torino 1873, deutsch von *R. Trautvetter,* Stuttgart 1882.

145) Die Geometrie der Lage, Leipzig 1866—67, 3. Aufl. 1886—92, 4. Aufl. 1899—1910.

146) Euklides, Elemente, Ausgabe von *Heiberg,* Leipzig 1883—88, (6) 18, (11) 27.

147) Nov. Act. Petrop. 9 (1791), p. 154.

148) Gergonne Ann. de math. 18 (1827), p. 280.

149) *Monge,* Géom. descr. 2, p. 43—44.

Nach *M. Chasles*[151]) hat *A. C. Clairault* (1713—1765)[152]) schon vor *L. Euler* die durch Parallelprojektion vermittelte Verwandtschaft ebener Figuren untersucht; er nennt sie *courbes de même espèce.* Der Name *Affinität* rührt von *Euler* her[153]). *J. V. Poncelet*[154]) behandelt die *affinen* Gebilde als Spezialfälle seiner *figures homologiques.* Die für affine Figuren geltenden allgemeinen Gesetze ergeben sich, deskriptiv aufgefaßt, aus der *Parallelprojektion,* deren Eigenschaften man bei *J. H. Lambert*[155]) entwickelt findet, und ihrer Übertragung auf räumliche Gebilde. Diese Kollineation ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß der *Parallelismus erhalten* bleibt und folglich *parallele Strecken* ihren *Bildern proportional* sind[156]). Die *Affinität im weiteren Sinne*[157]) umfaßt die *Kongruenz, Symmetrie* und *Ähnlichkeit* als besondere Fälle. Deskriptiv wichtig ist der Satz von der Existenz *entsprechender rechter Winkel* oder *rechtwinkliger Dreikante* in affinen ebenen oder räumlichen Systemen, weil er zur Auffindung vorhandener *Symmetrien* führt.

Während bei den *affinen Transformationen* die unendlichfernen Elemente als solche erhalten bleiben, geht aus der *Zentralprojektion* bei analoger Erweiterung der Gesetze des Entsprechens eine noch allgemeinere Art der Kollineation hervor, durch welche *unendlichferne Elemente* in endliche *Fluchtelemente* oder endliche *Verschwindungselemente* in *unendlichferne* übergeführt werden.

Näheres über die hier berührten Begriffe, namentlich über die Doppelelemente bei vereinigten projektiven Grundgebilden, kollinearen ebenen oder räumlichen Systemen, über ihre perspektiven oder involutorischen Lagen findet man bei *A. Schoenflies* (III A B 5, Nr. **11** bis **13**). Für die Darstellungsprobleme ist immer die Herstellung der *perspektiven Lage* kollinearer Figuren das Wichtigste. *W. Fiedler*[158]) sagt, daß er „ausgehend von der Zentralprojektion, dann aufsteigend zur zentrischen Kollineation der Räume als der Theorie der Modellierungsmethoden und zurückgehend zu dem Spezialfall der Parallel-

---

150) Vgl. *Rohn-Papperitz,* Lehrb. d. darst. Geom 1 (1906), p. 8.

151) Aperçu hist., Ausg. v. 1875, p. 553.

152) Mém. acad. d. sc., 7, Paris (1731).

153) De similitudine et affinitate linearum curvarum, Introd. in anal. infin. (2) 18, Lausanne 1748, p. 239 ff.

154) Traité d. propr. proj., Paris 1822, p. 174 ff.

155) Von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte, Freie Perspektive 7, Zürich 1774, p. 156 ff.

156) *Rohn-Papperitz,* Lehrb. d. darst. Geom. 1906, p. 11 ff.

157) *Rohn-Papperitz,* Lehrb. d. darst. Geom. 1. Aufl. 1893, p. 18 ff.

158) Darst. Geom. 1. Aufl 1871, Vorrede p. VI; 3. Aufl. 1883, 1, p. VIII.

projektion" alle die Hilfsmittel gewinne, welche für die konstruktive Theorie der krummen Linien und Flächen nötig sind. In den *involutorischen Systemen* der Ebene und des Raumes erkennt er die Quelle aller Arten von Symmetrie.

Von mehr analytischen Gesichtspunkten ausgehend definiert *A. F. Möbius* allgemein die *Kollinearverwandtschaft*[159]); vorher behandelt er speziell die *Affinität*[160]). Er bemerkt, daß die *Projektion* einer Ebene auf eine andere zu *kollinearverwandten Figuren* führt[161]) und beweist, daß man diese auf unendlichviele Arten in *zentrale Lage* bringen kann, wenn man zwei *entsprechende Vierecke* kennt[162]). *L. J. Magnus*[163]) führte den jetzt gebräuchlichen kürzeren Namen *Kollineation* ein. *J. V. Poncelet* spricht statt ihrer von der *Homologie*[164]), und *M. Chasles*[165]) erblickt in dem *principe d'homographie* das wichtigste Mittel, um die Eigenschaften der Raumformen zu verallgemeinern.

30. Die organische Verbindung der darstellenden Geometrie mit der Geometrie der Lage. *W. Fiedler* hat grundsätzlich in seinen Schriften[166]) einen anderen Gedankengang eingeschlagen als *G. Monge* in seinen Vorträgen. Zwischen der Veröffentlichung der „Géométrie descriptive" und der ersten Auflage von *Fiedlers* Lehrbuch liegt ein Zeitraum von 76 Jahren. Schon dies erklärt die Verschiedenheit der Auffassungen. Zu *Monges* Zeiten gab es keine *Geometrie der Lage* im neueren Sinne, und die *projektive Geometrie* befand sich in den ersten Stadien ihrer Entwicklung. Die Methoden der *Zentralprojektion* waren freilich schon vorhanden und ihre Kenntnis namentlich in Frankreich verbreitet. Dennoch mußte *Monge* klar sein, daß die Perspektive für die Praxis der Architekten und Ingenieure nicht das leistete, was das *Grund- und Aufrißverfahren* zu leisten berufen war, wenn ihm eine systematische Behandlung und Weiterbildung zuteil wurde. Dieser wandte sich daher das Interesse *Monges* in erster Linie zu. Aber er beschränkte sich nicht auf die Entwicklung der

159) Barycentr. Calcül 7, p. 301.

160) 2, p. 191 ff.

161) 7, p. 321 Anm.

162) 8, p. 327.

163) Aufgaben u. Lehrsätze aus der analyt. Geom., Berlin 1833.

164) Traité d. prop. proj. 297, p. 159.

165) Aperçu hist., p. 261.

166) Die darstellende Geometrie, 1. Aufl. Leipzig 1871; 3. Aufl. in 3 Teilen: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. I. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie, 1883; II. Die darst. Geom. der krummen Linien und Flächen, 1885; III. Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage, 1888.

orthogonalen Parallelprojektion, sondern bezog mit deutlicher Absicht die Methoden der *Erzeugung krummer Flächen und Linien*, an deren Klarstellung es trotz der wertvollen Vorarbeiten des Praktikers *Frezier* noch fehlte, in seine Darstellung ein. Aus dem großzügigen Plane[167]), von dem *Monge* selbst nur den ersten Teil durchführen konnte, geht hervor, daß es *Monge* vornehmlich darauf ankam, die beschreibende Geometrie für ihre Anwendung durch die Künstler, Ingenieure und Handwerker geschickt zu machen: „pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère"[168]). Aus dieser Zweckbestimmung erklärt sich die Disposition des Werkes. Dagegen darf man nicht annehmen, daß *Monge* den von ihm eingeschlagenen Weg der weiteren Entwicklung der darstellenden Geometrie als den allein richtigen habe vorzeichnen wollen. Vom Standpunkte einer streng wissenschaftlichen Systematik aus stellt *W. Fiedler* mit Recht die *Zentralprojektion* und die *zentrische Kollineation der Räume* als allgemeinste Methoden voran, um aus ihnen die *Parallelprojektion* und die *affine Kollineation* durch Spezialisierung abzuleiten. Didaktische Rücksichten, die schon bei *Monge* von Einfluß waren, veranlassen ihn aber zu verlangen, daß der Erledigung seines auf die Bedürfnisse der modernen wissenschaftlichen Hochschulen zugeschnittenen Programmes ein Kursus vorangehe, der die Elemente des Grund- und Aufrißverfahrens lehrt[169]). Auch die von *W. Fiedler* hergestellte *organische Verbindung der deskriptiven, der reinen und analytischen Geometrie* erscheint nicht als eine in dem Wesen ihrer Prinzipien begründete Verschmelzung dieser Wissenschaften, sondern als eine aus didaktischen Gründen als zweckmäßig erkannte Anordnung und Formung des geometrischen Lehrstoffes, indem er sagt, daß die darstellende Geometrie die Aufgabe habe, sich selbst überflüssig zu machen, daß sie die natürliche Einführung in die reine Geometrie sei und ganz natürlich da in dieselbe einmünde, wo sie ihre Aufgabe beendet habe[170]). Die Schüler *Monges*, wie *J. N. P. Hachette* und *B. Brisson*, denen die Aufgabe zufiel, das Werk ihres Meisters in seinem Sinne zu vollenden, haben in der deskriptiven Behandlung der krummen Linien und Flächen das „Schema von *Monge*" beibehalten. Daß viele nachfolgende Autoren das gleiche taten, erklärt sich wohl zumeist aus dem beispiellosen Erfolge, den die „Géométrie descriptive" schon bei ihrem ersten Erscheinen gehabt hatte.

---

167) Vgl. d. „Avertissement", Géom. descr. 1798, p. IV.

168) Vgl. d. „Progamme", Géom. descr. 1798, p. 1.

169) *W. Fiedler,* Darst. Geom. 1, 3. Aufl., Vorrede p. VIII.

170) *W. Fiedler,* Darst. Geom. 2, 3. Aufl., Vorrede p. V u. VII.

31. Die orthogonale axonometrische Projektion. Je vollkommener die geometrische Darstellung eines Objektes den Gesichtseindruck wiedergibt, desto leichter ist es, das Original in der Vorstellung zu rekonstruieren. Seine wirkliche *Konstruktion* nach der *Zeichnung* aber erfordert mehr: man soll dem Risse die *wahren Abmessungen* leicht entnehmen können. Für die technische Praxis genügt es wohl, die wichtigeren Maßzahlen in die Handrisse oder Werkzeichnungen einzutragen. Dieses nützliche Verfahren hat aber mit der deskriptiven Geometrie nichts zu tun. In der *Anschaulichkeit* der Bilder übertrifft die *perspektive* Zeichnung auf *einer Tafel* jede *Parallelprojektion*, besonders das *System kombinierter Normalrisse*. In der *Maßbestimmung* aber ist es umgekehrt. Der Wunsch, die Darstellung von Körpern so zu gestalten, daß sie anschaulich wirkt und doch zugleich eine einfache Übertragung der Maße gestattet, ließ die Methode der *Axonometrie* entstehen. Ihr Prinzip ist, die Punkte einer Raumfigur zuerst auf ein *Achsensystem* zu beziehen, ihre Bilder durch die *Projektion der Koordinaten* mit Hilfe geeigneter *Maßstäbe* zu bestimmen, und daraus umgekehrt das Objekt. Da es gewöhnlich ausreicht, an realen Objekten die *Breiten*, *Höhen* und *Tiefen* zu messen, wählt man meist ein *rechtwinkliges* Koordinatensystem. Da ferner die Maßbeziehungen in der Zentralprojektion nicht einfach genug sind, rechnet man die von *G. Desargues* (Nr. **18**) und *J. H. Lambert* (Nr. **19**) entwickelte *Methode der perspektiven Maßstäbe* nicht zur eigentlichen Axonometrie, setzt vielmehr eine *Parallelprojektion* voraus[171]). Das Hauptproblem, die schiefe Projektion eines gegebenen Würfels und die Verhältnisse zwischen der Kantenlänge und ihren Bildlängen zu finden, behandelt schon *J. H. Lambert*[172]), indem er von der Zentralprojektion eines unendlichkleinen Würfels ausgeht. Allgemein wurde die Frage erst durch den Satz von *K. Pohlke*[173]) erledigt. Seither haben sich verschiedene Autoren[174]) mit diesem Satze und der Vereinfachung seines Beweises beschäftigt. Der Satz lautet in allgemeinster Fassung[175]): Die Parallelprojektion $O_s A_s B_s C_s$ eines ge-

---

171) *R. Staudigl*, Die axonom. u. schiefe Proj., Wien 1875, p. 20.

172) Freie Perspektive, Zürich 1774, p. 107 ff.

173) Wie *H. A. Schwarz* im Journ. f. Math. 63 (1864), p. 309 = Ges. Abh. 2, p. 1 mitteilt, hat *Pohlke* seinen Hauptsatz im Jahre 1853 gefunden, veröffentlichte ihn aber erst in seiner Darstellenden Geometrie, Berlin 1860, 4. Aufl. 1876, p. 109.

174) *C. Pelz*, Wien Ber. 76 (1877), p. 123; *Fr. Schur*, J. f. Math. 117 (1897), p. 24; *Fr. Schilling*, Zeitschr. Math. Phys. 48 (1902), p. 487; *Th. Schmid*, Zur Konturbestimmung der Flächen 2. Grades (*Pohlkes* Satz), Wien Ber. 113 (1904), p. 1423.

175) *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geom. 2, 3. Aufl. 1906, p. 7 ff.

gebenen Tetraeders $OABC$ kann durch passende Wahl der Projektionsrichtung und der Bildebene stets zu einem gegebenen Viereck $O_0A_0B_0C_0$ ähnlich gestaltet werden. *K. Pohlke* geht von einem rechtwinkligen Achsenkreuze aus; *G. Hauck*[176]) hat auch schiefwinklige Systeme in Betracht gezogen, was besonders für kristallographische Anwendungen unentbehrlich ist.

Die *orthogonale axonometrische Projektion* wurde zuerst in ihrer speziellsten Form als *isometrische* von dem Ingenieur *Farish*[177]) für technische Zeichnungen verwendet. Hierbei werden die Kanten eines Würfels in die Seiten und Diagonalen eines regulären Sechsecks projiziert. *H. W. Brandes*[178]) und *A. Sopwith*[179]) entwickelten dieses Verfahren, welches den Nachteil hat, daß öfters die Charaktere wichtiger Elemente aufeinanderfallen. *O. Möllinger*[180]) erweiterte es zur *zweiachsig-isometrischen* Projektion. Aber erst *J. L. Weisbach*[181]) gab der Theorie die allgemeine Grundlage, indem er auf *analytischem* Wege zeigte, daß man aus den gegebenen *Winkeln* zwischen den *Achsenbildern* die *Verkürzungsverhältnisse* und aus diesen umgekehrt jene Winkel finden könne. Er hielt es zur Vereinfachung der Messungen für zweckmäßig, die Verkürzungsverhältnisse durch *ganze Zahlen* auszudrücken. Von rein *deskriptiven* Gesichtspunkten aus behandelten die Hauptaufgaben *R. Skuhersky*[182]), *C. Pelz*[183]), *J. Tesař*[184]), *D. Tessari*[185]) und *L. Berzolari*[186]). Näheres über *kristallographische Anwendungen* in Nr. 32.

23. Die freie und axonometrische schiefe Projektion. Lange Zeit, bevor ihre Gesetze mathematisch festgelegt waren, ist die *schiefe Parallelprojektion* angewandt worden, oftmals als Surrogat der Zentral-

176) *G. Hauck,* Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darst. Perspektive, Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 81 ff.

177) Isometrical perspective, Cambridge Phil. Trans. 1820.

178) Isometrische Perspektive, *Gehlers* phys. Wörterbuch (7) 1 (1833).

179) Treatise on isometrical drawing, London 1834.

180) Isometrische Projektionslehre, Solothurn 1840.

181) Über die monodimetrische und anisometrische Projektionslehre, Polyt. Mitt. von *Volz* u. *Kramarsch* 1, Tübingen 1844, p. 125 ff.; Anleitung zum axonometr. Zeichnen, Freiberg 1857.

182) Orthographische Parallelperspektive, Prag 1858.

183) Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie, Wien Ber. 81 (1880), p. 300; 83 (1881), p. 375; 90 (1884), p. 1060; Prag Ber. 1885, p. 648.

184) Über den orthogonal-axonometrischen Verkürzungskreis, Wien Ber. 81 (1880), p. 453.

185) Projezioni assonometriche ortogonali ed oblique, Torino 1882.

186) Sull' assonometria ortogonale considerata come metodo di rappresentazione, Pavia 1893.

perspektive, deren Regeln dem Zeichner entweder unbekannt oder unbequem waren. *J. H. Lambert* scheint der erste Schriftsteller zu sein, der sie nach mathematischen Prinzipien behandelt. Aber erst in neuerer Zeit ist sie als selbständige exakte Darstellungsmethode wissenschaftlich entwickelt worden. Sie bedient sich wie die Perspektive und die axonometrische Projektion nur *einer Tafel* und bedarf daher der Angabe gewisser Bestimmungsstücke, die eine zweite koordinierte Projektion ersetzen.

J. Schlesinger[187]) verbindet mit der einfachen schiefen Projektion gewisse Bestimmungsweisen der Perspektive. Außerhalb der Bildebene nimmt er einen Punkt O als *Hilfsauge* an, fixiert es durch seine Orthogonalprojektion, den *Hauptpunkt*, und den *Distanzkreis*, die Richtung der projizierenden Strahlen aber durch seine schiefe Projektion, den *Nebenpunkt* O_s. *Gerade* und *Ebenen* bestimmt er durch ihre *Spur-* und *Fluchtelemente*, letztere für zentrale Projektion aus dem Hilfsauge verstanden. Sind z. B. G und G_∞ Spur- und Fluchtpunkt einer Geraden g, so ist ihr Bild die Parallele zu $O_s G_\infty$ durch G, usw. Ein *Punkt* erfordert außer seiner schiefen Projektion die Angabe einer ihn enthaltenden Geraden oder eines gleichwertigen Bestimmungsstückes. Für die Abbildung der *Strecken* wird der Begriff des *Moduls der schiefen Projektion einer Geraden* eingeführt, d. i. das für Parallelen konstante Verhältnis zwischen Bild und Original. Dasselbe Verhältnis, für *Tafelnormalen* gebildet, heißt schlechthin *Modul der schiefen Projektion.* Original und Bild werden bei Figuren, deren Ebene zur Tafel parallel oder bezüglich einer Normalebene zur Projektionsrichtung symmetrisch liegt, kongruent. Solche Ebenen befinden sich in *Kongruenzstellung* und bestimmen in einer beliebigen Ebene die *Kongruenzrichtungen* ihrer Geraden. Auf die analogen Verhältnisse, die bei den *Halbierungsebenen* der Winkel zwischen Grund- und Aufrißtafel auftreten, hat *W. Fiedler*[188]) aufmerksam gemacht. *J. Schlesinger* benutzt die Kongruenzlagen in Verbindung mit den *Affinitätsgesetzen* bei den *Umlegungen* ebener Figuren. Bei *Schlesinger* erscheint die schiefe Projektion noch nicht als selbständige Darstellungsmethode. Als solche tritt sie bei *G. A. v. Peschka* auf.

G. A. v. Peschka[189]) führt anstatt der *unendlichfernen Ebene* eine zur *Tafel* parallele *Distanzebene* ein. Die *Projektionsrichtung* und die *Distanz* werden durch ein rechtwinkliges Dreieck charakterisiert,

---

187) Die darst. Geom. im Sinne der neueren Geom., Wien 1870, p. 223 ff.

188) Vgl. Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 14, 1905, p. 493.

189) Freie schiefe Projektion, Wien Ber. 75 (1877), p. 917; Darstellende u. projektive Geometrie 1, Wien 1883, p. 212 ff.

dessen Katheten die an irgendeiner Stelle konstruierte Distanz und ihre schiefe Projektion bilden, und welches in die Tafel umgelegt ein *Projektionsdreieck* heißt. *Gerade* und *Ebenen* werden durch ihre *Spur-* und *Distanzelemente* bestimmbar; die Bilder der letzteren werden (wie in der Perspektive) als *Fluchtelemente* bezeichnet. In der Lösung der Grundprobleme unterscheidet sich die Methode grundsätzlich nicht von der der *freien Perspektive*[190]).

Die *axonometrische schiefe Projektion* wird durch die *Stellung der Bildebene zum Koordinatensystem* und durch die *Projektionsrichtung* bestimmt. Bei der Wahl zwischen verschiedenen Annahmen läßt man sich durch praktische Rücksichten leiten; man vermeidet besonders, daß sich die wichtigen Kanten und Flächen eines Objektes nur als Punkte oder Linien projizieren. *Zwei Annahmen* kommen vorzugsweise zur Anwendung: bei der ersten fallen Bild- und Aufrißebene zusammen, bei der anderen geht die Bildebene durch die (vertikale) z-Achse, ist aber gegen die x- und y-Achse beliebig geneigt. Die erste Methode deckt sich dem Wesen nach mit einem älteren Verfahren, das in der Fortifikationslehre für Pläne benutzt wird und unter dem Namen *Kavalierperspektive* (auch Militär- oder Vogelperspektive) bekannt ist. Bei diesem wird ein Grundriß durch eine graphische Angabe der Höhen der Objektpunkte darüber ergänzt. Die Höhen erscheinen alle in gleicher Richtung umgelegt (oder schief unter dem Winkel 45° projiziert). Die *erste Hauptart* der schiefen Projektion hat *L. Burmester*[191]) übersichtlich dargelegt. Die *zweite Hauptart* wurde von *C. F. Naumann*[192]) und *H. Kopp*[193]) für kristallographische Darstellungen entwickelt und benutzt. Die *Kristallographie* bildet eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der *Axonometrie*, da sich die Kristallformen aller Systeme leicht auf geeignete Achsenkreuze beziehen lassen. Allerdings darf man sich hierbei nicht auf ein dreiachsig-rechtwinkliges Achsensystem beschränken. Axonometrische Zeichnungen finden sich schon bei *E. Mohs*[194]) und *A. Breit-*

190) *R. Staudigl*, Über die Identität von Konstruktionen in perspektivischer, schiefer u. orthogon. Projektion, Wien Ber. 64 (1871), p. 490.

191) Grundzüge der schiefen Parallelperspektive, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 449 ff.. Für den Unterricht empfiehlt er, bei den grundlegenden Aufgaben die Methoden der orthogonalen und schiefen Projektion nebeneinander anzuwenden, um durch ihren Vergleich der geometrischen Auffassung eine größere Geschmeidigkeit zu verleihen.

192) Lehrb. d. reinen u. angew. Kristallographie, Leipzig 1830; Anfangsgründe d. Kristallographie, Dresden u. Leipzig 1841.

193) Einleitung in d. Kristallographie, Braunschweig 1849.

194) Grundriß d. Mineralogie, Dresden 1822, 1824.

haupt[195]). Man vergleiche den Artikel: *Kristallographie* (V, 7, *Liebisch, Schoenflies, Mügge*).

Vergleicht man die beiden Hauptarten der schiefen Projektion hinsichtlich ihrer *Bildwirkung*, so ist der zweiten der Vorzug zu geben, weil bei ihr das Bild mit dem mittleren Teile der Perspektive (aus großer Distanz) annähernd übereinstimmt, während bei der ersteren die *Verzerrungen* auftreten, die sich in den vom Hauptpunkt entfernteren Teilen einer perspektivischen Zeichnung um so bemerklicher machen, je kleiner die Distanz des Zentrums ist. Die Wahl des Gesichtspunktes gegenüber dem Gegenstande ist also für die Bildwirkung wichtiger als die der Stellung der Bildfläche zu den Sehstrahlen. Die axonometrischen Entwürfe eignen sich besonders zum *Skizzieren*.

33. Die freie und angewandte Perspektive. Unter den neueren Autoren hat zuerst *B. E. Cousinery*[196]) die *Zentralprojektion* als ein selbständiges geometrisches Darstellungsverfahren aufgefaßt. Er bedient sich nur *einer Zeichentafel* und bestimmt das *Zentrum* in ihr durch seine Orthogonalprojektion, den *Hauptpunkt*, und den darum beschriebenen *Distanzkreis*. Diese Bestimmungsweise hat in der Folge an Bedeutung gewonnen: einerseits durch die Einführung der *Richtkegel* für Strahlen, die gleiche Winkel mit der Tafel bilden und deren Spurkreise man *Neigungskreise* genannt hat[197]), andererseits in der *Cyklographie* (Nr. **45**). *B. E. Cousinery* bestimmt, wie schon *Br. Taylor* (Nr. **19**), *Gerade* und *Ebenen* durch ihre *Spuren* (traces) und *Fluchtelemente* (limites), einen *Punkt* aber durch *zwei Gerade*, von denen eine der das *Punktbild* liefernde *Sehstrahl* sein kann. Wie er an vielerlei Beispielen zeigt, reichen diese Mittel aus, um die typischen Aufgaben der Planimetrie und Stereometrie in einer Weise zu lösen, die theoretisch der Methode *Monge*s nicht nachsteht[198]).

Diese Methode, die man heute nach dem Vorgange von *G. A. v. Peschka* und *E. Koutny*[199]) *freie Perspektive* nennt, ist seither in den meisten umfassenderen Lehrbüchern behandelt worden. *W. Fiedler*[200]) hat sie als die Quelle der Methoden hingestellt und insbesondere

---

195) Vollständ. Handbuch d. Mineralogie, Dresden u. Leipzig 1836—48.

196) Géométrie perspective ou principes de projection polaire appliquée à la description des corps, Paris 1828.

197) Vgl. *W. Fiedler*, Die darstell. Geometrie, 1. Aufl. 1871, p. 5 ff.; 3. Aufl. 1883, p. 8 ff.

198) Vgl. *M. Chasles*, Ap. hist. (5) 9.

199) *G. A. v. Peschka* und *E. Koutny*, Freie Perspektive, Hannover 1868.

200) Die Zentralprojektion als geometrische Wissenschaft, Progr. Chemnitz

den Einfluß der Transformationen (Nr. **13**) auf die Darstellung untersucht; letzteres fast gleichzeitig mit *Fr. Tilšer*[201]). *W. Fiedler* bewies ferner[202]), daß die unendlichferne Ebene durch jede andere das Projektionszentrum nicht enthaltende Ebene derart vertreten werden kann, daß die Bilder ihrer Punkte und Geraden die Fluchtelemente ersetzen. Hierdurch wird es möglich, die Prinzipien der freien schiefen Projektion, wie sie bei *J. Schlesinger* und *G. A. v. Peschka* auftreten (Nr. **32**), direkt aus denen der Zentralprojektion abzuleiten. Für einige elementare Aufgaben, die die rechtwinklige Stellung von Geraden und Ebenen oder allgemeinere Winkelrelationen betreffen, gewährt die Anwendung des *Hauptpunktes* und der *Neigungskreise* in Verbindung mit dem *Umlegungsverfahren* sogar einfachere Lösungen, als es die Methode der kombinierten Normalrisse vermag.

Die Aufgabe der *angewandten Perspektive* ist eine doppelte. Es soll erstens (und das ist namentlich für Architekten bei ihren Entwürfen wichtig) aus vorhandenem *Grund-* und *Aufriß* das *perspektive Bild* des Gegenstandes *abgeleitet* werden, z. B. um die plastische Gesamtwirkung eines geplanten Bauwerkes zur Anschauung zu bringen. Zweitens sollen aus vorliegenden genauen *perspektivischen Aufnahmen* eines wirklichen Objektes seine *Abmessungen* und die *Lagebeziehungen* seiner Teile *rekonstruiert* werden. Letzteres ist speziell die Aufgabe der *Photogrammetrie* (Nr. **44**).

Es lag in dem von *Monge* aufgestellten Programm, daß bei seinen Schülern und Nachfolgern die *angewandte Perspektive* alsbald Gegenstand erneuter Untersuchung wurde. So bei *J. N. P. Hachette* und *B. Brisson*. Von deutschen Autoren wandten sich *Fr. Weinbrenner*[203]) und *G. Schreiber*[204]) diesem Thema zu. *J. Adhémar*[205]) neigt mehr zu der seit *G. Desargues* in Frankreich eingebürgerten axonometrischen Behandlungsweise. *J. de la Gournerie*[206]) behandelt

1860. Über die Transformationen in d. darstell. Geometrie, Zeitschr. Math. Phys 9 (1864), p. 331. Die Methodik d. darstell. Geometrie zugleich als Einleitg. i. d. Geom. d. Lage, Wien Ber. 55 (1867), p. 659.

201) System der Perspektive, Prag 1867.

202) Geometr. Mitt. 4, Vierteljahrsschr. d. Züricher Naturf.-Ges. 24 (1879), p. 205 ff.

203) Architektonisches Lehrbuch 2, Tübingen 1819.

204) Kursus d. darstell. Geom., nebst ihren Anwendungen auf d. Lehre der Schatten u. d. Perspektive, die Konstruktionen in Holz u. Stein., d. Defilement u. d. topogr. Zeichnung, Karlsruhe u. Freiburg 1828—1833; Malerische Perspektive, Karlsruhe 1854.

205) Traité de perspective linéaire, Paris 1838.

206) Traité de perspective linéaire, Paris 1859; Traité de géom. descr., Paris 1860.

fast alle wichtigen Fragen der darstellenden Geometrie, darunter besonders ihre Anwendung auf die *Theaterperspektive.* Sein Urteil über die *künstlerischen Freiheiten* begründet er durch eingehende Untersuchungen über die *Rekonstruktion* (restitution) des Originals aus dem Bilde, über die Aufsuchung des richtigen Gesichtspunktes und den Einfluß der verstandesgemäßen Interpretation optischer Eindrücke[207]). Von künstlerischen Auffassungen geht auch *Fr. Bossuet*[208]) aus. *G. Hauck*[209]) sucht zwischen der Perspektive auf ebener Tafel und der zentralen Kugelprojektion, bei der die scheinbaren Größen erhalten bleiben, also zwischen *Kollinearität* und *Konformität* zu vermitteln durch seine *subjektive Perspektive.* Interessant sind die von *L. Burmester*[210]), *Fr. Schilling*[211]), *K. Doehlemann*[212]) u. a. angestellten Untersuchungen über die Perspektive in den Gemälden berühmter älterer Meister.

Der Erfolg einer vielseitigen Durchforschung der seit *Guido Ubaldo*[42]) in der praktischen Perspektive aufgetretenen Konstruktionsarten war die Vollkommenheit, Einfachheit und Allgemeinheit der Methoden, die schließlich zur Erfindung exakter Apparate zur mechanischen Herstellung des perspektiven Bildes aus gegebenen Rissen führte[213]) (III AB 6, Anhang, *Papperitz*).

34. Die plastische Perspektive, oder wie man sie in mißbräuchlicher Anwendung eines Wortes von heterogener Bedeutung genannt hat, die *Reliefperspektive,* ist geometrisch aufgefaßt eine *Zentralkollineation räumlicher Figuren*[214]). Sie wird bestimmt durch das *Zen-*

---

207) Über diese Fragen vgl. *R. Schüßler,* Die richtige Deutung perspektivischer Bilder, Graz 1904; *L. Burmester,* Theorie d. geometrisch-optischen Gestalttäuschungen, Zeitschr. f. Psychologie 41, Leipzig 1906.

208) Traité de perspective linéaire, Brüssel 1871.

209) Die subjektive Perspektive und die horizontalen Kurvaturen des dorischen Styls, Stuttgart 1879.

210) *W. Dyck*, Katalog mathematischer Modelle usw., Nachtrag, München 1893, p. 51.

211) Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie usw., Vorträge, Leipzig 1904.

212) Die Verwertung der Linearperspektive zur Datierung von Bildern, München 1905; Die Perspektive der Brüder van Eyck, Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 419.

213) *G. Hauck,* Mein perspektivischer Apparat, Berlin 1884. Vgl. *W. Dyck,* Katalog math. Mod., München 1893. Nr. 112; *Hauck-Brauers* perspekt. Apparat, p. 234 ff.

214) *Rohn-Papperitz,* Lehrb. d. darst. Geom. 2, 3. Aufl. 1906, p. 136 ff. In der Kunst bedeutet *Relief* eine durch Erhabenheiten des Bildstoffes hervorgebrachte Zeichnung von Figuren auf einer Fläche. Die ursprüngliche Form

trum O, die *Kollineationsebene* Π, in der die den kollinearen Räumen *entsprechend gemeinsamen* Punkte und Linien liegen, und ein *Paar entsprechender Punkte,* die auf einem Strahl durch O liegen. Sie benutzt die Begriffe der *Gegenebenen,* die als *Verschwindungsebene* Π_0 oder *Fluchtebene* Π_∞, der *unendlichfernen Ebene* des *Bild-* oder *Originalraumes* jedesmal im anderen korrespondieren und zu Π parallel sind. Sie entsprechen den *Gegenpunkten einer Geraden,* bzw. den *Gegenachsen einer Ebene* in der *Zentralkollineation der ebenen Figuren.*

Die von *G. Desargues* inspirierte Schrift von *A. Bosse*[215]) lehrt die Tiefe des Basreliefs nach perspektivem Maßstabe behandeln. *J. B. Breysig*[216]), der die Elemente der Theorie für Künstler auseinandersetzte, ist wahrscheinlich der Urheber des Namens „Reliefperspektive". Auf mehr theoretischem Standpunkte steht *C. T. Anger*[217]). *G. Schreiber*[218]) gibt ein Beispiel für die Reliefperspektive eines Gebäudes. Auch *M. Poudra*[219]) stellt seine Untersuchungen in den Dienst der Technik. *J. Morstadt*[220]) sprach den Satz aus, daß die Orthogonalprojektion der Reliefperspektive auf die Bildfläche mit der Perspektive des Objektes aus einem verschobenen Auge identisch ist; er behandelte die Kollinearverwandtschaft einer Fläche 2. Ordnung mit der Kugel. *R. Staudigl*[221]) zeigte, daß der Grundriß des Reliefbildes als Perspektive des Grundrisses vom Objekte konstruiert werden kann. Ferner ist *H. Hertzer*[222]) und *L. Burmester*[223]) zu erwähnen.

---

der Darstellung ist das *Flachrelief* (Basrelief), die spätere das *Hochrelief* (Hautrelief). Die Figuren hängen mit dem Hintergrund zusammen; lösen sich einzelne von ihnen vom Hintergrunde los, so werden sie „rund", d. h. in ihrer wahren Gestalt, gebildet. Die Vermittlung der Übergänge bleibt dem künstlerischen Ermessen überlassen. Jedenfalls aber müssen die *Zwischenräume* der nach dem Hintergrunde (der Fluchtebene) zu sich mehr und mehr verflachenden Figuren aus praktischen und ästhetischen Gründen *wegfallen,* so daß von einer zentrisch-kollinearen Abbildung gar nicht die Rede sein kann (Nr. **16**).

215) Traité des pratiques géométrales et perspectives, Paris 1665.

216) Versuch einer Erläuterung der Reliefperspektive, Magdeburg 1798.

217) Analyt. Darstellung der Basreliefperspektive, Danzig 1834; Beiträge zur Basreliefperspektive, Danzig 1836; Über die Transform. der Figuren in andere derselben Gattung, Archiv Math. Phys. 4 (1844), p. 207. *Anger* behandelt die Aufgabe, eine Kugel zu finden, die einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung entspricht.

218) Malerische Perspektive, Karlsruhe 1854.

219) Traité de perspective-relief, Paris 1862. Schon 1853 berichtete *M. Chasles* über seine Arbeiten, Paris C. R. 37, p. 880.

220) Über räuml. Projektion (Reliefprojektion), insbes. d. d. Kugel, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 326.

221) Grundzüge der Reliefperspektive, Wien 1868.

222) Über die Zentral-Raumprojektion, Zeitschr. d. Ver. deutscher Zeichenlehrer, Berlin 1 (1874), p. 4, 21, 40; 2 (1875), p. 5, 21, 56, 70, 113. Die Grund-

In rein geometrischer Auffassung wurde die Theorie der *kollinearen Verwandtschaft räumlicher Systeme* von *J. V. Poncelet*[224]) in seiner *theorie des figures homologiques, ou perspective-relief*, von *K. G. Chr. v. Staudt*[225]), *Th. Reye*[226]), *W. Fiedler*[227]) und *J. Schlesinger*[228]) behandelt.

35. Die Schatten- und Beleuchtungstheorie. Die Aufgaben, für einen durch krumme Flächen begrenzten Körper bei irgendeiner *Projektionsart* die *wahre* und *scheinbare Umrißlinie* oder bei *Zentral-* oder *Parallelbeleuchtung* die *Lichtgrenze*, d. h. die Grenzlinie zwischen dem beleuchteten und unbeleuchteten Teile seiner Oberfläche, dem *Eigenschatten*, und die Begrenzung seines *Schlagschattens* auf einer Ebene zu finden, sind *identisch*. Das Problem, den Schlagschatten zu bestimmen, den ein Körper auf die Oberfläche eines anderen wirft, deckt sich mit dem der *Durchdringung zweier Flächen*. Die in beiden Fällen angewandten Methoden haben daher eine gemeinsame Grundlage. So stimmt z. B. das Prinzip, den Schlagschatten eines Körpers auf einen zweiten dadurch zu bestimmen, daß man von beiden den Schlagschatten auf eine Hilfsebene sucht und aus den *Überkreuzungspunkten der Grenzlinien* die *Lichtstahlen rückwärts* bis zu den *Erzeugenden* der schattenempfangenden Fläche verfolgt, mit dem Verfahren überein, welches die *Durchdringung* eines *Kegels* mit einer anderen *Fläche* liefert. Die Aufsuchung der *Glanzpunkte* einer spiegelnden Fläche und der *Lichtgrenze* auf matter Fläche sind die Aufgaben über die *Berührung* von *Ebenen* oder *Kegeln*. Setzt man an Stelle einer *punktförmigen Lichtquelle* einen *leuchtenden Körper* voraus, so muß, um die *Grenzlinien* des *Voll-* und *Halbschattens* zu finden, die den Oberflächen des leuchtenden und beleuchteten Körpers *gemeinsam umschriebene abwickelbare Fläche* betrachtet werden, deren *beide Schalen* durch ihre *Berührungskurven* die Grenzlinien liefern. Die Bestimmung der *Linien gleicher Lichtstufe* (*Isophoten*, *Lichtgleichen*) oder *gleicher scheinbarer Helligkeit* (*Isophengen*, *Hellegleichen*) auf krummen Flächen beruht auf denselben Konstruktionsmitteln, hängt aber überdies von

prinzipien der Zentral-Raumprojektion (Relief-Projektion) Berlin 1875. Man vergleiche auch *L. Klug*, Konstruktion des Reliefs einer Fläche zweiter Ordnung, Wien Ber. 114 (1905), p. 65.

223) Grundzüge der Reliefperspektive nebst Anwendung zur Herstellung reliefprojektivischer Modelle, Leipzig 1883.

224) Traité de propriétés projectives des figures, Paris 1822.

225) Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1860, 3. Heft.

226) Geometrie der Lage, Hannover 1866.

227) Darstellende Geometrie, Leipzig 1871.

228) Darstellende Geometrie, Wien 1870.

gewissen *physikalischen Hypothesen* ab, die nur *experimentell* begründet werden können und zur *Photometrie* gehören.

Nachdem in der Perspektive die *Schattenkonstruktion* seit *A. Dürer* (Nr. **17**) für *Polyeder* schon mehrfach behandelt worden war, wurde sie von *G. Monge* (Nr. **23**) allgemein auf krumme Flächen und auf die *Voll-* und *Halbschatten* ausgedehnt. Letzteres erforderte die *abwickelbare Fläche*, die von allen *gemeinsamen Tangentialebenen zweier krummer Flächen* umhüllt wird[229]). *F. P. Ch. Dupin* (1784—1873)[230]) fand, daß der *Lichtstrahl* und die *Lichtgrenztangente* in einem Flächenpunkte *konjugierte Durchmesser* der *Indikatrix* sind (Nr. **26**), und *J. N. P. Hachette*[231]) bestimmte aus den die *Lichtgrenze berührenden Lichtstrahlen* die *Spitzen* der *Schlagschattengrenze*, denen die Punkte entsprechen, in denen sich die Grenze des Eigenschattens in die des *Schlagschattens der Fläche auf sich selbst* tangential fortsetzt. Solche Punkte treten nur bei Flächen negativer Krümmung auf. Über mehrere *Spezialverfahren* findet man Angaben in Nr. **39** und **40**.

Als Begründer der *geometrischen Beleuchtungstheorie* darf man *J. H. Lambert*[232]) ansehen. Nach der physikalischen Seite hatte schon vorher *P. Bouguer* (1698—1758)[233]) wertvolle Beiträge geliefert. Für die Bestimmung der Lichtstufen auf krummen Flächen erlangten in der Folge wesentlich nur die beiden Grundanschauungen praktische Geltung, die zur Konstruktion der *Isophoten* und der *Isophengen* führen. Bezeichnen ε und α die Winkel des einfallenden Lichtstrahles und des Sehstrahles gegen die Flächennormale, so wird nach der ersten Hypothese die *wahre Beleuchtungsintensität* des Flächenelementes zu $\cos\varepsilon$, nach der zweiten die *scheinbare Intensität* zu $\cos\varepsilon \cdot \cos\alpha$ proportional gesetzt. Man findet eine eingehende Darstellung bei *Chr. Wiener*[234]), der auch umfassende Versuche angestellt hat. In der gleichen Richtung kommen die photometrischen Untersuchungen von *Bordoni*[235]), *Cohen Stuart*[236]) und *J. K. Fr. Zöllner*[237]) in Betracht. Die

---

229) *Monge*, Mém. sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et pénombres (1775), Mém. prés. p. div. Sav. Paris 9 (1780), p. 382 ff.

230) Développements de géométrie, Paris 1813.

231) Traité de géométrie descriptive, Paris 1822.

232) Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae, Augsburg 1760.

233) Essai optique sur la gradation de la lumière, Paris 1729; ausführlicher herausgegeben von *De la Caille* 1760.

234) Lehrb. d. darst. Geom. 1 (1884); 7, p. 390 ff.

235) Sopra le linee uniformemente illuminate, Giornale di fisica, Pavia 1823.

absolute Lichtstärke ist natürlich von der *Entfernung* r zwischem dem Auge und dem Flächenelement abhängig; sie ist proportional $\frac{1}{r^2}$. Die *relative Intensität* dagegen erscheint von r fast unabhängig, weil sich die scheinbare Größe des Flächenelementes mit wachsendem r nach demselben Gesetze verkleinert. *L. Cohen Stuart* geht vielleicht in dem Streben nach Genauigkeit zu weit, wenn er die Kurven einer Fläche konstruiert, für welche $\frac{\cos \varepsilon}{r^2}$ einen konstanten Wert behält. Die experimentellen Feststellungen scheinen zugunsten der von *Lambert, Bouguer* und *Chr. Wiener* vertretenen Hypothese, nach welcher die *Isophoten* gesucht werden müssen, zu entscheiden; weniger im Sinne der *Isophengentheorie*, die von einigen Schülern *Monges*[238]) vertreten und neuerdings von *L. Burmester*[239]) neben der *Isophotentheorie* ausführlich entwickelt wurde.

Deskriptiv wurde die *Beleuchtungstheorie* von *B. F. A. Leroy*[240]), *J. Egle*[241]), *Fr. Kammerer*[242]), *Fr. Tilser*[243]), *E. Koutny*[244]), *R. Niemtschik*[245]), *D. Tessari*[246]) und vielen neueren Autoren ausgebildet.

V. Besondere deskriptive Aufgaben und Methoden.

36. Polyeder. Die deskriptive Theorie der *Vielflache* oder *Polyeder* geht von den dualen Begriffen des *n-Ecks* oder *n-Seits* in der *Ebene* und des *n-Flachs* oder *n-Kants* im *Strahlbündel* aus, um aus diesen zuerst *Pyramiden* und *Prismen*, dann *reguläre* und *irreguläre Polyeder* allgemeiner Art abzuleiten. Grundlegend ist die Lösung der Aufgaben über das *Dreikant*[124]). Die Relation zwischen den *Anzahlen* der *Ecken, Flächen* und *Kanten* ($e + f = k + 2$) wurde von

236) Solution d'un problème de photométrie, Journ. de Math. 13 (1848), p. 257.

237) *J. K. Fr. Zöllner* (1834—1882), Photometrische Untersuchungen, Leipzig 1865.

238) *B. Brisson* in der 5. Aufl. von *Monges* Géom. descr. Paris 1827. *Dupuis*, Mém. sur la détermination des teintes dans les dessins, J. éc. polyt. 1 (1797).

239) Theorie u. Darstellung d. Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, Leipzig 1871.

240) Traité de stéréométrie, Paris 1844.

241) Über das Schattieren der Oberflächen regelmäßiger Körper, Festschrift, Stuttgart 1855.

242) Wien Ber. 46 (1862), p. 405.

243) Die Lehre der geometr. Beleuchtungskonstruktionen, Wien 1862.

244) Theorie der Beleuchtung krummer Flächen vom zweiten Grade bei parallelen Lichtstrahlen, Brünn 1867.

245) Direkte Beleuchtungskonstruktionen für Flächen usw. Wien Ber. 57 (1868), p. 678.

246) La teoria delle ombre e del chiaro-scuro, Turin 1878—1880.

L. Euler[247]) für *einfach zusammenhängende Polyeder* gegeben und später auf *mehrfach zusammenhängende* ausgedehnt. Hierzu tritt der Satz über die *Konstantenzahl eines Vielflachs*, welche der *Kantenzahl* gleich ist. Näheres findet man bei *L. Poinsot*[248]), der die Polyeder zweiter Art eingehend untersuchte, bei *Chr. Wiener*[249]) und bei *V. Eberhard*[250]). Von den vier *regelmäßigen Sternpolyedern*, welche den *Platonischen Körpern* ergänzend zur Seite treten, finden sich zwei schon bei *J. Kepler* (1571—1630)[251]), die beiden fehlenden fügte *L. Poinsot* hinzu. Eine bedeutsame Erweiterung erfuhr die *Polyedertheorie* durch *M. Brückner*[252]). An die Darstellung der Vielflache schloß sich die früheste Entwicklung der Methoden zur Konstruktion der *Schatten* und *Durchdringungsfiguren* an.

37. Kurven und Flächen 2. Ordnung. Durchdringungen. Im allgemeinen ist auf die Artikel über *Kegelschnitte* (III C 1, *Dingeldey*) und *Flächen 2. Ordnung* (III C 4, *Staude*), sowie auf *E. Kötter*[260]) zu verweisen. Seit *J. Steiner*[253]) wird ein *Kegelschnitt* als *Erzeugnis projektiver Strahlbüschel* oder *Punktreihen* konstruiert. Der Satz von *Bl. Pascal*[254]) über das *hexagamma mysticum* und der duale Satz von *Chr. J. Brianchon*[255]) können in Verbindung mit der von *J. D. Gergonne*[256]) und *J. F. Servois*[257]) entwickelten *Polarentheorie* als Grundlage für eine *vollständige Theorie der Kegelschnitte* dienen und ermöglichen deren Konstruktion auf Grund von fünf gegebenen Bedingungen. Von älteren Autoren sind in diesem Zusammenhange noch *G. Desargues*[258])

---

247) Nov. Comm. Petrop. 4 (1752), p. 109 u. 156.

248) Mém. sur les polygones et les polyèdres, J. éc. polyt. 10 (1810), p. 16.

249) Bemerkungen über die regelmäßigen Sternvielflache, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 174.

250) Zur Morphologie der Polyeder, Leipzig 1891.

251) Harmonices mundi libri V, Lincii 1619.

252) Über die gleicheckig-gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder, mit 29 Tafeln, Abh. d. Leop.-Carol. Akad. 86[1], Halle 1906.

253) Systemat. Entwicklung d. Abh. geom. Gestalten voneinander, Berlin 1832, § 37 ff. = Werke 1, p. 329 ff. = Ostwalds Klassiker 83, p. 8 ff. Man vgl. *M. Chasles*, Traité de géom. sup. 1852, p. 396, 400 ff. und *K. G. Chr. v. Staudt*, Über die Kurven zweiter Ordnung, Progr. Gymn. Nürnberg 1831, Geom. d. Lage 1847; *J. Steiner*, Vorl. ü. synthet. Geom., 2. T., bearb. v. *H. Schröter* 1867, § 20—26.

254) Essai pour les coniques, Paris 1640, Oeuvres p. *Bossut*, Paris 1779, 2. Aufl. 1819 oder Oeuvres compl. p. *Ch. Lahure* 2, Paris 1858, p. 354 ff.

255) J. éc. polyt. 13 (1806), p. 301.

256) Ann. de math. 3 (1813), p. 297.

257) Ann. de math. 1 (1811), p. 337.

258) Brouillon project d'une atteinte aux évènemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639, Oeuvres p. *M. Poudra* 1, Paris 1864.

und *Ph. de la Hire*[259]) zu nennen. Viele Konstruktionsarten der Kegelschnitte beruhen auf der *Zentralprojektion des Kreises*, andere auf den *Brennpunktseigenschaften*. Über die *mechanische Beschreibung* der Kegelschnitte (*Fadenkonstruktionen*, *Kegelschnittzirkel* usw.) findet man Näheres in dem Artikel über *graphische Darstellungen und Modelle* (III AB 6, Anhang, *Papperitz*), wegen der allgemeinen Theorie bei *E. Kötter*[260]). Die *Fokaleigenschaften* waren bereits *Apollonius von Pergae* (ca. 220 v. Chr.)[261]) bekannt, der die ursprünglich als *Schnitte* eines *geraden Kreiskegels* definierten Kurven auch an einem *schiefen Kreiskegel* konstruierte. Die *konfokalen Systeme* scheint zuerst *C. Maclaurin* (1698—1746)[262]) untersucht zu haben. Die Fragen nach den *Schnittpunkten* und *gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte* wurden von *C. G. J. Jacobi*[263]), *J. Plücker*[264]) analytisch, von *M. Chasles*[265]), *J. Steiner*[266]), *Chr. v. Staudt*[267]) synthetisch beantwortet. *Büschel* und *Scharen* von Kegelschnitten führte *J. Steiner*[268]) ein und gab ihnen auch den Namen. Über ihre Verzeichnung mittels Liniennetzen spricht *Chr. Wiener*[269]) ausführlich.

Die *Flächen 2. Ordnung* wurden zuerst *analytisch* untersucht und eingeteilt von *L. Euler*[270]) sowie von *G. Monge* und *J. N. P. Hachette*[271]). Ihrer *synthetischen Behandlung* legt man ihr *Verhalten gegenüber schneidenden Geraden und Ebenen* und ihre *projektive Erzeugung* nach *J. Steiner*[272]) und *Chr. v. Staudt*[273]) zugrunde. Als *Einteilungsgrund* kommt nach *J. V. Poncelet*[274]) und *J. Plücker*[275]) das

---

259) Sectiones conicae, Paris 1685.

260) Die Entwicklung d. synthet. Geom., Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 1899—1901, p. 45—52, 83—88.

261) Conicorum l. 1 und 3.

262) A treatise of fluxions 2, London 1742, 2. Aufl. 1801, p. 127.

263) J. f. Math. 14 (1835), p. 281 = Werke 3, p. 292 ff.

264) Analyt.-geometr. Entwicklungen 2, Essen 1828—1831, p. 167 ff.

265) Sections coniques, Paris 1865, p. 231 ff.

266) Vorl üb. synthet. Geom. 2 (1867), bearb. v. *Schröter*, Leipzig, p. 54.

267) Geom. d. Lage 1847, p. 171 ff.

268) J. f. Math. 47 (1854), p. 7—105 = Werke 2, p. 501—594, s. bes. p. 550, 552; Vorl. 2 (1867), p. 279.

269) Lehrb. d. darst. Geom. 1 (1884), p. 325 ff.

270) Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748, 2. Appendix de superficiebus.

271) Application d'algèbre à la géométrie, J. éc. polyt. 11 (1802).

272) System. Entw. 1832, p. 186 ff. = Werke 1, p. 370 ff. = Ostwalds Klassiker 83, p. 52 ff.

273) Geom. d. Lage 1847, p. 197.

274) Propr. proj. 1822, p. 373.

275) System d. analyt. Geom. d. Raumes 1846.

Verhalten der Flächen gegen die unendlichferne Ebene in Betracht. Die beiden Scharen von *Kreisschnitten* auf den Flächen 2. Ordnung (das hyperbolische Paraboloid ausgenommen), die einen besonderen Fall der Scharen *perspektiv ähnlicher Parallelschnitte* bilden und zu den *Kreispunkten* führen, wurden von *Monge* und *Hachette* bestimmt. Diese Kreisschnittsysteme vermitteln eine *affine Transformation* der *Rotationsflächen* 2. Ordnung in die *allgemeinen Formen*, die von *A. Brill*[276]) und *H. Wiener*[277]) zur Konstruktion beweglicher Flächenmodelle benutzt wurden. (Näheres III AB 6, Anhang, *Papperitz.*) Die von *J. Steiner*[278]) und *M. Chasles*[279]) gegebenen Lösungen des Problems, die *Fläche 2. Ordnung durch neun gegebene Punkte* zu konstruieren, waren noch ziemlich verwickelt. *K. Rohn*[280]) gab eine einfache und übersichtliche Lösung, indem er die neun Punkte zu dreien in die Seiten eines Trieders verteilte und die Beziehungen der Kegelschnittsysteme untersuchte, die diese Punkttripel enthalten und sich paarweise auf den Triederkanten begegnen.

Die Darstellung der *Durchdringungskurven zweier Kegel oder allgemeiner Flächen 2. Ordnung* hatten schon *G. Monge*[281]) und *J. N. P. Hachette*[282]) in Angriff genommen. Rein geometrisch wurden die *Raumkurven 4. Ordnung und 1. Spezies* von *J. V. Poncelet*[283]), der die Existenz der vier sie enthaltenden Kegel 2. Ordnung nachwies, und später von *H. Schröter*[284]) untersucht. Der *Flächenbüschel 2. Ordnung* tritt zuerst in spezieller Form (mit konzentrischen Grundflächen) bei *Ch. Dupin*[285]), allgemein bei *Ch. Lamé*[286]) auf. Mit der Bestimmung des *Flächenbüschels durch acht Punkte* des Raumes von allgemeiner Lage beschäftigen sich *J. Plücker*[287]) und *Th. Reye*[288]).

---

276) Vgl. *W. Dyck*, Katalog math. Modelle, München, 1892, p. 258.

277) *H. Wieners* Sammlung mathematischer Modelle, Leipzig 1905.

278) J. f. Math. 68 (1868), p. 191 = Werke 2, p. 717. Die Lösung stammt aus dem Jahre 1836.

279) Paris C. R. 41 (1855), p. 1103.

280) Leipziger Berichte 1894, p. 160. Man vergleiche: *A. Adler,* Zur Konstruktion d. Flächen zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten, Wien. Ber. 110 (1901), p. 204.

281) Géom. descr. 3 (1798), p. 59 ff.

282) Géom. descr. 4 (1822), p. 85 ff.

283) Propr. proj. 1822, p. 392 ff.

284) Grundzüge einer rein geom. Theorie d. Raumkurven 4. Ordn. 1. Spez., Leipzig 1890.

285) J. éc. polyt. 14 (1808), p. 80.

286) Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818.

287) Ann. de mathém. 19 (1829), p. 131 = Ges. Abh. 1, p. 83.

Die *Raumkurven 3. Ordnung* gehen aus der *Durchdringung zweier Regelflächen 2. Ordnung* in dem besonderen Falle hervor, wo diese eine *Erzeugende gemein* haben. Ihre Darstellung gestaltet sich am einfachsten, wenn man *zwei Kegel* als erzeugende Flächen wählt. Mehrere Eigenschaften dieser Raumkurven findet man bei *A. F. Möbius*[289]), die vollständige Theorie bei *M. Chasles*[290]), *Chr. v. Staudt*[291]), *Th. Reye*[292]) und *H. Schröter*[293]).

Die *sphärische Ellipse* definierte *N. v. Fuß*[294]) durch die Bedingung, daß die Summe der sphärischen Abstände ihrer Punkte von zwei festen Punkten konstant bleibt, und erkannte sie als Schnitt der Kugel mit einem konzentrischen Kegel 2. Ordnung. Hiernach ist eine *Fadenkonstruktion* der Ellipse auf der Kugel möglich. *L. J. Magnus*[295]) fand, daß die erwähnten sphärischen Abstandslinien mit der Tangente gleiche Winkel bilden. *J. Steiner*[296]) stellte die sphärische Ellipse als Hüllkurve dar. Weiteres findet man bei *M. Chasles*[297]) und *Chr. Gudermann*[298]).

Auf dem *einschaligen Hyperboloide* gehört zu jeder Schar von Erzeugenden eine *Striktionslinie*. Mit ihrer Darstellung befaßten sich *A. Migotti, Th. Schmidt* und *A. Adler*[299]).

Die *Schar von Flächen 2. Ordnung* tritt bei *J. V. Poncelet*[300]) auf. Die zwei Flächen 2. Ordnung gemeinsam umschriebene *abwickelbare Fläche 4. Klasse,* deren Erzeugung schon *G. Monge*[115]) erörtert hatte, wurde von *Th. Olivier*[301]) und *J. de la Gournerie*[302]) deskriptiv behandelt.

38. Geometrie der Bewegung. Rollkurven. Verzahnungstheorie. Die geometrische Untersuchung der *Bewegungen in einer Ebene* führte

288) Geom. d. Lage 3 (1892), p. 17.

289) Barycentr. Calcül, 1827, p. 118 ff.

290) Paris C. R. 40 (1857), p. 189 ff.

291) Beitr. z. Geom. d. Lage 1860, p. 298 ff.

292) Geom. d. Lage 2 (1892), p. 188 ff. Vgl. den Bericht von *Reye* in Hamb. Mitt. 2, 1890, p. 43.

293) Theorie d. Oberfl. 2. Ordnung u. d. Raumkurven 3. Ordn. als Erzeugnisse projektiver Gebilde, Leipzig 1880.

294) Problematum quorundam sphaericorum solutio. De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. Nov. Acta Petrop. 2, 3 (1788).

295) Ann. de math. 16 (1826), p. 33.

296) Verwandlung u. Teilung sphärischer Figuren durch Konstruktion, J. f. Math. 2 (1827), p. 45 ff. = Werke 1, p. 101 ff.

297) Mém. sur les propriétés des coniques sphériques, Paris 1831.

298) Grundriß der analytischen Sphärik, Köln 1830.

299) Wien Ber. 80 (1879), p. 1023; 84 (1881), p. 908; 85 (1882), p. 369.

300) J. f. Math. 4 (1829), p. 1. Vgl. *M. Chasles*, Ap. hist. p. 396.

301) Cours de géom. descr. 2 (1884).

302) Traité de géom. descr. 2 (1862).

zu dem Begriffe des *Momentanzentrums* oder *Poles,* der von *L. Euler* herrührt, und damit zur *theoretischen Klärung* eines viel älteren, der Beobachtung entnommenen *Erzeugungsprinzips* für ebene Kurven. Dieses läßt die *Rollkurve* als Bahnlinie eines Punktes entstehen, der mit einer beweglichen Kurve, der *Polkurve,* fest verbunden ist, während diese auf einer festen Kurve, der *Polbahn,* ohne Gleiten rollt. Die allgemeine Theorie findet man bei *F. Reuleaux*[303]), *Chr. Wiener*[304]) und *L. Burmester*[305]) entwickelt. Neuerdings sind die *räumlichen Bewegungen* mit Hilfe des Begriffes der *Momentanachse* auf die *Schraubenbewegung* zurückgeführt worden. Diese Theorie wurde von *R. Ball*[306]) und *F. Klein* auseinandergesetzt. Im allgemeinen ist auf die Artikel über *Besondere transzendente Kurven* (III D 4, *Scheffers*) und über *Kinematik* (IV, 3, *Schoenflies*) hinzuweisen. Ferner kommen die Arbeiten von *H. Wiener*[307]) und *E. Study*[308]) in Betracht, die sich auf die *Zusammensetzung* und *Zerlegung* der *einfachen Bewegungen* (*Schiebung, Drehung, Umwendung, Schraubung*) in Verbindung mit der *Spiegelung* beziehen und daraus Folgerungen für das *Operieren mit geometrischen Verwandtschaften* ableiten.

Unter den *Rollinien* bot sich zuerst die *Radlinie* oder *gemeine Zykloide* der Betrachtung dar, die *Galilei* 1590 gefunden haben soll. Sie hat im Verein mit verwandten Kurven nach der Erfindung der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung viele Geometer vorzugsweise beschäftigt, aber mehr in der Richtung metrischer, weniger deskriptiver Fragen. Ähnlich ist es mit den schon seit *Ptolemäus* bekannten *Epizykloiden* und anderen *zyklischen Linien.* Es fehlte noch lange Zeit an einer allgemeinen Theorie der einschlägigen Bewegungsgesetze, die eine Verwertung für Darstellungszwecke ermöglicht hätte. Erst in neuerer Zeit kommen diese kinematischen Prinzipien bei *L. Burmester*[305]), *Fr. Schilling*[309]) und *G. Loria*[310]) auch deskriptiv

303) Theoretische Kinematik, Braunschweig 1875, p. 64 ff.

304) Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 257 ff.; 27 (1882), p. 129 ff.

305) Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, p. 20, 134, 173 ff.

306) A treatise on the theory of screws, Cambridge 1876, 2. Aufl. 1900; deutsch bearbeitet von *H. Gravelius,* Berlin 1889. *F. Klein,* Zur Schraubentheorie v. Sir *Robert Ball,* Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 237, abgedruckt, mit Zusätzen, Math. Ann. 62 (1906), p. 419.

307) Leipziger Berichte 1890. Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen p. 13; Zur Theorie der Umwendungen p. 71; Über geometrische Analysen p. 245.

308) Von den Bewegungen und Umlegungen, I u. II, Math. Ann. 39 (1891), p. 441 ff.

309) Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der zyklischen Kurven, Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 214 ff.

zur Geltung. Die zyklischen Linien finden eine wichtige Anwendung in der *Theorie der Zahnräder* und *Zahnstangen*. *Trochoiden* und *Kreisevolventen* werden hier als Formelemente benutzt. Nach der praktischen Seite hin wurde die *geometrische Verzahnungstheorie* von *F. Redtenbacher*[311]), *F. Reuleaux*[312]) und *C. Bach*[313]) entwickelt; nach der theoretischen legte *Reuleaux* die Methoden der *Hilfspolbahnen* dar, und *Fr. Schilling*[314]) gab der Theorie im Sinne der darstellenden Geometrie ihre Abrundung, indem er zugleich instruktive *kinematische Modelle* konstruierte.

39. Rotationsflächen. Einfache Drehflächen kommen schon bei *Archimedes* (287—212 v. Chr.) im I. Buche von den *Konoiden* und *Sphäroiden* vor[315]). Aber die antiken Geometer richteten ihr Augenmerk mehr auf metrische Probleme. Die Darstellung der Drehflächen und die mit ihr zusammenhängenden Probleme wurden erst viel später von *A. F. Frezier*, *G. Monge* und ihren Nachfolgern behandelt. Unter den vielerlei Spezialverfahren mögen eine elegante Konstruktion der Schatten an Ringflächen bei Parallelbeleuchtung von *M. Dunesme*[316]), die direkten Umrißkonstruktionen von *R. Niemtschik*[317]) und die Behandlung der Durchdringungskurve zweier Rotationsflächen bei *A. Mannheim*[318]) angeführt werden. Im allgemeinen gehen alle Konstruktionsverfahren von den *Meridiankurven* und den *Parallelkreisen* aus.

40. Schraubengebilde. Die *Schraubenlinie* ist schon aus dem Altertum bekannt. *Proclus Diadochus*[319]) bewies, daß gleiche Teile der Schraubenlinie kongruent sind, daß sie also *in sich beweglich* ist, eine Eigenschaft, die sie nur mit der *Geraden* und dem *Kreise* teilt. In der *Nomenklatur* herrschte bezüglich des Gebrauches der Namen: *Schraubenlinie*, *Spirale*, *Schneckenlinie* (*Helix*) lange Zeit eine gewisse

---

310) Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, deutsch von *Fr. Schütte*, Leipzig 1902.

311) Der Maschinenbau 1, Mannheim 1862.

312) Der Konstrukteur, 3. Aufl., Braunschweig 1869.

313) Die Maschinenelemente usw., Stuttgart 1891.

314) Berührungstransformationen und Verzahnung, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 11 (1902), p. 267 ff. Über neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geometrischen Einführung in dieses Gebiet, Zeitschr. Math. Phys. 51 (1904), p. 1 ff.

315) Ausg. von *Heiberg*, Leipzig, 1 (1880).

316) Paris C. R. 38 (1854), p. 953 und 45 (1857), p. 527.

317) Wien Ber. 52 (1866), p. 573.

318) Cours de géom. descr., Paris 1880.

319) Kommentar z. 1. Buch der Elemente des *Euklides*, herausgegeben von *Friedlein*, Leipzig 1873.

Unsicherheit. Jetzt versteht man unter einer Schraubenlinie die *geodätische Linie eines geraden Kreiszylinders*, die bei der Aufwicklung einer Ebene auf diesen aus einer ihrer Geraden entsteht. *H. Pitot*[320]) fand, daß ihr Schlagschatten auf eine Ebene parallel zur Achse eine *Sinuslinie* ist. Er sprach bei dieser Gelegenheit zuerst von einer *Kurve doppelter Krümmung* (courbe à double courbure). Die *Schraubenflächen* werden nach der *Art ihrer Erzeugung* unterschieden. Neben den *Meridiankurven* und *Normalkurven*, deren Ebenen entweder die Schraubenachse enthalten oder zu den schraubenförmigen Bahnen ihrer Punkte normal stehen, und bei *Regelflächen* den *erzeugenden Geraden* selbst, werden die *koaxialen Schraubenlinien*, die ihre Punkte beschreiben, zur Lösung der deskriptiven Aufgaben benutzt. Unter den Regelflächen ist die *Tangentenfläche der Schraubenlinie* und die *axial-normale* von Wichtigkeit; erstere, weil sie abwickelbar ist, letztere wegen ihrer technischen Verwendbarkeit. Daneben müssen die *Schraubenröhrenflächen* erwähnt werden, die bei der Verschraubung eines Kreises entstehen, dessen Ebene zur Bewegungsrichtung (Serpentine) oder zur Schraubenachse (gewundene Säule, Pfropfenzieherfläche) normal steht. Auch diese *Röhren-* oder *Kanalflächen* wurden seit langer Zeit technisch benutzt[321]). Die *Schrauben* soll schon *Archimedes*[322]) gekannt haben; sie werden als *rechts-* und *linksgängige* unterschieden und nach der Form des *Profils* in *flach-* und *scharfgängige* eingeteilt. Alle diese Schraubengebilde geben reichen Anlaß zu deskriptiven Untersuchungen. Die Parallelprojektion der *Schraubenlinie* führt zu den *Sinuslinien*, den *Zykloiden* und ihren affinen Kurven. Ebene Schnitte der *Schraubenflächen* ergeben *Spiralen*, ihre Schatten *Zykloiden* mit ihren *Äquidistanten*, die *Lichtgrenzen* auf Regelschraubenflächen liefern, zur Achse parallel projiziert, *unikursale Kurven 4. Ordnung* usw.

Von *Monges* Schülern beschäftigte sich *J. N. P. Hachette*[323]) eingehend mit Schraubenflächen. *L. Burmester*[324]) gab eine ausführliche konstruktive Theorie. *J. Tesař*[325]) und viele neuere Autoren behandelten die zahlreichen Probleme, die sich an die Darstellung der Schraubengebilde knüpfen.

---

320) Hist. de l'Acad. d. Sc., Paris 1724.

321) *Guido Ubaldo del Monte*, De cochlea libri VI, Venedig 1610.

322) *Diodor* 1, p. 35 und 5, p. 37.

323) Traité de géom. descr. 1822.

324) Kinematisch-geometrische Konstruktionen der Parallelprojektion der Schrauben- und insbes. des Schattens derselben, Zeitschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 185.

325) Wien Ber. 86 (1882), 377 und 94 (1886), p. 181.

41. Abwickelbare und windschiefe Regelflächen, Bahn- und Hüllflächen. *Abwickelbare Flächen* wurden von *L. Euler*[326]), *G. Monge*[327]) und *A. Tinseau*[328]) untersucht. Die Hauptsätze über *windschiefe Regelflächen* finden sich bei *M. Chasles*[329]) und *A. Cayley*[330]). Ausführlichere Darstellungen gaben analytisch *G. Salmon*[331]), synthetisch *J. de la Gournerie*[332]), deskriptiv wurden die Regelflächen von *Chr. Wiener*[333]) und *K. Rohn*[334]) behandelt. Besonders zogen die *Regelflächen 3. und 4. Grades* die Aufmerksamkeit auf sich. Sie wurden von *A. Cayley*[335]), *L. Cremona*[336]), *M. Chasles*[337]), *Em. Weyr*[338]), *K. Rohn*[339]) und *Th. Reye*[340]) behandelt. *J. Plücker*[341]) untersuchte zuerst das *Zylindroid.* Die *abwickelbare Normalenfläche*, die von den Normalen längs einer *Krümmungslinie* erzeugt wird, definierte *G. Monge*[342]). Allgemeinere Untersuchungen lieferten *A. Mannheim*[343]), *E. Koutny*[344])

326) De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet, Nov. Comm. Petrop. 16 (1771).

327) Mém. sur les développées et les points singuliers des courbes à double courbure 1771, Mém. Sav. étr. Paris 10 (1785).

328) Solution de quelques problèmes etc. 1774, Mém. d. Sav. étr. 9 (1781).

329) Corresp. Quetelet 11 (1839).

330) Cambridge and Dublin Math. Journ. 7 (1852), p. 171 = Papers 2, p. 33. On Skew Surfaces, otherwise Scrolls, London Transact. 153 (1863), p. 453; 154 (1864), p. 559, 159 (1869), p. 111 = Coll. Math. Papers 5, p. 168 u. 201, 6, p. 312.

331) *Salmon-Fiedler*, Analyt. Geom. d. Raumes, 3. Aufl. Leipzig 1880, 2 p. 288 ff. und p. 252 ff.

332) Traité de géom. descr. 2 (1862), Nr. 613 ff.; 3 (1864), Nr. 882 ff.

333) Darst. Geom. 2 (1877), p. 420 ff.

334) *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geom. 3 (1906), p. 216 ff.

335) On the Skew Surface of the Third Order, Phil. Mag. 24 1862, p. 514 = Coll. Math. Papers 5, p. 90. On the Theory of Cubic Surfaces, Phil. Mag. 27 (1864), p. 493 = Papers 5, p. 138. A Memoir on Cubic Surfaces, London Transact. 159 (1869), p. 231 = Papers 6, p. 359. On a Surface of the Fourth Order, Phil. Mag. 21 (1861), p. 491 = Papers 5, p. 66. Mém. sur les courbes du troisième ordre, Journ. de Math. 9 (1844), p. 285 u. 9 (1845), p. 102 = Papers 1, p. 183 u. 190. Mém. sur les courbes à double courbure et les surfaces développables, Journ. de Math. 10 (1845), p. 245 = Papers 1, p. 207.

336) Atti Istituto Lombardo 2 (1861); Mem. Bologna 8 (1868); Sur les surfaces gauches du troisième degré, J. f. Math. 60 (1862), p. 313.

337) Paris C. R. 53 (1861), p. 884.

338) Geom. d. räuml. Erzeugnisse usw., Wien 1870.

339) Math. Ann. 24 (1884), p. 55 und 28 (1887), p. 284.

340) Geom. d. Lage 3 (1892), p. 92 ff.

341) On a new geometry of space, Lond. Trans. 155 (1865), p. 756 = Ges. Abh. 1, p. 535; Neue Geom. des Raumes, Leipzig 1868—1869.

342) Géom. descr. 127 (1798).

343) Mém. sur les pinceaux de droites et les normalies, Journ. de Math. 17 (1872), p. 109; Cours de géom. descr., Paris 1880, p. 273 f.

und *G. A. v. Peschka*[345]). *Chr. Wiener*[346]) widmete der *Wölbfläche des schiefen Durchgangs* eingehende Behandlung.

42. Krümmung der Kurven und Flächen. Die Theorie der *Krümmung ebener Kurven* wurde zuerst von *Chr. Huygens*[347]) angebahnt. *G. W. Leibniz*[348]) und *J. Newton*[349]) wandten ihre neuen analytischen Methoden auf sie an. Die Relation zwischen dem *Krümmungsradius* einer Kurve und dem ihrer *Orthogonalprojektion* gab *G. Bellavitis*[350]), für die *Zentralprojektion L. Geisenheimer*[351]). Die *Krümmungskreise der Kegelschnitte* leitete *W. Fiedler*[352]) aus einer ausgearteten *Zentralkollineation* ab. Einfache *Konstruktionen* gab *C. Pelz*[353]), die einfachsten entwickelte *K. Rohn*[354]).

Über die *Krümmung* der *Raumkurven* handelt *G. Monge*[355]). Die Abhängigkeit des Verhaltens einer Raumkurve von dem Bewegungssinne des beschreibenden Punktes, der Tangente und Schmiegungsebene und die Entstehung ihrer einfachen *Singularitäten* legte *Chr. Wiener*[356]) dar und erläuterte sie durch *Modelle.*

Die Theorie der *Krümmung der Flächen* beruht wesentlich auf den Untersuchungen von *L. Euler*[357]) und *M. Ch. Meusnier*[358]). Den Begriff der *Krümmungslinien* verdanken wir *G. Monge*[359]). Die *Haupttangenten* und die *Indikatrix* treten zuerst bei *Ch. Dupin* auf[360]).

---

344) Wien Ber. 75 (1877), p. 851.

345) Wien Ber. 81 (1880), p. 1128 u. 1163.

346) Darst. Geom. 2 (1887), p. 475 ff.

347) De evolutione et dimensione linearum curvarum, Horologium oscillatorium 3, Paris 1673.

348) Acta Erudit. Leipzig 1686 und 1692.

349) Principia philosophiae naturalis mathematica, London 1687; The method of fluxions etc., London 1736, probl. 5, 6, p. 59 ff.

350) Geometria descrittiva, Padua 1851, p. 188.

351) Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 214.

352) Darst. Geom. 1, 3. Aufl., p. 188 f.

353) Die Krümmungshalbmesserkonstruktionen der Kegelschnitte als Korollarien eines *Steiner*schen Satzes, Ber. Böhm. G. d. W., Prag 1879, p. 205 ff.

354) Konstr. d. Krümmungsradius bei einem Kegelschnitt durch fünf Punkte, Leipziger Berichte 1900, p. 17.

355) Géom. descr. 5 (1798), p. 104—112.

356) Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 95.

357) Recherches sur la courbure des surfaces, Hist. Mém. Berlin 1760.

358) Mém. sur la courbure des surfaces, Mém. Sav. étr., Paris 1776.

359) Mém. sur la théorie des déblais et des remblais, Mém. Paris 1781; Application de l'analyse à la géométrie 15, 16 (1795); Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide, J. éc. polyt. 2 (1796); Geom. descr. 5 (1798), p. 125—131.

Das System der *konfokalen Flächen 2. Grades*, welches zu ihren Krümmungslinien in naher Beziehung steht, findet man bei *Ch. Dupin*[361]) und *J. Binet*[362]), ferner bei *Em. Weyr*[363]). Die Theorie des *Krümmungsmaßes* hat *C. F. Gauß*[364]) entwickelt.

43. Kotierte Projektion und Topographie. Stereographische und Kartenprojektion. Die Darstellung der *topographischen* oder *Terrainflächen* erheischt besondere Methoden, da sie nicht geometrisch definiert werden können, sondern durch messende Beobachtungen der Bodengestaltung annähernd bestimmt werden müssen. Der Geograph *Ph. Buache* (1700—1773) führte 1738 die *Horizonial- und Niveaukurven* in die *Erdbeschreibung* ein, die man sich leicht als Grenzen überschwemmter Gebiete vorstellt. Nach *Ch. Dupin*[365]) soll der Genieoffizier *Châtillon* diese Idee zuerst deskriptiv verwertet und *M. de Mureau* die *Vertikal- oder Profilschnitte* des Bodens hinzugefügt haben, die heute in der *Geologie* und *Lagerstättenlehre* eine bemerkenswerte Rolle spielen. *G. Monge*[366]) behandelte bereits mehrere topographische Aufgaben, und *J. de la Gournerie*[367]) schrieb über die *topographischen Darstellungsmethoden*. Zusammenfassend legte *G. A. V. Peschka*[368]) das *Verfahren der kotierten Projektion* dar. Man findet die Hauptbegriffe und Sätze dieser Methode bei *Rohn-Papperitz*[369]) in einem Abschnitt über *topographische Flächen* auseinandergesetzt. Es kommen wesentlich die Begriffe: *Kote* (*Höhenzahl*) einer *Niveaulinie*, *Gipfel-*, *Mulden-* und *Sattel-* oder *Jochpunkte*, *Fallinien* (rechtwinklig zu den Horizontalkurven), *Kammlinie*, *Talweg* und *Linie gleichen Gefälles* in Betracht. Die *abwickelbaren Flächen gleichförmiger Neigung*, die für die künstliche Bodengestaltung (*Böschungsflächen*) wichtig sind, wurden von *J. de la Gournerie*[370]) deskriptiv behandelt. Sie bieten ein rein geo-

360) Développements de géométrie, pour faire suite à la géométrie pratique de *Monge*, Paris 1813.

361) Ebenda p. 269.

362) J. éc. polyt. 16 (1813), p. 59.

363) Über Krümmungslinien der Flächen 2. Grades und konfokale Systeme solcher Flächen, Wien Ber. 58 (1868), p. 60.

364) Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comment. Gotting. rec. 6 (1828) = Werke 4 (1880), p. 217.

365) Essai sur les services et les travaux scientifiques de *G. Monge*, Paris 1819.

366) Géom. descr. 4 (1798), p. 95—102.

367) Discours sur l'art du trait et la géométrie descriptive, Paris 1855, p. 22 ff.

368) Kotierte Ebenen und deren Anwendung, Brünn 1877.

369) Lehrb. d. darst. Geom. (3) 300 (1906), p. 289.

370) Traité de géom. descr. 2, Paris 1802, p. 104 ff.

metrisches Interesse, insofern ihre Niveaulinien sich als *Äquidistanten* oder *Evolventen mit gemeinsamer Evolute* projizieren.

Die *stereographische Projektion* (eine *konforme* oder *winkeltreue Abbildung*) ist von *Hipparch* (um 160 v. Chr.) erfunden und von *Ptolemaeus* (um 140 n. Chr.) zur Darstellung der scheinbaren Himmelskugel in seinem „Planisphaerium" benutzt worden. Den Namen gab ihr *Fr. Aguillon*[371]). Näheres findet sich bei *E. Reusch*[372]); über ihre kartographische Anwendung bei *H. Gretschel*[373]). Beiläufig sind noch die *Zylinderprojektion* und *Kegelprojektion* der *Kugel* zu erwähnen, die zur Herstellung von Land- und Seekarten verwendet werden[374]). Man vergleiche den Artikel über *Kartographie* (VI 1 4, *Bourgeois* und *Furtwängler*).

44. Photogrammetrie. Die fortschreitende technische Vervollkommnung und Verallgemeinerung der photographischen Verfahren hat einen neuen Zweig der darstellenden Geometrie entstehen lassen, der es wesentlich mit der zweiten Hauptaufgabe zu tun hat, die *Photogrammetrie* (VI 1 2, *Finsterwalder*). Diese lehrt aus photographisch gewonnenen perspektiven Bildern den *Gegenstand rekonstruieren*, und zwar nicht nur durch Wiederaufsuchung des richtigen Gesichtspunktes geistig restituieren, sondern nach allen *Lagebeziehungen* und *wahren Abmessungen* bestimmen. Hierzu dient außer der *Festlegung der Data der Perspektive* die *Vergleichung gewisser Maße in der Wirklichkeit und im Bilde.* Meist leitet man aus den perspektiven Bildern den *Grund- und Aufriß des Objektes* ab und fügt einen *Maßstab* hinzu. Näheres findet man bereits in dem ausführlichen Berichte von *S. Finsterwalder*[375]) und bei *Fr. Schilling*[376]).

45. Abbildungen im weiteren Sinne sind in verschiedenen anderen Teilen der Mathematik zur Geltung gekommen. In der dar-

371) Opticorum lib. 6, Antwerpen 1613, p. 498.

372) Die stereographische Projektion, Leipzig 1881.

373) Lehrb. d. Kartenprojektion, Weimar 1873.

374) Die vielerlei Modifikationen, welche diese Verfahren zu dem Zwecke erfahren haben, ein auf der Erdkugel gedachtes, aus Meridian- und Breitenkreisen gebildetes Gradnetz auf ebener Fläche abzubilden, sind in ihrer Mehrzahl keine eigentlichen Projektionen. Die Bedingungen, daß die Abbildung winkeltreu (konform), längentreu (äquidistant) oder flächentreu (äquivalent) sein soll, lassen sich nicht vereinen. Man hat daher zu Verfahren gegriffen, die zwischen den Methoden, die einzelnen dieser Bedingungen genügen, vermitteln, um die Abweichungen möglichst zu verringern.

375) Die geom. Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. (6) 2 (1899), p. 1 ff.

376) Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, Leipzig und Berlin 1904.

stellenden Geometrie ist wesentlich nur ein einzelnes, *nichtikonisches Verfahren*, die *Zyklographie*, entwickelt worden. Es beruht auf einer schon von *B. E. Cousinery* angewandten Bestimmungsweise des Augpunktes in der Perspektive durch *Hauptpunkt* und *Distanzkreis* und ist von *W. Fiedler*[377]) eingeführt worden. *E. Müller*[378]) wies auf Weiterbildungen der Zyklographie hin, die sie besonders durch konsequente Orientierung der Kreise zur Behandlung der *Berührungstransformationen*, die Kreise in Kreise überführen, geeignet macht. Auch die *Kristallographen* benützen ein *anikonisches Darstellungsverfahren*, indem sie *ebene Kristallflächen* durch die aus dem *Mittelpunkt des Achsensystems* auf sie gefällten *Normalen* oder durch deren *Spurpunkte in einer konzentrischen Kugelfläche* bestimmen, die ihrerseits durch *stereographische Projektion* abgebildet wird.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß von *G. Veronese*[379]), *P. H. Schoute*[380]), *G. Loria*[381]), *R. Mehmke*[382]), *H. de Vries*[383]) und *E. Müller*[384]) die *Methoden der darstellenden Geometrie* auf die *Gebilde im Raume von vier Dimensionen* ausgedehnt worden sind.

---

377) Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme, Leipzig 1882.

378) Beiträge zur Zyklographie, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 14 (1905), p. 574f.

379) Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens, Math. Ann. 19 (1881), p. 161ff. Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni, Atti Ist. Ven. (5) 8 (1882), p. 981ff.

380) Regelmäßige Schnitte und Projektionen des 120zelles und 600zelles im vierdimensionalen Raume, Antwerpen 1895. — Het vierdimensionalen prismoide, Verh. Ak. Amst. 5, 2 (1896), p. 1ff. — Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions, a. a. O. 7, 4 (1900), p. 1ff. — Le déplacement le plus général dans l'espace à n dimensions. Ann. Éc. Polyt. Delft 7 (1901). — Mehrdimensionale Geometrie, I. Die linearen Räume, II. Die Polytope, Leipzig 1902 u. 1906.

381) Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 257ff.

382) Ueber die darstellende Geometrie der Räume von 4 und mehr Dimensionen usw., Stuttgart, Mathem.-naturwiss. Mitteilungen (2) 6 (1904), p. 44ff.

383) Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume, Leipzig 1905.

384) Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 14 (1905), p. 569.

(Abgeschlossen Juli 1909.)

III AB 7. DIE VERSCHIEDENEN KOORDINATEN-SYSTEME.

VON

E. MÜLLER

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

22. Besondere Arten linearer Ebenenkoordinaten und Linienkoordinaten in der Ebene.
23. Sonstige Ebenenkoordinaten und Linienkoordinaten in der Ebene.
24. Pentasphärische Kugelkoordinaten und ihre Analoga.
25. Hexasphärische Kugelkoordinaten und ihre Analoga; Komplexkoordinaten.
26. Koordinaten von algebraischen Flächen, Kurven in der Ebene und Punktgruppen in der Geraden.

III. Koordinaten von Linien im Raum (allgemein: von M_r^m im R_n, $r < n-1$).

27. *Plücker*sche Linienkoordinaten.
28. Gewindekoordinaten, *Klein*sche Linienkoordinaten.
29. Sonstige Linienkoordinaten.
30. R_2-Koordinaten im R_n. Koordinaten von Kreisen und Punktepaaren im R_2.

IV. Koordinaten von Gebilden auf einer Kurve oder Fläche (einer nichtlinearen Mannigfaltigkeit).

31. Allgemeines.
32. Koordinaten auf der Kugelfläche (Sphärische Koordinaten).
33. Koordinaten auf einer Fläche zweiter Ordnung.
34. Natürliche Koordinaten.
35. Koordinaten sonstiger Elemente.

V. Koordinatentransformation.

36. Allgemeines.
37. Lineare, insbesondere orthogonale Transformationen.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.*)

H. Andoyer, Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure. t. 1, Paris 1900. [Leçons.]

R. St. Ball, The theory of screws, a study in the dynamics of a rigid body, Dublin 1876. (Auszug daraus: Math. Ann. 9 (1876), p. 541—553.) — 2. Aufl. A treatise on ...., Cambridge 1900. — Deutsche Bearbeitung von *H. Gravelius*, Theoretische Mechanik starrer Körper, Berlin 1889. [Theory of screws. Zitate nach der 1. Aufl.]

R. Baltzer, Analytische Geometrie, Leipzig 1882. [Anal. Geom.]

J. B. Biot, Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré, Paris 1802. 2ᵉ éd. Essai de géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, Paris 1805 (8ᵉ éd. 1834). Deutsch von *Th. Ahrens*, 2. Aufl. Nürnberg 1840. Englisch von *E. v. Smith*, Philadelphia 1858. [Géom. anal.]

M. Bôcher, Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894. [Reihenentw.]

---

*) Die für das betreffende Werk in diesem Artikel gebrauchte Abkürzung ist in eckige Klammern geschlossen.

O. Böklen, Analytische Geometrie des Raumes, enthaltend die allgemeine Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Kurven und der Linien auf den Flächen; die Eigenschaften der (homofokalen) Flächen zweiten Grades und der Linien auf denselben, Stuttgart 1861. [Anal. Geom.] 2. Aufl. (I. Teil, Die allgemeine Theorie der Flächen und Kurven; die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. II. Teil, Disquisitiones circa superficies curvas von *C. F. Gauß*, ins Deutsche übertragen mit Anw. u. Zusätzen. Die *Fresnel*sche Wellenfläche.) [Anal. Geom. 2. Aufl.]

J. Casey, A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic sections, Dublin 1885, 2. Aufl. 1893.

A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. T. I, Paris 1826, Préliminaires = Œuvres complètes d'*Augustin Cauchy*, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences etc. 2e série, t. 5, Paris 1903, p. 11—42, [Appl. Seitenzahl nach Œuvres.]

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie, Paris 1837; 2e éd. 1875; 3e éd. 1889; deutsch von *L. A. Sohncke*, Halle 1839. [Ap. hist. — Zitate nach 2e éd.]

A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearb. u. herausg. von *F. Lindemann*, Bd. 1, Leipzig 1876; ins Französ. übers. von *Ad. Benoist*, 3 Bde., Paris 1879—1883; Bd. 2, T. 1, Leipzig 1891. 2. Aufl. Bd. 1, T. 1, Lief. 1., Leipzig 1906. [*Clebsch-Lindemann*. Zitiert nach d. 1. Aufl.]

G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires, Paris 1873 (2. tirage 1896). [Classe rem.]

—, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. 4 Bde., Paris 1887, 1889, 1894, 1896. [Leçons.]

—, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. T. 1, Paris 1898. [Systèmes orth.]

R. Descartes, Œuvres, publ. par *Ch. Adam* et *P. Tannery*, sous les auspices du ministère de l'instruction publique; t. 6: Discours de la Méthode [Leyden 1637] et Essais, Paris 1902. [Oeuvres 6.]

N. Druckenmüller, Die Übertragungsprinzipien der analytischen Geometrie. 1. Bd. Trier 1842. [Übertragungsprinzipien.]

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum. 2 Bde. Lausannae 1748. Deutsche Übersetzung von *J. A. Chr. Michelsen*, Berlin 1788. [Introd.]

P. de Fermat, Œuvres, publ. par *P. Tannery* et *Ch. Henry*, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. t. 1: Œuvres mathématiques diverses. Observations sur Diophante, Paris 1891; t. 2: Correspondance, 1894; t. 3: Traductions par *P. Tannery*, 1896. [Oeuvres.]

N. M. Ferrers, An elementary treatise on trilinear coordinates, London 1861. 4. Aufl. 1890.

W. Fiedler, Die darstellende Geometrie. Ein Grundriß für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Leipzig 1871. — 2. Aufl. 1875 mit dem Titel: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage usw. — 3. Aufl., in drei Teilen, 1883—88; davon kommt für diesen Artikel der 3. T. „Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage", Leipzig 1888, in Betracht. [Darst. Geom.]

H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik usw., Leipzig 1844, 2. Aufl., 1878. [Ausdehnungsl. v. 1844.]

—, Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862. [Ausdehnungsl. v. 1862.] Beide Bearbeitungen sind enthalten in „*Hermann Graßmanns* gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgegeben von *F. Engel* unter Mitwirkung von *J. Lüroth*, *E. Study*, *J. Graßmann*, *H. Graßmann d. J.* u. *G. Scheffers*". 1. Bd., T. 1 u. 2, Leipzig 1894, 1896.

J. A. Grunert, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Koordinatensysteme, Greifswald u. Leipzig 1857.

C. Gudermann, Grundriß der analytischen Sphärik, Köln 1830.

S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895.

J. G. Hagen, Synopsis der höheren Mathematik, 2. Bd., Berlin 1894. III. Abschnitt, Die Koordinatensysteme, p. 67—93. IV. Abschnitt, Die linearen und quadratischen Liniensysteme, p. 94—127.

L. Heffter und *C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd.: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene, Leipzig und Berlin 1905. [*Heffter-Koehler* 1.]

O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1861. 2. Aufl. 1869, 3. Aufl., revidiert und mit Zusätzen versehen von *S. Gundelfinger*, 1876. [Vorles. Raum. Zitate nach d. 1. Aufl.]

—, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Geraden, des Punktes und des Kreises in der Ebene, Leipzig 1865. 3. Aufl., revidiert von *S. Gundelfinger*, 1881. 4. Aufl., rev. u. ergänzt von *S. Gundelfinger*, 1906. [Vorles. Ebene.]

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften Leipzig 1882.

C. M. Jessop, A treatise on the line complex, Cambridge 1903. [Line complex.]

W. Killing, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten, 2 Teile, Paderborn 1900—01.

F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt i. d. phil. Fac. u. d. Senat d. k. Friedrich-Alexanders-Univ. zu Erlangen, Erlangen 1872 = Math. Ann. 43, p. 63—100. Italienisch von *G. Fano*: Ann. mat. p. appl. Milano (2) 17 (1890), p. 307—343. Französisch von *H. Padé*: Ann. éc. norm. (3) 8 (1891), p. 87, 173. Englisch von *M. W. Haskell*: Bull. Amer. math. Soc. 2 (1893), p. 215—249. Polnisch von *S. Dickstein*: Prace mat. fiz. 6 (1895). Russisch von *D. M. Sintsoff*: Kasan Abh. (2) 5, 6 (1895—6). [Vergl. Betr.]

—, Einleitung in die höhere Geometrie. Autogr. Vorlesungen ausgearb. von *F. Schilling*. 2 Teile, Göttingen 1893. [Höhere Geom.]

—, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Autogr. Vorlesungen ausgearb. von *E. Hellinger*. 1. T.: Arithmetik, Algebra, Analysis (Winters. 1907/8), Leipzig 1908. 2. T.: Geometrie (Sommers. 1908), Leipzig 1909. [Elementarmath.]

G. Koenigs, La Géométrie réglée et ses applications, Paris 1895. [Géom. réglée.]

G. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859.

L. Lecornu, Artikel „Coordonnées" in „La grande Encyclopédie", Paris, t. 12 (1891), p. 887 f.

G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von *F. Schütte*, Leipzig 1902. [Ebene Kurven.]

L. I. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. 1. (der Ebene), Berlin 1833 [als 3. T. von *Meier Hirschs* Sammlung geom. Aufgaben erschienen]. 2. (des Raumes, 1. Abt.), Berlin 1837. [Aufg. u. Lehrs. 1 oder 2.]

W. Fr. Meyer, Apolarität und rationale Kurven. Eine systematische Voruntersuchung zu einer allgemeinen Theorie der linearen Räume. Tübingen 1883. [Apolarität.]

A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827 = Ges. Werke, 1. Bd. herausg. von *R. Baltzer*, Leipzig 1885. [Baryc. Calcul.]

P. Muth, Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie, Leipzig 1895. [Grundlagen.]

M. d'Ocagne, Coordonnées parallèles et axiales, Paris 1885.

G. S. Ohm, Elemente der analytischen Geometrie im Raume am schiefwinkeligen Koordinatensysteme (1. Bd. der „Beiträge zur Molekular-Physik“), Nürnberg 1849.

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, 2. Teil: Die Geometrie. Deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1902. [Rep.]

J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, Essen, Bd. I 1828, Bd. II 1831. [Entw.]

—, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835. [Syst. anal. Geom.]

—, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846. [Syst. Geom. d. R.]

—, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, Bd. I 1868, Bd. II (herausg. von *F. Klein*) 1869. [Neue Geom. d. R.]

Th. Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme, Leipzig 1879. Italienische Übers., Geometria sintetica delle sfere e dei loro sistemi lineari, von *Massimo Misani*, Milano 1881. [Geom. d. Kugeln.]

C. Runge, Analytische Geometrie der Ebene, Leipzig u. Berlin 1908. [Anal. Geom.]

G. Salmon, A treatise on conic sections, Dublin 1848; 6. Aufl. London 1879; deutsch bearb. von *W. Fiedler*: 1. Teil, 7. Aufl. 1907; 2. Teil, 6. Aufl. 1903, Leipzig.

F. Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig 1898. [Anal. Geom.]

B. Sommer, Die Winkelkoordinaten, Coblenz 1848.

O. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie, Leipzig und Berlin 1905. [Anal. Geom.]

—, Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, Leipzig 1896. [Fokaleigenschaften.]

E. Study, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie, Leipzig 1903. Die beiden ersten Abschnitte sind schon 1901 als erstes Heft des ganzen Werkes erschienen. [Geom. d. Dynamen.]

J. Thomae, Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene, Leipzig 1906.

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908 [Geom. d. Kr.].

H. Weber und *J. Wellstein*, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrende und Studierende. 2. Bd. Elemente der Geometrie, Leipzig 1905. 3. Bd. Angewandte Elementar-Mathematik, Leipzig 1907. [*Weber-Wellstein*, Encykl.]

E. Wölffing, Artikel „Koordinaten" in *O. Luegers* Lexikon der gesamten Technik, Stuttgart 1894—99.

—, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 142—159. [Ber.]

K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen. 1. Bd. Leipzig 1902 (Sammlung Schubert XXXIV), 2. Bd. 1906 (Sammlung Schubert LI). [Liniengeom.]

Historische und bibliographische Schriften.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr., 2. Aufl. Leipzig 1894, 3. Aufl. 1907. II. Bd. Von 1200—1668, 2. Aufl. Leipzig 1900. III. Bd. Von 1668—1758, 2. Aufl. Leipzig 1901. IV. Bd. Von 1759—1799, unter Mitwirkung verschiedener Autoren, Leipzig 1908. [Vorl.]

E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). Erster Band eines Berichtes, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 5 (1901), 2. Heft. [Bericht.]

G. Loria, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione accresciuta et interamente rifatta, Torino 1896. Deutsche Übersetzung der 1887 erschienenen 1. Ausg. von *F. Schütte*, Leipzig 1888. [Teor. geom.]

F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften, Leipzig u. Berlin 1909 (insb. p. 164—170).

Royal Society of London, Catalogue of scientific Papers 1800—1900. Subject Index. Vol I: Pure Mathematics, Cambridge 1908 (insb. p. 425—427).

J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. 2. Bd. Leipzig 1903. [*Tropfke*.]

E. Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. 1. Teil: Reine Mathematik, Leipzig 1903. Nr. 190.

H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, deutsche Ausgabe von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1886. [Kegelschn.]

Die **Abkürzung der Zeitschriftentitel** geschah, soweit es die Redaktion zuließ, nach:

F. Müller, Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts, Leipzig 1903. (Sonderabdruck aus Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 12).

Einleitung.

1. Allgemeiner Begriff und Zweck der Koordinaten. Einteilungsprinzipe. *Koordinaten*[1]) kann man in der Geometrie allge-

1) Der Name stammt von *G. W. Leibniz*, vgl. Anm. 21. *H. Graßmann*,

mein als Zahlen definieren, durch die ein räumliches Gebilde in bezug auf andere, als gegeben angenommene Gebilde (die *Fundamental-* oder *Grundgebilde*) bestimmt wird[2]). Die letzteren bilden die *Basis*[3]) der Koordinaten. Die verschiedenen Arten, auf die Raumgebilden Zahlengruppen als Koordinaten zugeordnet werden, geben die verschiedenen *Koordinatensysteme.* Bei den meisten von ihnen enthält die Basis jene Mannigfaltigkeiten von Elementen, für welche nur eine der Koordinaten nicht verschwindet. Zwei Koordinatensysteme werden als *gleichartig* angesehen, wenn, bei verschiedenen Basen, die Zuordnung der Zahlgruppen zu den Raumgebilden nach der gleichen Vorschrift erfolgt.

Die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$ eines Raumgebildes heißen *homogen,* wenn sie nur endliche Werte annehmen, nicht alle gleichzeitig null werden und die Wertesysteme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots, \varrho x_n)$, wo ϱ weder Null noch unendlich ist, äquivalent sind[4]).

Die gebräuchlichen Koordinatensysteme enthalten nur endliche

Ausdehnungsl. v. 1844, § 87 = Ges. W. 1[1], p. 152, schlägt dafür das deutsche Wort *Zeiger* vor, das jedoch bisher nur von *K. Zindler,* Liniengeom., aufgenommen wurde.

2) Bei den meisten Koordinatensystemen haben die Koordinaten einfache geometrische Bedeutungen (Größen von Strecken, Flächen, Volumen, Winkeln oder Verhältnisse solcher).

Den Begriff von Punktkoordinaten hat *J. Plücker* schon 1829 sehr allgemein gefaßt (J. f. Math. 5, p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 124). Vgl. auch *N. Druckenmüller,* Übertragungsprinzipien, p. 1, 4. Dieses noch öfter zu nennende Werk eines Schülers *Plückers,* das sich durch einen hohen wissenschaftlichen Standpunkt gegenüber der Koordinatengeometrie auszeichnet und Originalgedanken (unter anderem eine Theorie der Polaren algebraischer Kurven (s. hierzu J. f. Math. 26 (1843), p. 4, Fußn.) enthält, ist mit Unrecht kaum bekannt geworden.

Die Bestimmung durch Koordinaten ist auch auf andere Mannigfaltigkeiten von Dingen anwendbar. *B. Riemanns* Habilitationsschrift v. J. 1854 (Abh. Ges. Gött. 13 (1867), p. 3 = Ges. W., 2. Aufl., p. 273; franz. Übers. von *J. Hoüel* = Ann. mat. p. appl. (2) 3 (1869—70), p. 309—326) handelt in I, § 1 von allgemeinen Begriffen, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Hierzu gehören z. B. die Farben; vgl. *K. Zindler,* Zeitschr. f. Psychologie u. Physiologie d. Sinnesorgane, 20 (Leipzig 1899), p. 225—293.

3) *W. Unverzagt,* Über einige neue Projektionsmethoden, Progr. Wiesbaden 1865, p. 2.

4) *P. Muth,* Grundlagen, p. 3. Wegen des ersten Auftretens homogener Koordinaten s. Anm. 60[a], 61.

F. Giudice, Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 288, nennt ein Koordinatensystem *halbhomogen,* wenn eine homogene Funktion der Koordinaten einen von Null verschiedenen konstanten Wert besitzt, während die übrigen noch vorhandenen Beziehungen zwischen den Koordinaten sich durch homogene Gleichungen ausdrücken lassen.

Anzahlen von Koordinaten[5]), die sich mit den durch sie bestimmten Raumgebilden stetig ändern[6]). Letztere Voraussetzung ist notwendig und hinreichend, damit die Raumgebilde eine stetige Mannigfaltigkeit bilden[7]).

Durch die Einführung von Koordinaten wird also eine Mannigfaltigkeit von Raumgebilden (die in bezug auf eine Transformationsgruppe einen Körper[8]) bilden) stetig und, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, umkehrbar eindeutig auf eine Zahlenmannigfaltigkeit abgebildet. Von der Möglichkeit einer solchen Abbildung geht die analytische Geometrie aus[9]).

---

5) *B. Riemann* erwähnt in I, § 3 seiner Habilitationsschrift (Anm. 2) auch die Möglichkeit von Mannigfaltigkeiten, in denen ein Element zu seiner Bestimmung eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Koordinaten erfordert. *G. Veronese* gelangt bei seinen Untersuchungen über die Grundlagen d. Geometrie (III AB 1, *Enriques*, Nr. 1) zu Räumen von unendlich vielen Dimensionen. Wegen geometrischer Beispiele, die zur Untersuchung solcher Mannigfaltigkeiten führen, vgl. *E. Jouffret,* Géométrie à quatre dimensions, Paris 1903, § 57; *E. Cesàro*, Ann. mat. p. appl. (2) 15 (1888), p. 323. *S. Pincherle* (II A 11, Nr. 13) betrachtet den Raum der analytischen Funktionen von abzählbar unendlicher Dimensionenzahl. *M. Fréchet,* Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 38—48; Nouv. Ann. Math. (4) 8 (1908), p. 97—116, 289—317, gibt die Grundlagen für eine analytische Geometrie mit unendlich vielen Koordinaten, deren Begriff übrigens schon den Arbeiten von *D. Hilbert* über lineare Integralgleichungen (vgl. insbes. Nachr. Ges. Gött. 1896, p. 158 f.) und einigen sich diesen anschließenden Arbeiten wie von *L. Fejér, E. Fischer, F. Riesz* („Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables", Paris C. R. 144 (1907), p. 1409) und *E. Schmidt*, Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 53—77, zugrunde liegt. Vgl. hierzu auch *A. Schoenflies*, Die Entw. der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, 2. T., Leipzig 1908, p. 297—299; *G. Kowalewski*, Einführung in die Determinantentheorie usw., Leipzig 1909, p. 407 ff.

6) Dabei ist vorausgesetzt, daß der Begriff einer stetigen Änderung dieser Raumgebilde bereits feststehe. Ein beachtenswertes Beispiel für eine derartige Stetigkeitsdefinition gibt *D. Hilbert* (vgl. III AB 1, *F. Enriques*, Nr. 15, Anm. 143). Vgl. auch *É. Borel*, Bull. soc. math. France 31 (1903), p. 272—275, wo Definitionen für benachbarte Gerade und Ebenen aufgestellt werden. — Gewöhnlich versteht man unter einer stetigen Änderung eines Raumgebildes eine solche, die einer stetigen Änderung seiner Koordinaten entspricht. Diese Definition setzt also die Einführung von Koordinaten schon voraus.

7) I A 5, *Schoenflies*, Nr. 2, Anm. 16.

8) III AB 4 b, *Fano*, Nr. 3.

9) Wegen dieser Auffassung des Raumes als Zahlenmannigfaltigkeit vgl. *S. Lie,* Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von *F. Engel*, 3, Leipzig 1893, Abt. V, insbes. p. 394 f. u. 506. Wegen der Voraussetzungen, unter denen die Einführung von Koordinaten in einer drei- oder mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit möglich sein soll, vgl. *H. Burkhardt,* Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1895, p. 114—118; *F. Enriques* (III AB 1, Nr. 15, Anm. 142), ferner Anm. 15.

Die Einführung von Koordinaten bezweckt aber meist mehr als bloße Lagenbestimmung von Raumgebilden gegenüber der Basis des Koordinatensystems[10]); sie sollen vielmehr als Hilfsmittel zur Darstellung von Systemen solcher Gebilde und zur Untersuchung gegenseitiger geometrischer Beziehungen dieser neuen und der ursprünglichen Gebilde mittels Rechnung dienen (*analytische*[38]) oder *Koordinaten-Geometrie*).

Sobald man von einer *geometrischen Beziehung* räumlicher Gebilde spricht, setzt man stillschweigend voraus, daß eine Transformationsgruppe des Raumes existiere, hinsichtlich welcher diese Beziehung[11]) invariant ist (II A 6, *Maurer* und *Burkhardt*, Nr. 1; III AB 4b, *Fano*, Nr. 3). Wird die Basis S eines Koordinatensystems (S) durch eine bestimmte Raumtransformation $\mathfrak{T}$ in die Basis S' eines Koordinatensystems (S') übergeführt und besitzen je zwei durch $\mathfrak{T}$ einander zugeordnete Raumelemente p, p' in (S) bzw. (S') gleiche Koordinaten, so sagen wir, das Koordinatensystem (die Koordinatenbestimmung) (S) wird durch die Transformation $\mathfrak{T}$ in (S') übergeführt. Wird ein Koordinatensystem (S) durch die Transformationen einer bestimmten Gruppe in sämtliche mit (S) als gleichartig geltende Koordinatensysteme übergeführt und in keine andern, so heißt das Koordinatensystem *invariant gegenüber dieser Transformationsgruppe.* Ein solches Koordinatensystem wird für die analytische Behandlung der durch die Gruppe definierten Geometrie besonders geeignet sein[12]).

Die *Einteilung der Koordinatensysteme*[13]) kann erfolgen: 1) nach dem Elemente der Koordinatenbestimmung (Punkt-, Ebenen-, Kugel-, Linienkoordinaten usw.); 2) nach dem Koordinatenfelde (Koordinaten in der Ebene, im Raum, auf einer krummen Linie oder Fläche usw.); 3) nach der Anzahl der zur Bestimmung eines Elementes nötigen

— Viele allgemeine analytisch-geometrische Untersuchungen, wie *Lies* Gruppentheorie, beziehen sich nur auf Zahlenmannigfaltigkeiten; auf geometrische Mannigfaltigkeiten werden sie erst anwendbar, nachdem man Koordinaten eingeführt hat (*F. Lindemann,* Anmerkungen zu *H. Poincaré*, Wissenschaft u. Hypothese, Leipzig 1904, p. 275). Vgl. noch *G. Combebiac*, Sur les représentations numériques des ensembles, Bull. soc. math. France 34 (1906), p. 227—229.

10) Hingegen ist in der Astronomie und Geodäsie die Lagenbestimmung oft der Hauptzweck der Koordinaten.

11) Solche Beziehungen sind in der Folge: Entfernung zweier Punkte, Winkel zweier Geraden oder Ebenen, Rauminhalt eines Tetraeders, gemeinsame Potenz zweier Kugeln, Inzidenz von Punkt und Ebene, Apolarität zweier algebraischen Flächen usw.

12) Vgl. *F. Klein*, Vergl. Betr., p. 38.

13) Vgl. hierzu: *N. Druckenmüller,* Übertragungsprinzipien, § 2.

Koordinaten oder 4) nach der Transformationsgruppe, gegenüber der das Koordinatensystem invariant ist.

Im folgenden haben die ersten beiden Gesichtspunkte vor allem Berücksichtigung gefunden.

I. Punktkoordinaten.

2. Parallelkoordinaten (Cartesische Koordinaten) in der Ebene. Die Grundlage für die Definition aller in diesem Artikel behandelten Koordinaten bildet hier (und auch sonst gewöhnlich[14])) das Postulat (*Cantor*sches Axiom)[15]), daß zu jedem Punkt einer Geraden[15a]) eine eindeutig bestimmte positive oder negative (rationale oder irrationale) Zahl, die *Entfernung* oder der *Abstand* des Punktes von einem fest gewählten Punkt O dieser Geraden, und umgekehrt zu jeder solchen Zahl ein bestimmter Punkt der Geraden gehöre, dessen Abstand von O durch diese Zahl angegeben wird. Der der positiven Einheit zugehörige Punkt E (*Einheitspunkt*) ist Endpunkt der *Einheitsstrecke* OE, auf welche die Maßzahlen aller übrigen Strecken der Geraden bezogen gedacht sind. Dem uneigentlichen (unendlichfernen) Punkt der Geraden ist die Zahl ∞ (mit oder ohne Vorzeichen[15b])) zugeordnet. Man nennt diese einem jeden Punkte der Geraden zugeordnete Zahl seine (*Abstand-*)*Koordinate*[16]) oder *Abszisse*[21]) bezüglich des *Anfangs-*

---

14) *F. Klein*, Anwendungen d. Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision der Prinzipien. Autogr. Vorl. (Sommers. 1901) ausgearb. von *C. Müller*, Leipzig 1902, p. 17; *F. Schur*, Anal. Geom., p. 6.

15) Vgl. I A 3, *Pringsheim*, Nr. 4 u. III AB 1, *Enriques*, Nr. 7. Dieser hier postulierte Satz läßt sich aus verschiedenen Gruppen von Axiomen deduzieren. Vgl. hierzu die Aufsätze von *O. Hölder*, „Die Axiome der Quantität u. die Lehre vom Maß", Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 1901, p. 1—64, und „Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden", Math. Ann. 65 (1908), p. 161—260, in welch letzterem insbesondere die Literatur dieses Gegenstandes auch kritisch beleuchtet wird.

15a) Alle in diesem Artikel angeführten geometrischen Gebilde sind als reell zu betrachten, solange nicht etwas anderes ausdrücklich bemerkt ist.

15b) Vgl. *Heffter-Koehler* 1, p. 31. Es liegt hier noch keine Notwendigkeit vor, nur *einen* unendlichfernen Punkt zu adjungieren.

16) Der Begriff dieser Koordinaten auf der Geraden rührt wohl von *F. Vieta* (Opera math., ed. von *F. van Schooten*, Lugd. Batav. 1646, p. 45) her; erläutert werden sie von *L. Euler*, Introd. 2, p. 1—2. Die analytische Geometrie in der Geraden sowie in den übrigen Grundgebilden 1. Stufe behandelt systematisch wohl zum ersten Male *R. Baltzer*, Anal. Geom., Kap. I, wenn auch schon vorher *W. Fiedler* projektive Koordinaten (Nr. 5) für die verschiedenen Grundgebilde eingeführt hatte; seinem Beispiel folgen die neueren Lehrbücher, wie z. B. *L. Raschi*, Geometria analitica alle coordinate, Parma 1891; *P. Muth*, Grundlagen, § 1, 2; *E. d'Ovidio*, Geometria analitica, Torino 1896 (auch: Teoria anal.

punktes, Nullpunktes oder *Ursprungs* O („origo"). Die Punkte O und E bilden (zusammen mit dem uneigentlichen Punkt der Geraden) die Basis dieses Koordinatensystems.

Von einem komplexen Zahlenwert sagt man, er bestimme einen *imaginären* oder *komplexen Punkt*[17]) der Geraden.

Schreibt man die Abszisse eines Punktes in der Form $\frac{x}{t}$, so sind (x, t) *homogene Abstandkoordinaten* (Nr. 1) dieses Punktes[17a]); $(x, 0)$, wo x irgend eine von Null verschiedene Zahl bezeichnet, sind die homogenen Koordinaten des unendlichfernen Punktes der Geraden. Erst hier wird es erforderlich, *einen* unendlichfernen Punkt zu postulieren.

Eine nicht homogene Gleichung $f(x) = 0$ bestimmt, indem man ihre Wurzeln als Abszissen von Punkten betrachtet, eine *Punktgruppe* auf der Geraden; $f(x) = 0$ heiße die *Gleichung der Punktgruppe*[17b]).

Wählt man in der Ebene zwei sich im Punkte O (dem *Koordinatenursprung* oder *Koordinatenanfangspunkt*) schneidende feste Gerade OX, OY, die *Koordinatenachsen*[18]), und auf jeder von ihnen eine positive Richtung[19]), und schneiden die durch irgend einen Punkt P

---

delle forme geom. fond., Torino 1885); *F. Amodeo,* Geometria proiettiva, Napoli 1905; *G. Castelnuovo*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva, 1, 2, Roma-Milano 1904, 1905; *O. Staude*, Anal. Geom.; *J. Thomae*, Grundr. e. anal. Geom. d. Ebene, Leipzig 1906, und insbesondere *Heffter-Koehler* 1.

17) *E. Study*, Math. Ann. 63 (1907), p. 241. — Wegen der geometrischen Deutung dieser Punkte vgl. *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 19; *O. Stolz,* Math. Ann. 4 (1871), p. 471 f.; Ber. d. naturw.-medic. Ver. Innsbruck 19 (1890), p. 3—7; *F. August*, Unters. üb. d. Imag. in der Geom., Progr. Friedrichs-Realsch. Berlin 1872; *F. Klein*, Nachr. Gött. Ges. 1872, p. 374—379 = Math. Ann. 22 (1883), p. 242—245. Siehe auch III AB 4a, *Fano*, Nr. 14, 15. Zur Geschichte der imaginären Elemente in der Geometrie vgl. *A. Ramorino*, G. mat. 35 [(2) 4] (1897), p. 242—258; 36 [(2) 5] (1898), p. 317—345.

17a) *Heffter-Koehler* 1, p. 63 nennen sie *Hesse*sche Koordinaten.

17b) Nach *O. Staude,* Anal. Geom., p. 441, Anm. 120, benutzt sie schon *L. Euler.* Die Untersuchung der Eigenschaften algebraischer Punktgruppen unter Zugrundelegung der homogenen Gleichung $f(x, t) = 0$ bildet den Hauptgegenstand der Invariantentheorie binärer Formen (I B 2, *Meyer*).

18) *H. Graßmann*, J. f. Math. 24 (1842), p. 264 = Ges. Werke 2^1, p. 6, und Ausdehnungsl. v. 1844, § 87 = Ges. Werke 1^1, p. 151, sagt *Richtachsen* (für die Koordinatenstrecken *Richtstücke*), *K. Zindler* (Anm. 1) *Zeigerachsen.*

19) Bei *R. Descartes* (Anm. 28) und seinen Nachfolgern fehlt die Berücksichtigung des Vorzeichens der beiden Koordinaten sowie deren Gleichberechtigung. Es tritt gewöhnlich nur die Abszissenachse, der Ursprung und die Richtung der Ordinaten auf. Vollkommene Klarheit in diesen Beziehungen herrscht bei *L. Euler,* Introd. 2, p. 4 f. Vgl. hierzu *G. Loria,* Verh. d. III. intern. Math.-Kongr., Leipzig 1905, p. 567, 568.

der Ebene gelegten Parallelen zu OY und OX auf OX bzw. OY die Punkte P' und P'' aus, so heißen die gerichteten Strecken[20]) OP' und OP'' oder deren gewöhnlich auf dieselbe Einheitstrecke (vgl. jedoch Anm. 21[a]) bezogenen Längenzahlen die *Parallel-* oder *Cartesischen Koordinaten* des Punktes P. Zur Unterscheidung nennt man eine der Achsen, etwa OX, *Abszissen-*, die andere, OY, *Ordinatenachse* und die in ihnen gemessenen Koordinaten x und y bzw. *Abszissen* und *Ordinaten*[21]).

---

20) *R. Descartes* (Anm. 28) und seine Nachfolger rechnen mit Strecken, nicht mit Zahlen, was erst etwa seit *A. M. Legendre* allgemein gebräuchlich wurde, obgleich man diese Ansicht schon bei *I. Newton* trifft (vgl. *O. Stolz*, Größen u. Zahlen, Leipzig 1891, p. 12, 13). In *G. S. Klügel*, Mathematisches Wörterbuch, 1[1], Leipzig 1803, p. 556, werden die Koordinaten als „gerade Linien" (d. h. Strecken) erklärt. Vgl. auch *J. B. Biot*, Géom. anal. (1805). *Descartes* wichtigster Schritt über die Alten hinaus bestand darin, daß er unter Einführung der Einheitstrecke das Ergebnis der Multiplikation und Division von Strecken wieder als Strecke darstellte, wodurch jeder rationale Ausdruck geometrisch deutbar wurde. Allen Gliedern eines ganzen rationalen Ausdrucks kann durch Multiplikation mit entsprechenden Potenzen der Einheitstrecke dieselbe Dimension erteilt werden (La Géométrie, Œuvres de *Descartes*, 6, p. 371 f. In der systematischen Anwendung der Algebra auf Geometrie hatte *Descartes* in *M. Ghetaldi* (1566—1627) einen Vorgänger, über dessen Werk „De resolutione et compositione mathematica" man den Aufsatz von *E. Gelcich*, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), Suppl. (Abh. Gesch. d. Math. 4. Heft), p. 191—231, vergleiche.

In neuerer Zeit rückte *Fr. Schur*, Anal. Geom., p. 6—13, die Auffassung der Koordinaten als Strecken in den Vordergrund, indem er auf Grund des Archimedischen Axioms das Rechnen mit Strecken strenger begründete. Für elementar-geometrische Betrachtungen fällt dann die Voraussetzung des obigen Postulates weg. Ohne Benutzung des Archimedischen Axioms führt *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, § 14, eine den gewöhnlichen Rechnungsgesetzen folgende Streckenrechnung ein.

21) Bei *I. Newton*, *G. Cramer* und selbst bei *L. Euler*, Introd. 2, p. 7, noch *Applikaten*. Nach *R. Baltzer*, Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 17 (1865), p. 5, 6, treten die Namen *Abszisse* und *Ordinate* ohne weitere Erklärung bei *G. W. Leibniz* (Brief an *Oldenburg* v. 27. Aug. 1676 = *Leibniz*ens math. Schriften, herausg. v. *C. I. Gerhardt*, 1. Abt., 1, London-Berlin 1850, p. 114) auf. *Newton* hat zwar auch das Wort *Abszisse* in der modernen Bedeutung gebraucht, aber noch nicht in den „Prinzipien". Der Name *Koordinaten* rührt ebenfalls von *Leibniz* her (Acta Erud. Lips. 1692, p. 170 = *Leibniz*ens math. Schriften, herausg. v. *C. I. Gerhardt*, 2. Abt., 1, Halle 1858, p. 268). In *R. Descartes*, Géométrie, Leyden 1637, finden sich diese Namen noch nicht; „appliquée par ordre" steht in der *Apollonius*schen Bedeutung (ordinatim applicatae) von parallelen Sehnen eines Kegelschnittes. In *P. Fermats* „Isagoge" (Anm. 29) wird applicata bereits freier gebraucht. *Lineae ordinatae* hießen irgend welche parallelen Linien schon bei den römischen Feldmessern (*M. Cantor*, Vorl., 1 (2. Aufl.), p. 515) und auch die Wortverbindung *ordinatim applicata* ist (ebenda 2 (2. Aufl.), p. 812) in einem

Als *Basis* (Nr. 1) dieses Koordinatensystems können betrachtet werden die beiden Achsen OX, OY und der die Koordinaten $(+1, +1)$ besitzende *Einheitspunkt*[21a]) E, dessen Annahme die Wahl der positiven Einheitstrecken auf den Achsen vertritt. Bei gleichlangen Einheitstrecken soll das Koordinatensystem *gleichschenklig* heißen[21a]).

Den eigentlichen Punkten der Ebene werden auf diese Weise die reellen endlichen Zahlenpaare x, y eineindeutig und stetig zugeordnet. Schreibt man diese Koordinaten in der Form $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$, so sind x, y, t *homogene Parallelkoordinaten*[22]) des Punktes. $t = 0$ entsprechen, wenn nicht x und y gleichzeitig verschwinden, die uneigentlichen oder unendlichfernen Punkte der Ebene (vgl. Anm. 42).

Seit *K. F. Gauß* und *A. L. Cauchy*[23]) denkt man sich das Gebiet der reellen Punkte der Ebene gewöhnlich noch durch das der kom-

---

1615 herausgegebenen Werke *Keplers* gebraucht. Vgl. zur Geschichte dieser Fachwörter *Tropfke* 2, p. 425—427.

Die Bezeichnung der Koordinaten mit x, y stammt von *R. Descartes* (Oeuvres 6, p. 383); *Fermat* wie *Vieta* verwendeten hierzu Vokale. Die Verwendung von Abszisse und Ordinate zur Lagenbestimmung beliebiger Punkte und damit zur analytischen Behandlung der ganzen ebenen Geometrie tritt erst bei *L. Euler*, *J. L. Lagrange* und insbesondere *G. Monge* klar hervor. Für *Descartes* und seine Nachfolger sind x, y immer Strecken, die mit den Punkten einer Kurve zusammenhängen.

Den Ausdruck *Parallel*koordinaten gebraucht besonders *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., 1835. *O. Staude*, Anal. Geom., p. 49, nennt sie auch *gemeine* Koordinaten.

21a) Bei den im Text erwähnten Koordinaten gehört E einer der Symmetralen der Koordinatenachsen an. Wird E außerhalb dieser Geraden und außerhalb der Achsen beliebig im Endlichen gewählt, so sind die Einheiten für die Messung der Koordinatenstrecken verschieden. *Heffter-Koehler* 1, p. 202, 244 Fußn., nennen letztere Koordinaten *allgemeine*, erstere *gleichseitige Parallelkoordinaten*; im Text wird der in der darstellenden Geometrie in gleichem Sinne übliche und anschaulichere Ausdruck *gleichschenklig* gebraucht. Wegen Einführung des Einheitspunktes siehe Anm. 147.

22) Vgl. Nr. 1 und Anm. 60—64. Setzt man $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so sind auch $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{1}{r}$ oder, wenn φ den Winkel bezeichnet, den der Halbstrahl OP mit der positiven X-Achse bildet, $\xi = \cos\varphi$, $\eta = \sin\varphi$, $\tau = \frac{1}{r}$ homogene Koordinaten des Punktes P. Sie behandelt *Fr. W. Frankenbach*, Üb. e. neues Koord.-System (Diss. Rostock), Riga 1869.

23) *A. Brill* und *M. Noether*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 294. Übrigens werden schon von *L. Euler*, Introd. 2, p. 9 f., komplexe Koordinatenwerte in Betracht gezogen. Vgl. auch die Bemerkungen III AB 4a, *Fano*, Nr. 7, Anm. 21, sowie *A. Ramorino*, G. mat. 35 (1897), p. 244 f.

plexen Punkte erweitert, von denen jeder durch ein Paar komplexe Zahlen x, y oder ein Tripel $x:y:t$ definiert ist[17]).

Die angeführte Art, die Lage eines Punktes in der Ebene zu bestimmen, wurde schon von den Feldmessern der Alten benutzt[24]); *Apollonius* und *Archimedes* haben sie zur Definition und Untersuchung geometrischer Figuren verwendet[25]), ja *Nicole Oresme* (ca. 1320—1382) stellte bereits Naturerscheinungen kurvenmäßig dar[26]). Die Bedeutung dieser Methode trat aber erst hervor, als man, im Besitze der Algebra, mit den Koordinaten rechnen konnte[27]). Als Erfinder dieser Methode gilt gewöhnlich *R. Descartes*[28]); jedoch war sie auch, und zwar vor dem Erscheinen von *Descartes'* „Géométrie", *P. Fermat*[29]) bekannt.

24) Vgl. *Tropfke* 2, p. 407 f.

25) *H. G. Zeuthen*, Kegelschn., p. 78. Bezüglich der hierbei verwendeten „geometrischen Algebra" siehe p. 7. — *M. Chasles*, Ap. hist., Note III, p. 276, ist der Ansicht, daß *Euklids* Lehre von den „Porismen" die analytische Geometrie der Alten war.

26) „Tractatus de latitudinibus formarum", mehrfach gedruckt, z. B. Padua 1482. *Latitudo* heißt die eine Erscheinung (= *forma*, z. B. Bewegung, Wärmeänderung) darstellende Strecke, *longitudo* diejenige, von der die forma abhängig gedacht wird. Näheres darüber bei *M. Curtze*, Zeitschr. Math. Phys. 13, Suppl. (1868), § 14; ferner „Die mathem. Schriften d. *N. Oresme*", Berlin 1870, insbes. p. 11. Vgl. auch *L. Gegenbauer*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 12 (1903), p. 327; *H. Hankel*, Zur Geschichte d. Mathem. in Altertum u. Mittelalter, Leipzig 1874, p. 351 Fußn.; *Tropfke* 2, p. 409, 410.

27) Über die Entwicklung der *algebraischen Geometrie* vgl. *Tropfke* 2, p. 410—414.

28) *Réné Descartes du Perron* (1596—1650), latinisiert *Cartesius*. Sein für die Entwicklung der Koordinatenmethoden grundlegendes Werk *La Géométrie* erschien ohne Angabe des Verfassers Leyden 1637 in französischer Sprache als Anhang zu den „Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences". Neuabdrucke davon erschienen 1728, 1886, 1894; ferner ist sie enthalten in den *Œuvres de Descartes*, éd. *V. Cousin*, 5, Paris 1824, p. 309—428, und, der Originalausgabe völlig entsprechend, in den *Œuvres de Descartes*, publiées par *Ch. Adam* et *P. Tannery*, 6, Paris 1902, p. 367—485. — *Franciscus van Schooten d. Jüng.* veranstaltete Leyden 1649 die Ausgabe einer lateinischen Übersetzung und ihr folgte Amsterdam 1659 ein erneuter Abdruck mit zahlreichen Ergänzungen von verschiedenen Verfassern (Fr. van Schooten, Florimond de Beaune, Johannes Hudde, Heinrich van Heuraet, Johannes de Witt) in zwei Bänden (die unter Mathematikern verbreitetste Ausgabe!). — Eine deutsche Übersetzung von *L. Schlesinger* erschien Berlin 1894. Vgl. die Charakteristik dieses Werkes bei *M. Cantor*, Vorl. 2 (2. Aufl.), p. 793 ff., 811 ff.

29) „Ad locos planos et solidos isagoge"; Varia opera mathematica *D. Petri de Fermat*, Tolosae 1679, p. 2—11; Œuvres de *Fermat*, publiées par les soins de *P. Tannery* et *Ch. Henry*, 1, Paris 1891, p. 91—110, und in französischer

Den hohlen Winkel ω ($0 < \omega < 180^0$), den die positiven Koordinatenhalbachsen begrenzen (dem also der Einheitspunkt angehört), nennt man den *Koordinatenwinkel.* Je nachdem $\omega \neq 90^0$ oder $\omega = 90^0$ ist, heißen Koordinatensystem und Koordinaten *schiefwinklig* bzw. *rechtwinklig* oder *orthogonal.*

Der Sinn, in dem sich die Halbachse der positiven Abszissen drehen muß, um den Koordinatenwinkel zu durchlaufen, wird vorteilhaft als der *positive Drehsinn*[30]) der Ebene gewählt und die Vorzeichenbestimmung für Winkel und Flächen in der Ebene[31]) darauf gegründet, so daß Gebilde ihren Sinn ändern, sobald der Sinn des Koordinatenwinkels geändert wird. Die Basen zweier rechtwinkligen Koordinatensysteme in der Ebene, mit gleichen Einheitstrecken, lassen sich durch eine Bewegung in der Ebene oder durch eine solche Bewegung unter Hinzunahme einer Umwendung der Ebene zur Deckung bringen, je nachdem sie denselben oder entgegengesetzten Drehsinn bestimmen (*gleich-* oder *gegensinnig, gleich* oder *entgegengesetzt orientiert* sind).

Das allgemeine (Anm. 21[a]) schiefwinklige Parallelkoordinatensystem ist invariant (Nr. 1) gegenüber den affinen, das rechtwinklig-gleichschenklige invariant gegenüber den äquiformen (Ähnlichkeits-) Transformationen der Ebene. Ersteres wird daher das naturgemäße Koordinatensystem zur analytischen Behandlung der *affinen*, letzteres zur analytischen Behandlung der *äquiformen Geometrie* in der Ebene bilden[32]).

Übers. 3 (1896), p. 85—101. Vgl. die Charakteristik dieses Werkes bei *M. Cantor*, Vorl. 2 (2. Aufl.), p. 817 ff. — *Fermats* Bekanntschaft mit der analytisch-geom. Methode vor dem Erscheinen der „Géométrie" beweist der Brief an *Roberval* vom 22. Sept. 1636 (Oeuvres 2 (1894), p. 74). Vgl. auch Oeuvres 1, p. 91, Fußn. 1. Wenn auch bei der letzten Niederschrift der „Isagoge", wie sie in den Varia opera erschienen ist, dem Autor *Descartes*' Géométrie bekannt war, so geht sie doch in wesentlichen Dingen weit über *Descartes* hinaus. Vgl. hierzu auch *S. Günther*, Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Koordinatenprinzips, Abh. Naturf. Ges. Nürnberg 6 (1877). Italien. Übersetzung von *G. Garbiero*, Bull. bibl. storia Boncompagni 10 (Rom 1877), p. 363—406; *Tropfke* 2, p. 417—419. — Wegen der Entwicklung d. anal. Geometrie vgl. *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 76, 77; *Tropfke* 2, p. 421—425; *G. Loria*, Anm. 19, p. 562—574.

30) Es ist heutzutage ziemlich allgemein üblich, in Erläuterungsfiguren zu analytisch-geometrischen Untersuchungen die Achsen so zu orientieren, daß der positive Drehsinn der Ebene für den Beschauer dem Drehsinn des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint. Die Rechnung muß von dieser Wahl völlig unabhängig sein.

31) Vgl. Anm. 71.

32) *Heffter-Koehler* 1, p. 15, 255. Vgl. auch III A B 4b, *Fano*, Nr. 4, 7. — Für bestimmte Zwecke erweist sich eine besondere Lage der Koordinatenbasis gegenüber gegebenen Gebilden als vorteilhaft. *G. Schirdewahn*, Sitzungsber. Berlin

Bezeichnet $f(x)$ eine gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen (II A 1, *Pringsheim*, Nr. **11**) genügende Funktion und betrachtet man $f(x) = y$ in einem Parallelkoordinatensystem als Ordinate eines Punktes mit der unabhängig veränderlichen Abszisse x, so werden dadurch die Punkte einer *Kurve*[33]) (eines Kurvenstückes) bestimmt. Man nennt $y = f(x)$ die *Gleichung der Kurve*. Sie kann auch in der impliziten Form $F(x, y) = 0$ [34]) gegeben sein oder es können auch x und y als ebensolche Funktionen eines Parameters t:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

oder als Funktionen von n Parametern[35]) dargestellt werden, zwischen denen $n - 1$ unabhängige Gleichungen bestehen[36]).

Ist umgekehrt eine Kurve durch ein geometrisches oder mechanisches Gesetz definiert, das in eine Rechenvorschrift transformiert werden kann (II A 1, *Pringsheim*, Nr. 5), so entspricht ihr eine Gleichung $y = f(x)$. Hingegen läßt sich eine *willkürlich gezeichnete* Kurve immer nur näherungsweise durch eine Funktion darstellen. Sie bebestimmt nach *F. Klein*[37]) einen *Funktionsstreifen*.

Den Hauptgegenstand der *analytischen Geometrie*[38]) (*Koordinaten-*

Math. Ges. 4 (1905), p. 16—20 (beigeg. Arch. Math. Phys. (3) 9 (1905)), z. B. wählt für Zwecke der Dreiecksgeometrie die Achsen als Asymptoten einer einem gegebenen Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbel.

33) Die Idee, daß eine Gleichung zwischen den Parallelkoordinaten eines Punktes eine Linie in der Ebene bestimme, stammt von *R. Descartes*, La Géométrie, Oeuvres 6, p. 336, 392. Vgl. hierzu auch die Anm. 25, 29.

Welches die hinreichenden Bedingungen sind, damit $y = f(x)$ eine Kurve im gebräuchlichen Sinne darstelle, ist eine offene Frage. Vgl. III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **1**—**11**; III A B 4a, *Fano*, Nr. 40; III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. **2**.

34) Ist die Funktion in x und y homogen, so stellt sie ein System von geraden Linien durch den Ursprung dar.

35) Der Gebrauch dieser erweiterten Bedeutung des Wortes „Parameter" geht auf *Leibniz* zurück. Vgl. *Tropfke* 2, p. 427. Parameterdarstellungen von Kurven benützt *G. Cramer*, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750, p. 34, die der Geraden in der Ebene und im Raum gebraucht *A. L. Cauchy*, Appl., p. 16.

36) Vgl. hierzu *G. Loria*, Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 45 f.; *C. Briot* u. *J. C. Bouquet*, Leçons de géométrie analytique, 14e éd. par *Appell*, Paris 1893, p. 96—100; *G. Castelnuovo*, Lezioni di geom. anal. e proiettiva 1, Roma-Milano 1904, p. 239.

37) Sitzungsber. phys.-med. Soc. Erlangen 1873 = Math. Ann. 22 (1883), p. 249—259. S. auch *M. Pasch*, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1882, p. 13 und Math. Ann. 30 (1887), p. 131; ferner III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **10**.

38) Der Name *Géométrie analytique* tritt im modernen Sinn zuerst bei *S. F. Lacroix*, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Paris 1797—

geometrie) der Ebene bildet die Untersuchung der durch algebraische oder allgemeiner analytische Funktionen definierten Kurven[39]).

Bezeichnet in der Gleichung

$$(2) \qquad F(x, y) = 0$$

F eine nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, so nennt man die dadurch bestimmte Kurve eine *algebraische Kurve n^{ter} Ordnung*[40]). Die einfachste Kurve in diesem Sinn ist die durch eine lineare Gleichung

$$(3) \qquad G \equiv Ax + By + C = 0$$

1800, für „Application de l'algèbre à la géométrie" auf, der im Sinne von *Lagranges* Mécanique analytique die Konstruktionen aus der Geometrie möglichst zu verbannen suchte. Vgl. *R. Baltzer,* Anal. Geom., p. 76; *F. Müller,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 13 (1904), p. 252; *G. Loria*, Verh. d. III. intern. Math.-Kongr., Leipzig 1905, p. 572.

Zur allgemeinen Verbreitung dieser Disziplin hat das Lehrbuch von *J. B. Biot,* Géom. anal., viel beigetragen (vgl. *J. Plücker*, Entw. 2, p. III). Wegen ihrer historischen Entwicklung vgl. außer den eben angeführten Arbeiten noch *Tropfke* 2, p. 407—425, und *M. Cantor*, Vorl. 4, p. 451—576 (von *V. Kommerell*).

39) Nach den Methoden der analytischen Geometrie sind auch elementargeometrische Fragen über Winkel, Entfernungen, Flächen- und Rauminhalte vielfach behandelt worden. Hier sei nur erwähnt *J. L. Lagrange,* Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, Nouv. Mém. Ac. Berlin 1773, p. 149—177 = Oeuvres 3 (Paris 1869), p. 661—692; *M. Reiß,* Essai analytique et géométrique, Corr. math. phys. 10 (1838), p. 229—290.

Eine eigenartige analytisch-geometrische Behandlung der Polygonometrie (in der Ebene und im Raum) findet sich in dem wenig bekannten Werke *G. B. Magistrini,* Poligonometria analitica, Bologna 1809. — *Chr. Dopplers* „Versuch einer analyt. Behandlung beliebig begrenzter und zusammengesetzter Linien, Flächen u. Körper", Prag 1839 (= Abh. Böhm. Ges. Prag (5) 1 (1840), worin mit Gleichungen operiert wird, für welche die Bereiche der unabhängigen Variabeln begrenzt sind, geht über formale Festsetzungen kaum hinaus und scheint keine Weiterbearbeitung erfahren zu haben. — *H. Gergonne,* Ann. math. p. appl. 17 (1827), p. 134—137, und *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 24 (1847), p. 886 = Oeuvres (1) 10, p. 293, weisen auf die Bestimmungen geometrischer Örter durch Ungleichungen hin. Wegen Verwendung ganzzahliger oder rationaler Koordinaten (in der Ebene und im Raum) zur geometrischen Behandlung von Aufgaben der Zahlentheorie vgl. *F. Klein,* Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, 1, 2, autogr. Vorl., gehalten 1895—96, ausgearb. von *A. Sommerfeld* u. *Ph. Furtwängler,* Göttingen 1896, 1897; *H. Minkowski,* Geometrie der Zahlen, 1. Lief., Leipzig 1896, 2. Lief., 1910; Diophantische Approximationen, Leipzig 1907.

Andere Anwendungsgebiete der Koordinatengeometrie werden später (z. B. Nr. **24—26**, **27—30**, **35**) Erwähnung finden.

40) Die Einteilung der Kurven nach ihrer Ordnung stammt von *I. Newton* (vgl. *A. Brill* u. *M. Noether,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 119). Den Ausdruck „Ordnung" statt „Grad" im Gegensatz zur „Klasse" (Anm. 377) hat zuerst *J. Plücker*, Entw. 2, p. 2 Fußn., angewandt.

dargestellte *gerade Linie*[41]). Sie schneidet auf den Achsen die Stücke $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ ab. $A = 0$, $B = 0$ ordnet man die *unendlichferne* oder *uneigentliche Gerade*[42]) der Ebene zu, als Ort der unendlichfernen Punkte dieser. Sind die Verhältnisse der Koeffizienten A, B, C nicht sämtlich reell, so definiert die Gleichung eine *imaginäre* (*komplexe*) Gerade, insbesondere eine *Minimalgerade* (III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. **12**), wenn

$$A \neq B \quad \text{und} \quad A^2 + B^2 = 0.$$

Sie enthält einen einzigen reellen Punkt[17]).

Neben den Koordinaten von Punkten hat sich die Einführung der *Koordinaten gerichteter Strecken* (*Vektoren*) als vorteilhaft erwiesen. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Koordinaten zweier Punkte P_1, P_2, so heißen $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = y_2 - y_1$ nach *R. Baltzer*[43]) die Koordinaten der gerichteten Strecke $P_1 P_2$. Die Koordinaten zweier Strecken $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$ sind dann und nur dann gleich, wenn die Strecken durch eine Parallelverschiebung mit ihren Anfangspunkten P_1, Q_1 und ihren Endpunkten P_2, Q_2 zur Deckung gebracht werden können.

Für parallele Strecken ist das Koordinatenverhältnis konstant. Durch die Strecke (ξ, η) wird also ein *unendlichferner Punkt* bestimmt, von dem ξ, η *homogene Koordinaten*[44]) sind.

41) Die Gleichung der Geraden findet sich nicht in *Descartes*' Géométrie, sondern erst bei *Joh. de Witt*, Elementa curvarum linearum, abgedruckt in *Fr. van Schootens* lateinischer Ausgabe der *Géométrie* (Amsterdam 1659, vgl. Anm. 28) p. 243. Hingegen kannte und benutzte sie schon *P. de Fermat*, Ad locos planos isagoge, Oeuvres 1, p. 92, 93, und in franz. Übers. 3, p. 86, 87.

Wegen Ableitung der Gleichung der Geraden ohne Benützung des Archimedischen Axioms vgl. *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, § 17.

42) Vgl. *H. Beck*, Zeitschr. math. naturw. Unterr. 40 (1909), p. 130. Wegen Literatur betreffs der unendlichfernen Elemente s. *O. Staude*, Anal. Geom., p. 423, Anm. 17.

43) J. f. Math. 46 (1853, geschr. 1850); Anal. Geom., § 15. In anderer Form findet sich dieser Begriff schon bei *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1844, § 99 = Ges. math. phys. W. 1[1], p. 166, wo die Strecke als Differenz ihrer Endpunkte auftritt. Der Vektorbegriff selbst soll sich nach *K. Heun*, Lehrb. d. Mechanik 1, Leipzig 1906, p. 6, schon bei *L. Euler* finden. Operiert mit ihm vor *Graßmann* wird von *C. Wessel* und *J. R. Argand* (1806) (vgl. I A 4, *Study*, Anm. 10); *G. Bellavitis*, Ann. sc. Ist. Regno Lomb. Ven. 5 (1835), p. 244—259; 7 (1837), p. 243—261; 8 (1838), p. 17—37, 85—121; Mem. Ist. Ven. 1 (1843), p. 225—267 (vgl. auch die histor. Bemerkungen 19 (1876), p. 449—491); *A. F. Möbius*, Die Elemente d. Mechanik d. Himmels, Leipzig 1843. Vgl. ferner IV 2, *Timerding*, Nr. 1, 2, und wegen der Beziehungen zwischen *Bellavitis*, *Möbius* und *Graßmann* den Bericht über *Möbius*' Nachlaß, Ges. W. 4 (1887), p. 717 f.

44) *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 15, 3; *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 228 = Ges. math. phys. W. 1[2], p. 157.

Bezieht sich die Gl. (3) einer Geraden auf ein rechtwinklig-gleichschenkliges Koordinatensystem, so sind $\xi = B$, $\eta = -A$ die Koordinaten einer der Geraden angehörigen Strecke[45]) und $\xi = A$, $\eta = B$ die Koordinaten einer aus ihr durch Drehung um einen positiven rechten Winkel hervorgehenden Strecke. Erstere möge die *Richtstrecke,* letztere die *Normalenstrecke* der Geraden heißen. Der lineare Ausdruck G (Gl. 3) bestimmt also eine Gerade samt einem ihr angehörigen Vektor von der Länge $\sqrt{A^2 + B^2}$. Dieses von *H. Graßmann*[46]) unter dem Namen „Liniengröße" eingeführte Gebilde, auch *Stab, linienflüchtiger* oder *Punktvektor*[46]) genannt, verdient mehr Beachtung in der analytischen Geometrie[47]). Deutet man den Stab als Kraft, so stellt G das Drehmoment dieser Kraft (oder des Stabes) in bezug auf den Punkt (x, y) dar[48]). Dividiert man G durch den absoluten Wert von $\sqrt{A^2 + B^2}$, so nennt man den neuen Ausdruck Γ die *Hessesche Normalform*[49]) der Geraden. Ihre Richtstrecke hat nun

---

45) *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 28, 3, p. 163. Solche Verwendung gerichteter Strecken geht auf *H. Graßmann* (vgl. etwa: Geom. Analyse, Leipzig 1847, § 18 = Ges. W. 1[1], p. 300 f.) zurück und bringt, zumal bei gleichzeitiger Benutzung des äußeren und inneren Streckenprodukts, unmittelbare Klarheit in die hier auftretenden analytischen Ausdrücke. *C. Runge*, Anal. Geom., stellt diese Begriffe an die Spitze.

46) Ausdehnungsl. v. 1844, p. 163 = Ges. W. 1[1], p. 189; vgl. wegen der Benennungen *Stab* und *linienflüchtiger Vektor* IV 2, *Timerding*, Anm. 11. *H. Hankel*, Theorie der komplexen Zahlen, Leipzig 1867, p. 130, gebraucht dafür „*Geradenstück*" (und analog, p. 134, 135, *Ebenenstück* und *Raumstück*), französische Geometer (vgl. *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 1) heißen dieses Gebilde „segment". „point-vector" bei *E. W. Hyde*, The directional calculus, based upon the methods of Hermann Grassmann, Boston 1890, p. 1.

47) Vgl. jedoch *C. Runge*, Anal. Geom., § 10, 11; *F. Klein*, Elementarmath. 2, p. 42 ff.

48) *C. Culmann*, Graphische Statik, 2. Aufl., Zürich 1875, Nr. 39, p. 164. Bezeichnen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ lineare Ausdrücke, so stellt $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ die Resultierende der durch die Summanden bestimmten Kräfte dar. Wegen weiterer Beziehungen zwischen analytischer Geometrie und graphischer Statik vgl. Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 1—24. In anderer Form finden sich die Grundgedanken schon bei *Graßmann*; vgl. *E. Müller*, Neue Methode zur Ableitung der statischen Gesetze, Mitt. d. Technol. Gewerbe-Museums Wien (2) 3 (1893). p. 17—72.

49) Bezeichnen α, β die Winkel, welche die Strecke (A, B) mit den positiven Koordinatenhalbachsen einschließt, und p den *Abstand der Geraden vom Ursprung* (diesen Abstand also vom Ursprung aus nach der Geraden hin gemessen und als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem diese Richtung mit der der Strecke (A, B) übereinstimmt oder nicht), so ist $\Gamma \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta - p$. Diese Gleichungsform findet sich bei: *A. L. Cauchy*, Appl., p. 29 (analoge Gleichungsform der Ebene); *L. I. Magnus*, Aufg. u. Lehrs. 1, p. 15; *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 16

die Länge eins, Γ gibt also den Abstand des Punktes (x, y) von der Geraden[49a]) an.

Durch die Richtung der Normalenstrecke (A, B) soll die *positive Normalenrichtung* (die *positive Seite*, das *positive Ufer*[50])) der Geraden G angegeben werden. Diese Festsetzung ist nur vom Drehsinn des Koordinatensystems, nicht von der Lage der Koordinatenachsen in der Ebene abhängig und versagt (für eigentliche Gerade) nie. Hingegen ist die noch in den meisten Lehrbüchern[51]) angegebene, von *O. Hesse*[49]) stammende Festsetzung auch von der Lage des Koordinatenursprungs abhängig und versagt für die durch ihn gehenden Geraden. Auch die von *R. v. Lilienthal*[52]) vorgeschlagene Festsetzung der positiven Richtung einer Geraden hängt von der Lage des Koordinatensystems ab.

3. Parallelkoordinaten im Raum. Begriff des n-dimensionalen Raumes. Die *Parallelkoordinaten im Raum*, über die sich die ersten Andeutungen bei *R. Descartes*[53]) finden, deren allgemeine Verwendung aber erst durch *A. Cl. Clairaut*[73]) (1731) angebahnt wurde, lassen sich analog wie in der Ebene (Nr. 2) definieren.

(die analoge Gleichungsform der Ebene) und Vorles. Ebene, 3. Aufl., p. 15, hier mit zahlreichen Anwendungen. Von letzterem rührt die Bezeichnung *Normalform*.

49a) Die entsprechende Formel findet sich bei *E. Waring*, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus, Cambridge 1762, p. 101 f.; ferner die analoge im Raum angewandt bei *Monge* et *Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), p. 148, und entwickelt bei *G. Monge*, Application de l'analyse à la géométrie, Paris 1807, p. 11. — In schiefwinkligen Koordinaten *J. Plücker*, Entw. 1, p. 11, für die Ebene, *M. Chasles*, Ap. hist., p. 765, für den Raum. — Deutungen des Vorzeichens geben *J. Plücker* a. a. O., p. 12 und insbesondere *O. Hesse* a. a. O., p. 17. Nach diesem hat ein Punkt von der Geraden einen positiven oder negativen Abstand, jenachdem er mit dem Ursprung auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der Geraden liegt.

R. Baltzer, Anal. Geom., § 29, 3, setzt konsequenter $\Gamma \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta + p$; p bezeichnet dann den *Abstand des Ursprungs von der Geraden*.

50) *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 29, 3, 4.

51) Diese Festsetzung findet sich jedoch in dem hier angegebenen Sinn außer bei *Baltzer* z. B. noch bei *Weber-Wellstein*, Encykl. 2, § 58, Nr. 2; *O. Staude*, Anal. Geom., § 17, Nr. 4, und *C. Runge*, Anal. Geom., p. 16.

52) Math. Ann. 42 (1893), p. 495—504. Vgl. Anm. 99.

53) La Géométrie, Livre II, letzter Abschnitt = Oeuvres 6, p. 440. — Nach *H. G. Zeuthen*, Kegelschn., p. 422, hätte schon *Archimedes* bei seinen Untersuchungen der ebenen Schnitte von Kegeln und Drehflächen 2. O. räumliche Koordinaten verwendet. — Auch *De la Hire*, Les lieux géométriques, Paris 1679, p. 210, 215, stellt Raumkoordinaten auf, ohne auf ihre weitere Verwendung einzugehen. — Die erste Abhandlung über anal. Geom. d. Raumes hat *A. Parent* 1700 veröffentlicht. Vgl. Anm. 73.

Durch einen eigentlichen Punkt O (*Koordinatenursprung* oder *Koordinatenanfangspunkt*) lege man drei nicht durch dieselbe Gerade gehende Ebenen (*Koordinatenebenen*) und wähle auf jeder ihrer Schnittlinien OX, OY, OZ (*Koordinatenachsen*, zusammen: *Achsenkreuz*) eine positive Richtung. Schneiden die durch irgend einen Punkt P des Raumes parallel zu den Ebenen OYZ, OZX, OXY gelegten Ebenen die Koordinatenachsen OX, OY, OZ bzw. in den Punkten P_x, P_y, P_z, so heißen die gerichteten Strecken OP_x, OP_y, OP_z oder deren gewöhnlich auf dieselbe Einheitstrecke bezogene Längenzahlen x, y, z die *Parallel-* oder *Cartesischen Koordinaten* des Punktes P[54]). Auch bei Wahl verschiedener Einheitstrecken auf den Achsen heißt der Punkt E mit den Koordinaten $(+1, +1, +1)$ der *Einheitspunkt*[55]); seine Annahme vertritt die Wahl der positiven Einheitstrecken auf den Achsen. Das Achsenkreuz und der Einheitspunkt bilden die *Basis* (Nr. **1**) dieses Koordinatensystems, das wieder bei gleichlangen Einheitstrecken *gleichschenklig* heißen soll[21a]).

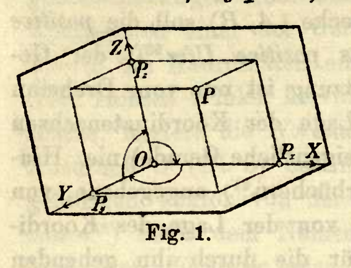


Fig. 1.

Jedem reellen Punkt des Raumes ist auf diese Weise ein reelles Zahlentripel x, y, z umkehrbar eindeutig und stetig zugeordnet[56]). Ein Tripel von Zahlen, unter denen mindestens eine komplex ist, definiert einen *komplexen* (*imaginären*) Punkt, das Tripel der konjugiert komplexen Zahlen den *konjugiert* komplexen Punkt[57]).

Schreibt man diese Koordinaten in der Form $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, so sind die vier Zahlen x, y, z, t die *homogenen Parallelkoordinaten* (Nr. **1**) des Punktes. Die Vorteile ihrer Verwendung bestehen darin, daß die Gleichungen von Flächen (und zwar nicht bloß von algebraischen) homogen (II B 1, *Osgood*, Nr. **49**) werden, also die Anwendung der Sätze über homogene Funktionen gestatten[58]), daß man zur Betrachtung

54) Vgl. hierzu die Anm. 18, 19, 20. Die heute allgemein übliche Bezeichnung von Punkten mittels ihrer Koordinaten in der Form (x, y, z) erwähnt ausdrücklich *A. L. Cauchy,* Appl., p. 16 Fußn.

55) Vgl. Anm. 21a.

56) Dabei ist zu beachten, daß für jede Zahl eines Tripels festgesetzt sein muß, welcher Achse sie zugeordnet ist. Eine solche Festsetzung fällt bei den in Nr. **11** behandelten Koordinatensystemen weg. Vgl. ferner Anm. 6.

57) Vgl. Anm. 17, ferner *P. Muth,* Grundlagen, § 6. Für *konjugiert* sagt zur Vermeidung von Mißverständnissen *J. Thomae,* Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung, Halle a. S. 1894, p. 79, *aggregiert; Heffter-Koehler* 1, haben diese Benennung neuerlich aufgenommen.

unendlichferner (uneigentlicher) Punkte bloß $t = 0$[59]) (x, y, z nicht gleichzeitig verschwindend) zu setzen braucht[60]) und für $t = 1$ es wieder mit gewöhnlichen Parallelkoordinaten zu tun hat. Homogene Koordinaten überhaupt wurden wohl zuerst von *A. F. Möbius*[60a]) und *J. Plücker*[61]) eingeführt, diese besonderen[62]) hauptsächlich von *O. Hesse*[63]) und *A. Cayley*[64]) vielfach verwendet.

Als positive Drehrichtungen in den Koordinatenebenen gelten gewöhnlich jene, durch die von den drei positiven Halbachsen OX, OY, OZ je zwei in dieser Reihe zyklisch folgende durch Drehung um einen hohlen Winkel zur Deckung gebracht werden[64a]).

Das *allgemeine* Parallelkoordinatensystem (Anm. 63) ist invariant gegenüber den affinen Raumtransformationen, bildet daher das naturgemäße Koordinatensystem zur analytischen Behandlung der affinen Geometrie[65]).

---

58) *J. Plücker,* J. f. Math. 5 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 154 f.; *N. Druckenmüller,* Übertragungsprinzipien, § 5.

59) Gleichung der unendlichfernen Ebene. Vgl. Anm. 42.

60) *E. Study,* Geom. d. Dynamen, p. 248, weist darauf hin, daß in dem durch die uneigentlichen Punkte erweiterten Punktkontinuum jedem Punkt ein bestimmtes Wertsystem der Verhältnisse $x : y : z : t$ und umgekehrt entspricht, wobei $x = y = z = t = 0$ ausgeschlossen ist. Je zwei Punkte dieses erweiterten Kontinuums können dann immer durch eine im Kontinuum verlaufende stetige Kurve so verbunden werden, daß für keinen ihrer Punkte die Koordinaten dem Wertsystem 0, 0, 0, 0 beliebig nahe kommen. In diesem erweiterten Kontinuum hat ferner jede unendliche Punktmenge Häufungsstellen; das Kontinuum ist also dann *abgeschlossen* (I A 5, *Schoenflies*, Nr. 11).

60a) Baryc. Calcul, I, Kap. 3 = Ges. Werke 1, p. 50 ff. Bei ihm fehlt jedoch noch die Verwendung homogener Gleichungen.

61) J. f. Math. 5 (1829), p. 1—36 = Ges. Abh. 1, p. 125; Entw. 2, p. 11, 12, insbesondere die Anmerkung auf p. 12; vgl. auch Ges. Abh. 1, p. 526 Fußn.

62) Sie finden sich bei *J. Plücker,* wenn man von der Andeutung Entw. 1, p. 12 absieht, erst im Syst. anal. Geom. (1835), Nr. 21 und wurden von ihm selten verwendet.

63) J. f. Math. 28 (1844), p. 104 = Werke, p. 132; Vorles. Raum, 6. Vorl., p. 60 f. *Hesse* war der erste, der in seinen Aufsätzen und Lehrbüchern zeigte, welche Eleganz in der Rechnung sich durch Verwendung homogener Koordinaten erreichen läßt. — *Heffter-Koehler* 1, p. 201 nennen obige homogene Koordinaten *Hesse*sche und zwar *allgemeine*, wenn die Einheitstrecken auf den Achsen beliebig sind, und *gleichseitige* (p. 230), wenn diese Strecken gleich lang sind.

64) The Quart. J. p. appl. math. 3 (1860), p. 225—236 = Math. pap. 4, Nr. 284; s. auch Anm. 197.

64a) *A. L. Cauchy,* Appl., p. 13.

65) Vgl. Anm. 32. — Schiefwinklige Koordinaten verwenden *Monge* et *Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), p. 147. Die ganze analytische Geometrie (inklusive Theorie der Raumkurven u. Flächen, zumal der Flächen 2. O.) behan-

Stehen die drei Koordinatenachsen aufeinander senkrecht, so heißt das Koordinatensystem *rechtwinklig* oder *orthogonal.* Nehmen wir es außerdem gleichschenklig an, so hat nicht nur das Schnittdreieck der unendlichfernen Ebene mit den Koordinatenachsen (Poldreieck des absoluten Kegelschnitts J), sondern auch der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie OE des Ursprungs und des Einheitspunktes zum Kegelschnitt J eine gegenüber *äquiformen* Raumtransformationen (III A B 4b, *Fano,* Nr. 4) invariante Lage. Das gleichschenklig-rechtwinklige Koordinatensystem bildet daher das naturgemäße Koordinatensystem zur analytischen Behandlung der *äquiformen Geometrie*[32]).

Die Erfahrung[66]) lehrt die Existenz zweier verschiedenen Arten rechtwinkliger Achsenkreuze. Zwei Achsenkreuze derselben Art lassen sich durch Bewegung so zur Deckung bringen, daß auch ihre *positiven Halbachsen* aufeinander fallen; zwei Achsenkreuze verschiedener Art lassen sich nur unter Zuhilfenahme einer Spiegelung an einer Ebene (nicht durch Bewegung allein) derart ineinander überführen. Unter Zugrundelegung der obigen Festsetzung der positiven Dreh-

---

delt mittels dieser Koordinaten *G. S. Ohm,* Beiträge zur Molekular-Physik 1, Grundriß der analytischen Geometrie im Raume am schiefwinkeligen Koordinatensysteme, Nürnberg 1849. Die Grundformeln wurden abgeleitet von *R. Baltzer,* J. f. Math. 46 (1853), p. 145—163 = Nouv. Ann. (1) 13 (1854), p. 5—25 (vgl. auch Anal. Geom., Kap. 8, 9), und auf umständliche Weise von *J. A. Grunert,* Arch. Math. Phys. 34 (1860), p. 121—248. Vgl. ferner *L. Ripert,* Nouv. Ann. (3) 19 (1900), p. 409—419; *L. Pilgrim,* Math.-naturw. Mitt. math.-naturw. Ver. Würt. (2) 9 (1907), p. 51—77, auch im Sonderabdruck: „Vereinfachte Behandlung der schiefwinkligen Koordinaten im Raum", Stuttgart 1909, erschienen. — *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 21 (1845), p. 305—316 = Oeuvres (1) 9, p. 253—265, leitet einige der Grundformeln unter Verwendung zweier *konjugierter* Achsenkreuze ab, bei denen nämlich die Achsen des einen auf den Ebenen des anderen senkrecht stehen. Bei *G. S. Ohm* a. a. O., p. 31 ff. bilden solche „Doppelsysteme" ein wesentliches Hilfsmittel seiner Untersuchungen. Solche Achsenkreuze benutzt auch *C. Cailler,* L'Enseign. math. 4 (1902), p. 273 f. — Als Beispiel für eine bestimmten Zwecken angepaßte Wahl der Koordinatenbasis seien die „coordonnées bimédianes" von *J. N. Haton de la Goupillière,* Nouv. Ann. (2) 4 (1865), p. 249 f., erwähnt. Die Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten eines Tetraeders bilden hier das Achsenkreuz für Parallelkoordinaten.

66) S. *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul. § 140 Anm. — *C. F. Gauß* schreibt an *Gerling* (23. Juni 1846; Werke 8, Leipzig 1900, p. 248): „Diesen Unterschied zweier Systeme von je drei geraden Linien kann man aber *nicht* auf Begriffe bringen, sondern nur aus dem Anhalten an *wirklich vorhandene* räumliche Dinge *vorzeigen.* Zwei Geister können sich nicht anders darüber verständigen, als daß sie ihre Anschauungen an ein und dasselbe in der wirklichen Welt vorkommende System knüpfen." Vgl. hierzu jedoch *Weber-Wellstein,* Encykl. 2, p. 110; *W. Killing* und *H. Hovestadt*[71]).

sinne in den Koordinatenebenen ist jedes rechtwinklige Achsenkreuz mit den beiden durch zyklische Vertauschung der Achsen daraus hervorgehenden gleichartig (*gleichsinnig*), mit jedem durch Vertauschung bloß zweier Achsen hervorgehenden ungleichartig (*gegensinnig*)[67]. Ergibt eine Drehung des Achsenkreuzes etwa um die Z-Achse im positiven Drehsinn der XY-Ebene in Verbindung mit einer Schiebung in der Richtung der positiven Z-Achse eine *Rechtsschraube*, so nennt man das Koordinatensystem ein *Rechtssystem* (oder *rechtshändiges* System), im entgegengesetzten Fall ein *Linkssystem* (oder *linkshändiges* System)[68]. Auf die Notwendigkeit, die Art des zugrunde gelegten rechtwinkligen Koordinatensystems zu beachten, wurde man wohl zuerst in der mathematischen Physik geführt[68]; sie drängte sich aber auch bei rein geometrischen

---

67) *L. I. Magnus*, Aufg. und Lehrs. 2, p. 56. Für schiefw. Koordinatensysteme bei *G. S. Ohm* a. a. O., p. 54—61.

68) *A. Föppl,* Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1894, p. 10; *right-handed* und *left-handed* bei *J. Cl. Maxwell,* A treatise on electricity and magnetism 1, Oxford 1873, p. 24 (deutsch von *B. Weinstein,* Berlin 1883, p. 25), der sie auch als die Systeme des *Weins* und des *Hopfens* bezeichnet, weil die Ranken dieser Pflanzen rechts bzw. links gewunden sind. Die beste Vorstellung von einer Rechtsschraubung liefert uns (nach *Maxwell*) die Bewegung der rechten Hand beim Vorwärtsstoßen und gleichzeitigen ungezwungenen Drehen (d. h. Drehen der Oberseite auf dem kürzesten Wege nach außen hin). Über diese Festsetzungen scheint unter den Geometern noch keine Einigkeit zu bestehen; vgl. z. B. die gegenteilige Definition bei *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 158. Auch die Botaniker definieren rechts und links gewunden entgegengesetzt wie oben; Hopfen heißt bei ihnen rechts gewunden. Nebengezeichnete Figur stellt, wenn OX und OZ in der Zeichenebene liegend gedacht werden, ein Rechtssystem oder Linkssystem vor, jenachdem OY im Raum hinter oder vor der Zeichenebene (mit dem Beschauer zu verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Zeichenebene) liegt. Die Ausdrücke „rechts-" und „linkshändig" erklären sich auch so, daß die X-, Y- und Z-Achse bei diesen Achsenkreuzen so liegen wie der ausgestreckte Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten bzw. linken Hand. (Vgl. *F. Klein,* Elementarmath. 1, p. 156.) In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie werden gewöhnlich Linkssysteme (*französische* S.) zugrunde gelegt gedacht. *C. Maxwell* hat a. a. O. nach dem Vorbilde von *Thomson* u. *Tait* das mit dem System der Astronomen übereinstimmende Rechtssystem (*englisches* S.) vorgeschlagen, das auch mit dem gebräuchlichen Achsenkreuz in der Ebene (Anm. 30) in einfacherem Zusammenhang steht; vgl. *L. Prandtl,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 13 (1904), p. 39; *O. Staude,* Anal. Geom., p. 157, dehnt obige Unterscheidung auf *schiefwinklige* Achsenkreuze aus und nennt (p. 158) Rechtssysteme *positiv*, Linkssysteme *negativ orientiert;* sie findet sich übrigens schon bei *G. S. Ohm* a. a. O., p. 58 (Systeme mit „ähnlichem" oder „unähnlichem Achsenlauf").

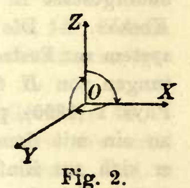


Fig. 2.

Untersuchungen z. B. bei denen über Krümmung von Flächen und Windung von Raumkurven auf[69]).

Alle mit Hilfe der Rechnung abgeleiteten Gesetze müssen unabhängig von der Art des zugrunde gelegten Achsenkreuzes sein[70]). Die zur Ersetzung der geometrischen Anschauung in die Formeln eintretenden relativen Raumgrößen definiert man daher am vorteilhaftesten mit Hilfe dieses Achsenkreuzes[71]). Die Richtungen des mensch-

---

69) *K. Peterson,* Über Kurven und Flächen, Moskau-Leipzig 1868, p. 4. — *O. Stolz,* Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 433—442; Rechts- und Linkssysteme werden hier Koordinatensysteme *erster* und *zweiter Art* genannt.

70) Dies findet sich klar auseinandergesetzt bei *C. Lange,* Beitrag z. anal. Geom. d. geraden Linie im Raume, Progr. Insterburg 1864, p. 4, 5.

71) Schon *C. F. Gauß,* Theoria motus corporum coelestium, Hamburg 1809, Art. 137 (deutsche Übers. von *C. Haase,* Hannover 1865) = Werke 7 (Leipzig 1906), p. 177, empfiehlt, die geometrischen Größen so zu definieren, „daß man nicht für die einzelnen verschiedenen Fälle auf besondere Figuren zu rekurrieren braucht", und führt dies, soweit es dort erforderlich, durch. Einiges findet sich bereits bei *L. N. M. Carnot,* Géométrie de position, Paris 1803, 1804 (deutsch von *H. C. Schumacher,* Altona 1808, 1810). Die heute gebräuchlichen Zeichenfestsetzungen stammen im wesentlichen von *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul, Leipzig 1827, §§ 1, 17—20, 165 Anm., und *A. L. Cauchy,* Appl., p. 11—42; Paris C. R. 21 (1845), p. 305—316 = Oeuvres (1) 9, p. 253—265; ersteres Werk *Cauchys* hat viel zur Verbreitung solcher genaueren Begriffsbestimmungen beigetragen. — Durchgehends angewendet finden sie sich bei *R. Baltzer,* Theorie u. Anwendung der Determinanten, Leipzig 1857 (5. Aufl. 1881), § 16—18; Elemente der Math. 2, Leipzig 1867 (2. Aufl.) und Anal. Geom. § 9, 10, 46; ferner eingehend auseinandergesetzt in den Lehrbüchern der anal. Geom. von *O. Staude* und *Heffter-Koehler.* — Die konsequente Bezugnahme auf das ursprüngliche Koordinatensystem zur Festsetzung der Vorzeichen (des Sinnes) findet sich in beiden Bearbeitungen von *H. Graßmanns* Ausdehnungslehre. Indem *O. Stolz,* Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 433—442, die Vorzeichenfestsetzungen wie *Cauchy* und *Möbius* an ein mit dem menschlichen Körper verbundenes Achsenkreuz knüpft, sieht er sich zur Einführung eines in den Formeln mitlaufenden Koeffizienten ε genötigt, der den Wert $+1$ oder -1 erhält, je nachdem das zugrunde gelegte Koordinatensystem ein Rechts- oder Linkssystem ist. Ein positiver Wert der Torsion in einem Punkt einer Raumkurve zeigt z. B. an, daß die Schraubung der Kurve an dieser Stelle identisch mit der einer Rechts- oder Linksschraube ist, je nachdem man ein Rechts- oder Linkssystem zugrunde gelegt hat. Vgl. auch Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 168—178. Hingegen wird mittels des ursprünglichen Achsenkreuzes das Vorzeichen der Torsion definiert in III D 1, 2, *v. Mangoldt,* Nr. 29, p. 75.

Wegen Vorzeichenbestimmungen in der (anal.) Geometrie vgl. ferner: *De Morgan,* Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 156—160; *E. Lucas,* Mathesis (1) 10 (1890), p. 5—8; *O. Stolz* u. *J. A. Gmeiner,* Theoretische Arithmetik, Leipzig 1902, p. 117—119, 329 f.; *F. Klein,* Elementarmath. 2, p. 5—41. — Über Abstände und Winkel komplexer Elemente vgl. *G. Marletta*, Rend. Circ. mat. Palermo 19 (1905), p. 120—128.

lichen Körpers (etwa Fuß-Kopfrichtung, Richtung nach vorne und Richtung des seitlich gestreckten linken Armes, oder Achsenkreuze gebildet aus Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten oder linken Hand usw.), auf die man der leichteren Vorstellbarkeit halber oft Bezug nimmt, sollen nur das an eine andere Stelle des Raumes bewegte ursprüngliche Koordinatenkreuz vertreten.

Alle Punkte des Raumes, deren Parallelkoordinaten x, y, z die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

erfüllen, wo F eine gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen genügende (meist analytische) Funktion bezeichnet[72]), gehören einer *Fläche*[73]) an, deren reelle Punkte auch bloß eine Kurve erfüllen oder vereinzelt auftreten können. Ist $F(x, y, z)$ homogen, so stellt die Gleichung eine Kegelfläche mit der Spitze im Ursprung dar[73]). Man nennt diese Gleichung oder (wenn $\frac{\partial F}{\partial z}$ nicht identisch verschwindet) die mit ihr äquivalente

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

die *Gleichung der Fläche*[73]). Allgemeiner lassen sich die Koordi-

---

Bezüglich der Postulate, auf denen die Sinnesfestsetzungen der geometrischen Gebilde beruhen, vgl. III AB 1, *Enriques,* Nr. 4, ferner *W. Killing* und *H. Hovestadt,* Handbuch des mathem. Unterrichts 1, Leipzig und Berlin 1910, p. 55 ff., 101 ff.

72) Vgl. *F. Klein*, Anm. 14, p. 172 f.; III A B 2, *v. Mangoldt,* Nr. 12. Welche Bedingungen die Funktion F erfüllen muß, damit Gl. (1) eine Fläche im gebräuchlichen Sinne darstelle, ist eine offene Frage.

73) Einer *Doppelserie von Punkten* nach *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 72.

Nach *M. Chasles,* Ap. hist., p. 138, war *A. Parent* (1666—1716) der erste, der 1700 die Gleichung einer Fläche aufstellte (Näheres bei *M. Cantor,* Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 418). Auch *Joh. Bernoulli* soll bei Behandlung des Problems der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten einer Fläche diese durch eine Gleichung zwischen drei Variabeln dargestellt haben. Daß er und *Leibniz* bereits am Ende des 17. Jahrh. im Besitze der Einsicht waren, eine krumme Fläche lasse sich durch eine Gleichung zwischen drei Koordinaten darstellen, geht aus ihrem Briefwechsel hervor; vgl. *P. Stäckel,* Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 1893, p. 448; hingegen auch *M. Cantor,* Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 418 f. und *Tropfke* 2, p. 423. Aber erst *A. Cl. Clairaut*, Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731 (vgl. die Besprechung dieses 1729 vollendeten Werkes eines 16jährigen bei *M. Cantor,* Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 779 f.), hat die Lehre von den Raumkoordinaten methodisch auf krumme Flächen und Raumkurven angewandt. Bei ihm findet sich auch schon (a. a. O., p. 15, Nr. 31) die Gleichung eines algebraischen Kegels mit der Spitze im Ursprung. Die wichtigste Weiterbildung erfuhr die analytische Geometrie des Raumes durch *L. Euler*, Introd. 2, Appendix de superficiebus, in

naten x, y, z eines Flächenpunktes als Funktionen zweier unabhängig veränderlichen Parameter u, v (III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **12**) oder als Funktionen von n Parametern darstellen, zwischen denen $n-2$ unabhängige Gleichungen bestehen.

Alle Punkte, deren Parallelkoordinaten zwei Gleichungen

$$(3) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0$$

genügen, erfüllen im allgemeinen eine *Raumkurve*[74]) (III A B 2, *v. Mangoldt*, Nr. **6**; III A B 4a, *Fano*, Nr. **21**), die auch, wenn λ_1, λ_2 Parameter bezeichnen, den ∞^1 Flächen $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$[75]) angehört. Oft stellt man durch Elimination je einer der Variabeln, y und z z. B., die Gl. (3) auch in der Form

$$(4) \qquad f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, z) = 0$$

dar. Sie geben die Projektionen der Raumkurve parallel zur Z- und zur Y-Achse auf die XY- bzw. XZ-Ebene[76]). Die Kurve erscheint dann als Schnitt zweier Zylinder. Bei Raumkurven, die nicht *vollständiger Schnitt* zweier Flächen sind, versagt diese Darstellung, indem sie die Kurve nicht zu *individualisieren* vermag (III A B 4a, *Fano*, Nr. **21**). Man erreicht dies, indem man x, y, z als Funktionen eines Parameters t darstellt oder als Funktionen von n Parametern, zwischen denen $n-1$ voneinander unabhängige Gleichungen bestehen[77]). *A. Cayley* verwendet zur Darstellung einer algebraischen Raumkurve auch den Komplex der sie schneidenden Geraden[78]) sowie die sogenannten Monoidflächen[79]); *A. Brill*[79a]) das System aller über der

welchem Anhang zum erstenmal die Elemente dieser Disziplin systematisch behandelt werden.

74) *Serie von Punkten* nach *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 72. Raumkurven wurden auf analytischem Wege schon vor *Clairaut*, sogar schon von den Alten untersucht; vgl. *M. Chasles*, Ap. hist., p. 139—141. *A. Parent* z. B. hat (nach *M. Cantor*, Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 418) 1702 die Schraublinie mit Hilfe von Koordinaten untersucht. Der Ausdruck *ligne à double courbure* rührt von *H. Pitot*, Hist. Ac. sc. Paris, Année 1724 (gedr. 1726), p. 113, her. Angenommen und eingebürgert wurde dieser Ausdruck durch *Clairaut*. Linien *doppelter* Krümmung heißen sie bei ihm deshalb, weil sie an der Krümmung zweier ebenen Kurven, ihrer Projektionen, teilnehmen (a. a. O., Vorrede, p. 2). Bezüglich *J. Hermann*, der 1732 ebenfalls Oberflächen und Raumkurven behandelte, vgl. *M. Cantor*, Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 786.

75) III A B 4a, *Fano*, Nr. **12**, Anm. **39**.

76) Schon von *R. Descartes*, Anm. **53**, angedeutet; in voller Klarheit bei *A. Cl. Clairaut* a. a. O., etwa Vorrede, p. 2.

77) Vgl. *G. Loria*, Rend. Circ. mat. Palermo **17** (1903), p. 50.

78) Anm. 484. Vgl. auch *A. Voß*, Math. Ann. **13** (1878), p. 232—248.

79) III A B 4a, *Fano*, Nr. **21**, Anm. 88.

Kurve stehenden Kegel, deren Spitzen sich auf einer Geraden befinden.

Drei Flächengleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ bestimmen im allgemeinen eine *Punktgruppe*, die auch allen ∞^2 Flächen $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$ angehört.

Bezeichnet in Gl. (1) F eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, so nennt man die hierdurch bestimmte Fläche eine *algebraische Fläche n^{ter} Ordnung*[80]). Sie heißt reell oder imaginär, je nachdem die Verhältnisse der Koeffizienten sämtlich reell sind oder nicht. Besitzt eine reelle Fläche keinen reellen Teil, so nennt sie *F. Klein*[81]) „nullteilig".

Die einfachste algebraische Fläche ist die durch eine lineare Gleichung

$$(5) \qquad \varepsilon \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

bestimmte Ebene[82]). Sie schneidet auf den Achsen die Stücke $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ ab; $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + D = 0$ stellt daher die *unendlichferne*[83]) (oder *uneigentliche*) Ebene dar.

Jede imaginäre (besser komplexe) Ebene, insbesondere jede durch die Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

(worin nicht $A = B = C$ sein darf) definierte *Minimalebene*[84]), besitzt eine reelle Gerade.

79a) Nachr. Ges. Gött. 1901, p. 156—168; Math. Ann. 64 (1907), p. 289—324; Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 188—192 (für Kurven 3. O.).

80) Verschiedene solche Flächen untersucht schon *A. Cl. Clairaut*, Recherches, 1731. *L. Euler*, Introd. 2, p. 373—398, diskutiert zum erstenmal die durch quadratische Gleichungen dargestellten Flächen.

81) Nicht-Euklidische Geometrie 2 (Autogr. Vorl. Sommers. 1890), p. 62; Höhere Geom. 1, p. 355, für Flächen und Kurven zweiter Ordnung.

82) Die Gleichung der Ebene findet sich zuerst bei *A. Cl. Clairaut*, Recherches (1731), p. 6, Nr. 10 und p. 38, Nr. 66; ferner (nach *M. Cantor*, Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 786) bei *J. Hermann*, Comm. Ac. Petr. (a. 1732, 1733), 6, p. 36—67. S. auch *L. Euler*, Introd. 2, Append. § 97 f. Zu ihrer Ableitung werden in den Lehrbüchern verschiedene geometrische Eigenschaften der Ebene herangezogen. *G. Monge*, Application (vgl. Anm. 86), § III, z. B. betrachtet die Ebene als Ort einer Geraden von fester Richtung, die längs einer zweiten Geraden hingleitet; *O. Hesse*, Vorles. Raum, benutzt einmal (p. 13) die Eigenschaft, daß der Inhalt des von vier Punkten einer Ebene bestimmten Tetraeders verschwindet, dann (p. 14), daß sie der Ort aller Punkte ist, die von zwei Punkten gleiche Abstände haben oder (p. 15) deren Lote auf eine feste durch den Ursprung gelegte Gerade denselben Fußpunkt haben (Diese Ableitung schon bei *Ch. Sturm*, Ann. math. p. appl. 15 (1824/25), p. 341). Bezüglich der Frage, auf Grund welcher Axiome sich die lineare Form der Gleichung einer Ebene ergebe, vgl. Anm. 167.

83) Vgl. Anm. 42.

84) III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 12.

Sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte P_1, P_2, so heißen, wie in der Ebene,

$$\xi = x_2 - x_1, \qquad \eta = y_2 - y_1, \qquad \zeta = z_2 - z_1$$

nach *R. Baltzer*[85]) die *Koordinaten der gerichteten Strecke* (*des Vektors*) $P_1 P_2$. Ihre Länge ist $l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ und ihre Neigungswinkel α, β, γ gegen die Koordinatenachsen sind gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{l}, \qquad \cos\beta = \frac{\eta}{l}, \qquad \cos\gamma = \frac{\zeta}{l}\ ^{86}).$$

Nennt man Strecken mit gleichen Koordinaten gleich, so sind gleiche Strecken solche, die durch eine Parallelverschiebung (mit ihren Anfangs- und Endpunkten) zur Deckung gebracht werden können. Wie in der Ebene (Nr. 2) bestimmt jede Strecke einen *unendlichfernen Punkt*, von dem ξ, η, ζ *homogene Koordinaten*[87]) sind. Zwei Strecken (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') sind dann (und nur dann) zueinander normal, wenn $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$ ist.

R. Baltzer[88]) hat auch den von *H. Graßmann*[89]) stammenden

---

85) J. f. Math. 46 (1853), p. 145 und Anal. Geom., § 45 (für beliebige Parallelkoordinaten). Vgl. auch Anm. 43.

86) Daraus folgen sofort die von *A. L. Cauchy*, Appl., p. 16, vielfach verwendeten Gleichungen einer Geraden

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Die Gleichungen einer Geraden (ihrer Normalrisse auf die XZ- und YZ-Ebene)

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta$$

wurden von *G. Monge*, Application de l'analyse à la géométrie (die erste, Paris 1795 erschienene, und die zweite Ausgabe führen den Titel „Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, à l'usage de l'école polytechnique"), 4ᵉ éd. Paris 1809, p. 2, eingeführt. Über die Tragweite dieser Einführung äußerte sich *J. Plücker* 1833 in einer Rezension (Ges. Abh. 1, p. 617): „Diese neue Geometrie (von *Descartes*) nahm eine ganz andere Gestaltung durch *Monge* an, welcher, nachdem durch *Euler* und *Lagrange* schon manches vorbereitet worden war, dadurch, daß er die Gleichung der geraden Linien einführte, Rechnung und Konstruktion streng von einander schied. Wie von *Descartes*, so kann man auch von *Monge* sagen: er schuf eine neue Geometrie."

87) *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 45, 2; *H. Graßmann*[44]).

88) J. f. Math. 46 (1853), p. 152; Anal. Geom., p. 376 f. (für beliebige Parallelkoordinaten).

89) Ausdehnungsl. v. 1844, § 91; p_x, p_y, p_z heißen bei ihm die Zeiger eines *Flächenraumes*, wofür auch der von *R. Mehmke* vorgeschlagene Ausdruck *Feld* (*H. Graßmanns* Ges. W. 1², p. 435) oder von *E. W. Hyde* (Anm. 46) *plane-vector* gebraucht wird. Es sei jedoch hervorgehoben, daß schon *A. L. Cauchy* in seiner, wie es scheint, zu wenig beachteten Theorie der „moments linéaires"

Begriff der *Koordinaten einer Planfigur* (*Plangröße*)[90]) in die analytische Geometrie eingeführt. Man versteht darunter die Inhalte p_x, p_y, p_z der Normalprojektionen einer mit bestimmtem Umlaufsinn versehenen Planfigur (etwa eines Parallelogramms) p bzw. auf die Ebenen OYZ, OZX, OXY eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die Vorzeichen von p_x, p_y, p_z werden nach dem positiven Drehsinn in den betreffenden Koordinatenebenen bestimmt. Diese Koordinaten bestimmen eindeutig die Stellung, den Sinn und Flächeninhalt von p; sie sind *homogene Koordinaten einer unendlichfernen Geraden*[91]).

Betrachtet man p_x, p_y, p_z als Koordinaten eines Vektors, so ist dessen Länge gleich dem Inhalt von p; er steht zu p senkrecht und bestimmt zusammen mit dem Drehsinn von p einen Schraubsinn, der dem des zugrunde gelegten Koordinatensystems gleicht. Dieser Vektor heißt nach *H. Graßmann*[92]) die *Ergänzung* der Plangröße p.

Bezieht sich die Gl. (5) einer Ebene auf ein rechtwinklig-gleichschenkliges Koordinatensystem, so sind A, B, C die Koordinaten einer zur Ebene parallelen Plangröße oder von deren Ergänzungsstrecke[93]). Letztere möge die *Normalenstrecke* der Ebene heißen. Der lineare Ausdruck ε (Gl. 5) bestimmt also eine Ebene samt einer ihr etwa angehörig zu denkenden Planfigur von der Größe $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Dieses von *H. Graßmann*[94]) unter dem Namen *Ebenengröße* (oder *Plangröße*) eingeführte Gebilde, auch *Blatt*[95]), *gebundene Plangröße*[96]) oder *Punkt-Ebene-Vektor*[97]) genannt, verdient samt den vorhergehenden Begriffen mehr Beachtung in der analytischen Geometrie.

(Exercices de mathématiques, Paris 1826 = Oeuvres (2) 6, Paris 1887, p. 89—112; 149—168, 191—201) die Projektionen einer Plangröße genau wie Koordinaten handhabt.

90) IV 2, *Timerding*, Nr. 3; *Flächenvektor* bei *H. E. Timerding*, Geom. d. Kr., p. 20. Vgl. auch *O. Staude*, Anal. Geom., §§ 34, 36.

91) *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 400.

92) Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 335, 336 = Ges. W. 1², p. 211 f. — Die Definition der Ergänzung in IV 14, *Abraham*, Nr. 3 und IV 2, *Timerding*, Nr. 3 stimmt mit der obigen *Graßmann*schen nicht völlig überein, weil die Richtung der Ergänzungsstrecke unabhängig von dem zugrunde liegenden Koordinatensystem festgelegt wird. Nach dieser Definition wären die Koordinaten einer Plangröße (im Gegensatz zu *Graßmann*) nicht immer denen ihrer Ergänzung gleich, eine Tatsache, zu der übrigens schon *A. L. Cauchy*, a. a. O., p. 101, gelangt.

93) *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 49, 6.

94) Ausdehnungsl. v. 1844, p. 163 = Ges. W. 1¹, p. 189. In der Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 257 = Ges. W. 1², p. 172 gebraucht er dafür „Flächenteil". Vgl. auch Anm. 46.

95) *H. Graßmanns* Ges. W. 1², p. 438.

96) IV 2, *Timerding*, Nr. 3; *gebundener Bivektor* bei *E. Jahnke*, Vorl. üb. d. Vektorenrechnung usw., Leipzig 1905, p. 113.

Schließt die Normalenstrecke (A, B, C) mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ ein, so erhält man durch Division der Gl. (5) mit dem absoluten Zahlwert $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ die Gleichung der Ebene in der *Hesseschen Normalform*[98])

$$(6) \qquad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + p = 0,$$

wo p den Normalabstand des Ursprungs von der Ebene bezeichnet. Solche Normalabstände sollen stets von der Ebene aus gegen die Punkte hin gemessen und mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen werden, je nachdem diese Richtung mit der der Normalenstrecke übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Diese Festsetzung ist nur von der Art, nicht von der Lage des zugrunde gelegten Koordinatensystems abhängig[99]) und versagt (für eigentliche Ebenen) nie. Durch die Angabe der Normalenstrecke (oder der entsprechenden Plangröße) wird also eine positive und negative Seite der Ebene unterschieden, d. h. die Ebene *orientiert*[100]). Der Ausdruck ε in Gl. (5) gibt den mit der Länge der Normalenstrecke (oder

97) „point-plane-vector" bei *E. W. Hyde* (vgl. Anm. 46).

98) *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 16. Bei *Hesse* steht $-p$ statt $+p$; vgl. Anm. 49 u. 49^a^. Eine andere, häufig verwendete Normalform:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

benutzt schon *G. Lamé*, Examen des différentes méthodes, employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818 (Neudruck 1903), p. 89 f.; eine einfache Ableitung dieser Gleichung gab *W. Schell*, Zeitschr. Math. Phys. 1 (1856), p. 106—114.

99) Erst der lineare Ausdruck ε, nicht schon die Gleichung $\varepsilon = 0$, bestimmt die positive Normalenrichtung der Ebene. *R. v. Lilienthal*, Math. Ann. 42 (1893), p. 495—504, möchte für jeden Fall die positive Richtung einer Geraden und damit auch die positive Normalenrichtung einer Ebene festlegen, indem er sagt, (x, y, z) liege auf der positiven oder negativen Seite von (x_0, y_0, z_0), je nachdem die erste nicht verschwindende der Differenzen $z - z_0$, $y - y_0$, $x - x_0$ positiv oder negativ ist. Ähnlich hat *O. Stolz*, Vorl. üb. allg. Arithm., 2, Leipzig 1886, p. 37, für besondere Zwecke die positive Richtung von Geraden in der Ebene bestimmt. — Dadurch würden aber die positiven Normalenrichtungen der Ebenen von der Lage des Achsenkreuzes abhängen, sich mit dieser ändern. Vgl. auch die Bemerkung von *O. Stolz*, Math. Ann. 43 (1893), p. 591 f., zu *v. Lilienthals* Vorschlag.

100) Mit orientierten Ebenen rechnet *H. Graßmann* in beiden Ausgaben der Ausdehnungslehre. Den Ausdruck „*Orientierung*" in diesem Sinn gebraucht *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 337; vgl auch die daselbst p. 336 wiedergegebenen Bemerkungen von *G. Darboux*. Auf die Wichtigkeit dieses Begriffes für alle geometrischen Untersuchungen hat *E. Study*, Geom. d. Dynamen, § 17, nachdrücklich hingewiesen und seinen Zusammenhang mit den in der anal. Geom. auftretenden Irrationalitäten erörtert.

dem Inhalt des Blattes) multiplizierten Abstand des Punktes (x, y, z) von der Ebene[101]) an und kann als *Moment des Blattes im Punkte* (x, y, z) bezeichnet werden.

Die Einführung der bisher besprochenen Koordinaten in der Geraden, in der Ebene und im Raum bestand in einer umkehrbar eindeutigen und stetigen Zuordnung der Punkte dieser Gebilde und der Werte eines bzw. zweier oder dreier Parameter. Nun gibt es, wie wir in der Folge sehen werden, Mannigfaltigkeiten von Elementen, die sich auf dieselbe Weise den Werten von mehr als drei Parametern zuordnen lassen. Die Eigenschaften einer solchen Mannigfaltigkeit lassen sich in zwei Klassen scheiden; die der ersten Klasse hängen von der besonderen Natur der die Mannigfaltigkeit bildenden Elemente ab, die der zweiten Klasse bloß von dem Umstand, daß sich die Elemente der Mannigfaltigkeit ausnahmslos umkehrbar eindeutig den Wertegruppen von n Parametern zuordnen lassen[102]). Sieht man beim Studium der letzteren Eigenschaften von der besonderen Art der Elemente der Mannigfaltigkeit ab, so gelangt man zur abstrakten Vorstellung eines *n-dimensionalen Raumes* R_n[103]). Die Gesamtheit der (reellen oder komplexen) Wertegruppen der n Parameter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ selbst wird auch *analytischer Raum*[104]) genannt; jede solche Wertegruppe heißt ein *Punkt* dieses Raumes, die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißen die *Koordinaten* dieses Punktes.

Alle Punkte, deren Koordinaten s voneinander unabhängigen linearen Gleichungen genügen, bilden einen R_{n-s}[105]); ein R_1 heißt

101) Vgl. Anm. 49a.

102) *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi etc., Pisa 1907, p. 1.

103) Dieser Begriff tritt schon bei *J. L. Lagrange* und *C. G. J. Jacobi* auf und soll *K. F. Gauß* geläufig gewesen sein (vgl. *P. Stäckel*, Ber. üb. d. Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 12 (1903), p. 471); er findet sich jedoch, wenn auch ohne mathematische Bestimmtheit, schon in älteren Zeiten (vgl. *G. Loria*, Teor. geom., p. 302, und die Schilderung der Entwicklung des Begriffs der mehrdimensionalen Geometrie bei *G. Veronese*, Grundzüge d. Geom. von mehreren Dimensionen usw., deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1894, p. 684—692). Ausdrückliche wissenschaftliche Behandlung erfuhr er jedoch erst nach 1840 von *A. Cayley* (1843), *H. Graßmann* (1844), *A. L. Cauchy* (1847), *B. Riemann* (1854) usw. Vgl. III AB 1, *Enriques*, Nr. 15; III AB 4a, *Fano*, Nr. 28—30; III C 9, *Segre*.

104) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 24 (1847), p. 886; *F. Enriques*, Vorl. üb. projektive Geometrie, deutsch von *H. Fleischer*, Leipzig 1903, p. 350.

105) Vgl. hierzu: *A. L. Cauchy*, a. a. O.; *C. Jordan*, Paris C. R. 75 (1872), p. 1614—1616, der dieses Gebilde *n-plan* nennt, und *C. Segre*, Mem. Acc. Torino (2) 36 (1885, geschr. 1883), p. 15—21.

auch „Gerade", ein R_2 „Ebene" und ein R_3 „Raum". Für diese Gebilde gelten dann analoge Gesetze[106]) wie für die Grundgebilde des R_3; z. B. gehören je $s+1$ beliebige Punkte einem R_s an.

Läßt man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so unendlich werden, daß ihre Verhältnisse konstante Werte behalten, so sollen solche Gruppen unendlicher Werte *unendlichferne Punkte* des R_n heißen; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind dann *homogene Koordinaten* (Nr. 1) derselben. Sämtliche unendlichfernen Punkte des R_n gehören dem unendlichfernen R_{n-1} const. $= 0$ an. Gerade mit demselben unendlichfernen Punkt oder R_{n-1} mit demselben unendlichfernen R_{n-2} heißen parallel (III C 9, Mehrdimensionale Räume, *Segre*).

Nennt man den Punkt mit den Koordinaten Null *Ursprung*, ferner die Geraden, für welche $n-1$ der Koordinaten verschwinden, *Koordinatenachsen* und den Wert der nicht verschwindenden Koordinate den Abstand des betreffenden Achsenpunktes vom Ursprung (also $(1, 1, \ldots, 1)$ den *Einheitspunkt*), so sieht man, daß diese Koordinaten vollkommen analog den Parallelkoordinaten im gewöhnlichen R_3 sind. Wird noch im unendlichfernen R_{n-1} das absolute Gebilde durch die Gleichung $\sum x_i^2 = 0$ oder die Entfernung zweier Punkte x, y durch $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$[107]) definiert, so lassen sich alle metrischen Begriffe auf den R_n übertragen, und das *Koordinatensystem ist rechtwinklig.*

Die Punkte, deren Koordinaten einer nichtlinearen Gleichung genügen, bilden eine *unebene (krumme, nichtlineare) $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M_{n-1}* (einen *krummen Raum*)[108]). Ist die Gleichung algebraisch vom r^{ten} Grade, so bezeichnet man die Mannigfaltigkeit auch mit M_{n-1}^r. Analoge Bezeichnungen kommen für die durch ein System algebraischer Gleichungen definierten Mannigfaltigkeiten niedrigerer Dimensionenzahlen zur Anwendung[109]).

---

106) Sie finden sich in voller Allgemeinheit bei *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1844; vgl. z. B. § 126; er nennt einen R_k ein *Gebiet* $(k+1)^{\text{ter}}$ *Stufe*.

107) *A. L. Cauchy*, a. a. O., u. *C. Jordan*, a. a. O.; vgl. noch: *Weber-Wellstein*, Encykl. 2, p. 82—97 (für den R_3), und *H. Laurent*, La géométrie analytique générale, Paris 1906, p. 14. — Wegen analytischer Behandlung der verschiedenen Maßgeometrien im R_n vgl. *E. Beltrami*, Ann. mat. p. appl. (2) 2 (1868—69), p. 232—255 (franz. Übers. Ann. éc. norm. (1) 6 (1869), p. 345—375) = Opere mat. 1, p. 406—429, und Anm. 163.

108) *E. Study*, Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 346, schlägt vor, den Inbegriff der *reellen* Wertesysteme von n Parametern *Raum*, hingegen den Inbegriff der ∞^n *komplexen* Wertesysteme *Mannigfaltigkeit* von n (reellen bzw. komplexen) Dimensionen zu nennen.

109) *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 258 f.

Analog wie für den gewöhnlichen Raum lassen sich auch für den R_n homogene Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ einführen (Nr. **1**), so daß für $x_0 = 1$ die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den obigen identisch sind.

Wenn für eine Mannigfaltigkeit von Elementen nicht von vornherein eine umkehrbar eindeutige Zuordnung ihrer Elemente zu den Werten von n Parametern gegeben ist, so entsteht die Frage[110]) nach jenen Postulaten, aus denen eine Bestimmung ihrer Elemente durch Koordinaten gefolgert werden kann (vgl. III C 9, *Segre*).

4. Allgemeine Punktkoordinaten (krummlinige Koordinaten). Der Begriff *krummliniger* Koordinaten in der Ebene findet sich schon bei *G. W. Leibniz*[111]). Er verallgemeinert die Cartesischen Koordinaten dadurch, daß er eine beliebige Kurve als x-Achse wählt und an Stelle der Parallelen zur y-Achse ein System von Kurven voraussetzt, die den Punkten der x-Achse nach einem festen Gesetze zugeordnet sind. Auch *J. L. Lagrange*[112]) und *K. F. Gauß*[113]) verwendeten krummlinige Koordinaten. Die für die Entwicklung der Koordinatensysteme maßgebenden Begriffsbildungen stammen jedoch von *G. Lamé* und *J. Plücker*.

Seien

$$(1)\qquad f_1(x,y,z) = 0,\quad f_2(x,y,z) = 0,\quad f_3(x,y,z) = 0,$$

---

110) Die Frage wurde von *C. Segre*, Riv. mat. Torino 1 (1891), p. 42, aufgeworfen.

111) Aufsatz aus dem Jahre 1692, Ges. W. 5, p. 266—269. Vgl. *M. Cantor*, Vorl. 3 (1901), p. 211. Einen Sonderfall dieser Koordinaten benutzte 1691 *Jakob Bernoulli* (vgl. Anm. 231). *G. Loria*, Ebene Kurven, p. 606, erwähnt eine Arbeit von *G. Manfredi*, De constructione aequationum differentialium primi gradus, Bononiae 1707, worin als Koordinaten eines Punktes der Ebene der senkrechte Abstand von einer festen Kurve und der von einem festen Kurvenpunkt bis zum Fußpunkt jener Senkrechten reichende Bogen genommen werden. — Dieses Koordinatensystem haben in neuerer Zeit *E. Mathieu*, J. math. p. appl. (3) 8 (1882), p. 5—19, und *M. Petrovich*, Sitzungsber. Böhm. Ges. 1898, Nr. VII, verwendet. — Auch *A. Cl. Clairaut*, Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731, letzte S. d. Vorrede, dürfte mit den Worten: „A l'égard des courbes à double courbure . . ., dont *les coordonnées représentent des lignes courbes*“ krummlinige Koordinaten im Raum gemeint haben. — *L. Euler*, Introd. 2, § 392, sagt bereits, daß die Natur der Linien auf sehr viele andere Arten durch Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen ausgedrückt werden kann („cum igitur pluribus aliis modis naturae linearum aequationibus comprehendi queant, quae inter duas variabiles formentur“).

112) Vgl. IV 1, *Voß*, Nr. 37; IV 6, *Stäckel*, Nr. 4.

113) Vgl. III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 34, Anm. 221, 222. — Auch *Ch. Dupin*, Développements de géométrie, Paris 1813, p. 20, benützt bei einer geometrischen Betrachtung „ordonnées curvilignes“.

wo die f_i analytische Funktionen (II B 1, Nr. 40) bezeichnen, die Gleichungen dreier Flächen in (etwa rechtwinkligen) Parallelkoordinaten, wobei die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right|$$

als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt wird. Dann nehmen die Funktionen f_i in jedem Punkt (x, y, z) bestimmte Zahlwerte x_1, x_2, x_3 an; und wenn man umgekehrt drei Zahlwerte x_i beliebig wählt, so bestimmen sie mittels der Gleichungen

$$(2) \qquad f_1(x, y, z) = x_1, \quad f_2(x, y, z) = x_2, \quad f_3(x, y, z) = x_3$$

Wertetripel von x, y, z, d. h. einen oder mehrere (auch unendlich viele diskrete) Punkte des Raumes. Diese Zahlen x_i oder *die Werte dreier Funktionen $f_i(x, y, z)$ der Parallelkoordinaten x, y, z in einem Punkte des Raumes nennen wir seine allgemeinen Punktkoordinaten*[114]). *G. Lamé*[115]) wurde auf diese Koordinaten, die er später *krummlinige* (*curvilignes*) nannte, durch mathematisch-physikalische Untersuchungen geführt, indem er partielle Differentialgleichungen, wie sie in der Wärmetheorie, Elastizitätstheorie und Optik auftreten, zu integrieren suchte[116]). Seine geometrischen Anwendungen dieser Koordinaten gehören daher hauptsächlich in das Gebiet der Differentialgeometrie (III D 1, 2, 3).

---

114) Allgemeiner könnte man sagen: Werden die Parallelkoordinaten x, y, z eines Punktes von drei Parametern x_1, x_2, x_3 abhängig gemacht mittels Gleichungen

$$\varphi_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

die nach x_1, x_2, x_3 auflösbar sind, so nennt man x_1, x_2, x_3 *krummlinige Koordinaten* des Punktes. Die Funktionen f_i können auch als die drei Zweige einer algebraischen Funktion 3. Grades der Koordinaten x, y, z definiert sein (vgl. Nr. 11—16).

115) J. éc. polyt. cah. 23, t. 14 (1834), p. 215—246; Paris C. R. 6 (1838), p. 43—45; der Sonderfall der elliptischen Koordinaten wurde von ihm schon 1833 (vgl. Anm. 296) behandelt. Anwendungen dieser Koordinaten gab er: J. math. p. appl. (1) 1 (1836), p. 77—87; 3 (1838), p. 552—555; 5 (1840), p. 313—347; 6 (1841), p. 37—60; 8 (1843), p. 397—434. Eine Zusammenfassung dieser Untersuchungen bildet das Werk: Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859. Vgl. ferner die Werke: Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes, Paris 1857; Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, Paris 1861; Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852; 2ᵉ éd. 1866. Wegen weiterer Literatur s. *G. Loria*, Teor. geom. cap. V, Nr. 15.

116) Vgl. IV 14, *Abraham*, Nr. 20; IV 24, *Tedone*; V 4, *Hobson u. Diesselhorst*; V 21, *Wangerin*, Nr. 25.

J. Plücker[117]) gelangte zu diesen Koordinaten in dem Bestreben, den Koordinatenbegriff möglichst allgemein zu fassen, und hat dadurch auf die Ausbildung der *algebraischen* analytischen Geometrie den wichtigeren Einfluß ausgeübt.

Die Gleichungen (2) bestimmen, wenn man x_1, x_2, x_3 als veränderliche Parameter ansieht, drei Flächenscharen, aus denen durch jeden Punkt des Raumes je eine Fläche geht[117a]). Die durch die Gleichungen (1) gegebenen Flächen dieser Scharen spielen eine ähnliche Rolle wie die Koordinatenebenen, ihre drei Schnittlinien wie die Koordinatenachsen und einer ihrer Schnittpunkte O wie der Ursprung bei den Parallelkoordinaten, weil für diese Gebilde bzw. eine, zwei oder drei der Koordinaten verschwinden. Man kann daher diese drei Flächen *Koordinatenflächen*[118]), ihre Schnittlinien *Koordinatenachsen* und O den *Ursprung* der allgemeinen Punktkoordinaten nennen. Die Flächen (2)[119]) entsprechen den zu den Koordinatenebenen parallelen Ebenen. Bezeichnen s_1, s_2, s_3 die von O aus gemessenen Bogen-

---

117) Schon 1829 (J. f. Math. 5, p. 1) spricht er für die Ebene das allgemeine Prinzip aus: „Jeder besonderen Art die Lage eines Punktes in Beziehung auf Punkte oder Linien, die als der Lage nach bekannt angesehen werden, zu bestimmen, entspricht ein Koordinatensystem." Aber erst im Syst. anal. Geom. (1835), p. 1 betrachtet er die obigen allgemeinen Punktkoordinaten in der Ebene.

Wie schon *F. Klein*, Höhere Geom. 1, p. 35, bemerkt, ist *J. Plückers* Methode der abgekürzten Bezeichnung (III A B 4a, *Fano*, Nr. 12, Anm. 39), die aber auch *G. Lamé*, Ann. math. p. appl. 7 (1817), p. 229—240 (Auszug aus einem 1816 der Akademie vorgelegten Memoire); *H. Gergonne*, ebenda 17 (1826—27), p. 214—254; 19 (1828—29), p. 220—223 (dieser schon im vollen Bewußtsein der Wichtigkeit dieser Betrachtungen als eines neuen Instrumentes geometrischer Forschung) und *É. Bobillier*, ebenda 18 (1827—28), p. 25—28, 320—339, 359—367, verwendeten, nichts als die Einführung neuer Punktkoordinaten.

117a) Die Wertepaare zweier Parameter, etwa x_2, x_3, bestimmen ∞^2 Kurven; für irgend eine Kurve dieser Kongruenz ist x_1 der Parameter eines Kurvenpunktes (*E. Beltrami*, Ricerche di analisi applicata alla geometria, Giorn. mat. 2 (1864), p. 267 = Opere mat. 1 (Milano 1902), p. 107). Auf diesen Gedanken gründet *L. P. Eisenhart*, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 470—488, eine einfache Methode zur Untersuchung von Kurvenkongruenzen (Nr. 80).

118) In allgemeinerer Bedeutung bei *O. Staude*, Fokaleigenschaften, p. 180.

119) Ist $f_i(x, y, z)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, so berühren sich die Flächen $f_i(x, y, z) = x_i$ längs ihrer unendlichfernen Kurve $(n-1)$-fach. Ist $f_i(x, y, z)$ insbesondere vom zweiten Grade, so sind die Flächen $f_i(x, y, z) = x_i$ ähnlich und ähnlich gelegen.

Bezeichnen f_i und g_i ganze rationale Funktionen gleichen Grades, so bilden die Flächen einer jeden Schar

$$\frac{f_i(x, y, z)}{g_i(x, y, z)} = x_i$$

ein Büschel. Für lineare Funktionen f_i und g_i vgl. Nr. 8.

längen der Koordinatenachsen, so ist $s_i = \varphi_i(x_i) = \Phi_i(x, y, z)$. Es lassen sich also auch die Bogenlängen, die die durch einen Punkt (x, y, z) gehenden Flächen (2) auf den (krummen) Koordinatenachsen abschneiden, als allgemeine Koordinaten dieses Punktes betrachten. Damit ist der Name *krummlinige Koordinaten* gerechtfertigt. Indessen ist zu beachten, daß bei krummlinigen Koordinaten im allgemeinen Ausnahme-Punkte oder -Linien auftreten, in denen die Eindeutigkeit der Zuordnung zwischen Punkt und Wertetripel aufhört. So z. B. kann im besondern ein „Ursprung" im obigen Sinne gar nicht existieren.

In der mathematischen Physik und in der Differentialgeometrie sind besonders die auf dreifach orthogonale Flächenscharen[120]) (III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 23) bezüglichen *orthogonalen Koordinaten* von Wichtigkeit, die auch den Hauptgegenstand der *Lamé*schen Untersuchungen bilden[121]).

Für den Fall, als die f_i ganze rationale Funktionen bezeichnen, hat *J. Plücker*[122]) die Koordinaten x_i geometrisch gedeutet. Wird durch den Punkt $P(x, y, z)$ parallel zu einer gewählten Richtung eine Gerade gelegt, die die Fläche $f_i(x, y, z) = 0$ in den Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ schneidet, so ist

$$(3) \qquad f_i(x, y, z) = c_i \cdot \overline{PQ_1} \cdot \overline{PQ_2} \cdot \ldots \cdot \overline{PQ_n},$$

---

120) Wertvolle historische Bemerkungen über diese Flächensysteme finden sich bei *P. É. Adam*, Sur les systèmes triples orthogonaux, Thèse, Paris 1887, und *G. Darboux*, Systèmes orth. Vgl. ferner *G. Loria*[115]); *E. Pascal*, Rep. 2, p. 506 f. — *G. Darboux* hat diese Untersuchungen auf den R_n ausgedehnt (vgl. a. a. O., p. 158 ff.) und gezeigt, wie sich die Ergebnisse zur Aufstellung neuer Systeme orthogonaler Koordinaten im R_3 verwerten lassen (ebenda p. 169 ff., wo auch weitere Literatur angegeben ist).

121) Nichtorthogonale Koordinaten behandelte z. B. *L. Aoust*, Paris C. R. 48 (1859), p. 842; 54 (1862), p. 461; J. f. Math. 58 (1861), p. 352—368; Ann. mat. p. appl. (1) 6 (1863), p. 65—87; (2) 2 (1868—69), p. 39—64; (2) 3 (1869—70), p. 55—69; (2) 5 (1871—73), p. 261—288; Ann. éc. norm. 6 (1869), p. 205—233. *D. Codazzi*, Ann. mat. p. appl. (2) 1 (1867—68), p. 293—310; (2) 2 (1868—69), p. 101—110, 276—287; (2) 4 (1870—71), p. 10—24. *E. Roger*, Ann. Mines (7) 5 (1874), p. 110—168 (studiert insbesondere die „coordonnées planisphériques" p. 116 f.). *E. Mathieu*, J. math. p. appl. (3) 8 (1882), p. 5—18.

122) Syst. anal. Geom., p. 2—4; *Druckenmüller*, Übertragungsprinzipien, p. 35—61. Der in Gl. (3) enthaltene Satz stammt (für die ebenen Kurven 3. O.) von *I. Newton*, Enumeratio linearum tertii ordinis, London 1706 = *I. Newtoni*, Opuscula, Lausannae & Genevae 1744, t. 1, p. 250. (S. auch *M. Cantor*, Vorl. 3, 2. Aufl., p. 422 f.). Vgl. hierzu *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. höheren ebenen Kurven, Leipzig 1873, p. 129. Der Satz wurde von *E. Laguerre*, Paris C. R. 60 (1865), p. 72 = Oeuvres 2, p. 20, verallgemeinert.

wo c_i eine bloß von der gewählten Richtung abhängige Konstante bedeutet. Die Koordinaten x_i eines Punktes P sind also gleich den mit gewissen Konstanten multiplizierten Produkten der Abstände dieses Punktes von den Schnittpunkten der Koordinatenflächen $f_i = 0$ mit je einer der durch P parallel zu drei festen Richtungen gezogenen Geraden. Diese Richtungen dürfen auch zusammenfallen; ferner dürfen die f_i auch lineare Funktionen sein (Nr. 3).

Jede Gleichung zwischen den Koordinaten x_i definiert eine Fläche[122a]); zwei voneinander unabhängige Gleichungen definieren im allgemeinen eine Raumkurve, drei eine Punktgruppe. Es lassen sich auch hier *homogene Koordinaten* einführen, indem man noch eine vierte Koordinate $x_4 = f_4(x, y, z)$ hinzunimmt und bloß die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ beachtet. Sämtliche, geometrische Beziehungen darstellende Gleichungen müssen in $x_1, x_2, \ldots, x_4$ homogen sein. Die lineare Gleichung

$$(4) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

stellt eine Fläche dar, deren Gleichung in Parallelkoordinaten lautet:

$$(4^a) \qquad a_1f_1(x, y, z) + a_2f_2(x, y, z) + a_3f_3(x, y, z) + a_4f_4(x, y, z) = 0.$$

Ordnet man den Punkten des Raumes[123]) auf zwei verschiedene Arten Zahlentripel x_i und x_i' $(i = 1, 2, 3)$ als Koordinaten stetig zu, so müssen[124]) die Zahlen x_i' Funktionen der x_i sein. Aus irgendeinem System von Punktkoordinaten geht daher jedes andere durch Gleichungen der Form (2) hervor oder:

Jedes System von Punktkoordinaten des Raumes ist in dem durch die Gleichungen (2) *definierten System als Sonderfall enthalten.*

Im allgemeinen wird mittels der krummlinigen Koordinaten nur Geometrie im begrenzten Raumstück[125]) getrieben. (Vgl. die Bemerkung auf p. 632.) Besondere Fälle dieser Koordinaten jedoch, die gerade im folgenden zur eingehenderen Besprechung gelangen, dienen auch zu geometrischen Untersuchungen im Gesamtraum.

122a) Ist $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ diese Gleichung, so stellt

$$\sum (X_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

worin die X_i die laufenden Koordinaten derselben Art bezeichnen, eine Fläche dar, die die gegebene im Punkt (x_i) berührt (*H. I. Purkiss*, The Oxf. Cambr. Dublin Mess. 3 (1866), p. 19).

123) Analoges gilt für jedes andere Koordinatenfeld.

124) II A 1, *Pringsheim*, Nr. 3.

125) *F. Klein*, Höhere Geom. 1, p. 36; vgl. auch III AB 4a, *Fano*, Nr 35 u. II B 1, *Osgood*, Anm. 8.

Die analogen Betrachtungen für die Ebene und die gerade Linie unterscheiden sich bloß durch die verminderte Anzahl der Koordinaten[126]). Setzt man z. B. $x_1 = f(x)$ und deutet x als Abszisse eines Punktes einer Geraden, so ist x_1 die Koordinate des Punktes in bezug auf die Punktgruppe $f(x) = 0$ (Nr. 2).

5. Lineare Punktkoordinaten im allgemeinen. Unter *linearen*[127]) Punktkoordinaten im Raume versteht man solche, in denen jede Ebene durch eine *lineare* Gleichung dargestellt wird. Über das cartesische hinausgehende derartige Koordinatensysteme wurden um das Jahr 1830 unabhängig voneinander aufgestellt durch *A. F. Möbius*[128]), *K. W. Feuerbach*[129]), *É. Bobillier*[130]), *J. Plücker*[131]) und *M. Chasles*[132]). Am klarsten und verbunden mit dem Bewußtsein seiner Tragweite tritt dieser Begriff bei *J. Plücker* auf.

Bezeichnen ξ, η, ζ irgendwelche lineare Punktkoordinaten, so

---

126) Natürlich treten in anderen Beziehungen bedeutende Verschiedenheiten auf. In der Ebene z. B. bilden die Werte des reellen und imaginären Teiles einer jeden analytischen Funktion der komplexen Variablen $x + iy$ stets *orthogonale* krummlinige Punktkoordinaten x_1, x_2; die Kurven $x_1 =$ const., $x_2 =$ const. bilden ein *Isothermensystem* (vgl. *G. Holzmüller,* Einführung i. d. Theorie d. isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, § 41, wo sich auch weitere Literatur hierzu findet). Ein analoger Satz für den Raum besteht nicht.

Wählt man in der Ebene eine feste Kurve E, auf der die Bogenlänge s von einem festen Punkt aus gemessen wird, und legt man in dem zu s gehörigen Kurvenpunkt T die Tangente, auf der irgend ein Punkt P von T die Entfernung r hat, so sind s und r ebene krummlinige Koordinaten des Punktes P. Sie verwendet samt dem Winkel θ, den obige Tangente etwa mit einer festen Tangente von E bildet, *E. Habich,* Ann. mat. p. appl. (2) 2 (1868—69), p. 134—149.

127) Der Name stammt von *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 5.

128) Baryc. Calcul, 1827. Schon vor *Möbius* hat *F. A. Förstemann* in seiner Inaug.-Dissert. „Theoriae punctorum centralium primae lineae", Halae 1817, in ähnlicher, aber nicht so weitgehender Art den Schwerpunktbegriff zu geom. Unters. verwendet. Vgl. „Bericht über Möbius' Nachlaß", *Möbius* Ges. W. 4, p. 711, wo sich auch nähere Angaben über die Entstehung des baryc. Calculs finden.

129) Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide, Nürnberg 1827, p. 7, 8. Schon 1826 in *Okens* Isis, p. 565 angekündigt.

130) Ann. math. p. appl. 18 (1827—28), p. 320—339, 359—367. Er rechnet hier mit den linearen Funktionen von x, y (oder x, y, z) wie mit Koordinaten, obgleich eine geometrische Deutung für sie noch fehlt. Vgl. auch die Anm. von *A. Schoenflies* in *J. Plückers* Ges. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 599 und *E. Kötter,* Bericht, Kap. XXIII, insbes. p. 200.

131) Zuerst J. f. Math. 5 (1829), p. 1—36 = Ges. Abh. 1, p. 124—158.

132) Ap. hist. (1837), Mémoire de géométrie, 2e partie, § XII, XIII (p. 728 f.). Ein Sonderfall davon schon auseinandergesetzt in Corr. math. phys. (publ. par *A. Quetelet*) 6 (1830), p. 81—84.

daß also

$$(1) \qquad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0,$$

worin A, B, C, D (nicht sämtlich verschwindende) Konstanten bedeuten, eine Ebene darstellt, und x, y, z Koordinaten derselben Art; dann müssen ξ, η, ζ solche Funktionen von x, y, z sein, daß durch deren Substitution in Gl. (1) eine lineare Gleichung in x, y, z hervorgeht, d. h. es muß

$$(2) \qquad \xi = \frac{f_1(x, y, z)}{f_4(x, y, z)}, \quad \eta = \frac{f_2(x, y, z)}{f_4(x, y, z)}, \quad \zeta = \frac{f_3(x, y, z)}{f_4(x, y, z)}$$

sein, wo die

$$(3) \qquad f_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

lineare Funktionen von x, y, z sind, deren Determinante $\Delta = |a_1 b_2 c_3 d_4|$ wir von Null verschieden voraussetzen. *Aus irgend einem System linearer Punktkoordinaten, z. B. den Parallelkoordinaten, gehen daher alle anderen durch gebrochene lineare Transformationen hervor*[133]). Da diese Transformationen von 15 wesentlichen Konstanten abhängen, so gibt es ∞^{15} verschiedene lineare räumliche Koordinatensysteme.

Da es gleichgültig ist, von welchen linearen Koordinaten wir ausgehen, so sollen x, y, z als (gleichschenklig-)rechtwinklige Koordinaten gedacht und

$$(4) \qquad a_i x + b_i y + c_i z + d_i = x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gesetzt werden. Die Zahlen x_i heißen die *homogenen linearen Punktkoordinaten*[134]). Die verschiedenen geometrischen Deutungen, welche die Zahlen x_i sowie deren Verhältnisse erfahren haben, beziehen sich auf die vier Ebenen α_i, für welche $x_i = 0$ ist und die wegen $\Delta \neq 0$ die Seitenflächen eines Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ (A_i Gegenecke von α_i) bilden. Man nennt es *Koordinaten-*[135]), *Fundamental-*[136]) oder *Grundtetraeder*, seine Flächen *Koordinatenebenen* und die x_i auch *Tetraeder-* oder *Vierebenenkoordinaten*[137]).

---

133) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom. (1835), p. 4, Nr. 7.

134) *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 205.

135) *J. Plücker*, J. f. Math. 5 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 126.

136) *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul, §§ 28, 33. — *K. Zindler*, Liniengeom. 1, p. 74, sagt *Grund-* oder *Zeigertetraeder* (vgl. Anm. 1).

137) *G. Salmon*, A treatise on the higher plane curves, Dublin 1852 (vgl. Anm. 176), deutsche Ausgabe unter dem Titel „Anal. Geom. d. höheren ebenen Kurven" von *W. Fiedler*, Leipzig 1873 (2. Aufl. 1882), nennt die entsprechenden Koordinaten in der Ebene, unbekannt mit den Begriffsbildungen von *Plücker* und *Möbius*, *Dreilinien-* und deren duale Form (Nr. 21) *Dreipunktkoordinaten* („trilinear" und „threepoint tangential coordinates"). Vgl. *W. Fiedler*, Zeitschr. Math. Phys. 4 (1859), p. 91—106. — Fällt die eine Dreieckseite ins Unendliche, so wird auch von *Zweilinienkoordinaten* (*bilinear coordinates*) gesprochen.

Übereinstimmend mit der *J. Plücker*schen Deutung der allgemeinen Punktkoordinaten (Nr. 4) sind die x_i proportional den mit festen Konstanten multiplizierten, parallel zu vier festen, aber beliebig wählbaren Richtungen gemessenen Abständen des Punktes von den Tetraederflächen[138]. Insbesondere sind die x_i die bzw. mit $\varrho_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}$ multiplizierten Normalabstände p_i[139] des Punktes $P(x, y, z)$ von den Ebenen $x_i = 0$, wobei a_i, b_i, c_i als Koordinaten der positiven Normalenstrecken dieser Ebenen (Nr. 3) gelten. Bei vorgegebenem Koordinatentetraeder darf man seine Ebenen willkürlich orientieren[140]. Nun teilen die vier Koordinatenebenen zusammen mit der unendlichfernen Ebene den Raum in 15 Gebiete, deren jedem eine Kombination der Koordinatenvorzeichen entspricht. Da es 16 solche Vorzeichenkombinationen gibt, so entsprechen einer Kombination keine Raumpunkte[141]. Beachtet man jedoch bloß die Verhältnisse

$$(5) \qquad \xi_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{x_4}, \quad \xi_3 = \frac{x_3}{x_4}$$

der x_i, so bleiben sie bei der Zeichenänderung sämtlicher x_i ungeändert und gestatten nur 8 Vorzeichenkombinationen. Nennt man nun von den obigen 15 Raumgebieten jene, die mit dem Tetraeder bloß in einer Ecke, Kante oder Fläche zusammenstoßen, bzw. Eck-, Kanten- oder Flächengebiete und denkt man sich jedes Eckgebiet mit dem zur Gegenfläche gehörigen Flächengebiet sowie je zwei zu Gegenkanten gehörige Kantengebiete längs der unendlichfernen Ebene zusammenhängend, so besteht der Raum bloß aus 8 Gebieten, die den 8 Vorzeichenkombinationen der ξ_i entsprechen[142].

---

138) Für Dreieckskoordinaten in der Ebene: *J. Plücker,* Syst. anal. Geom., p. 6. — Den Sonderfall, daß die festen Richtungen zusammenfallen und die Konstanten = 1 gewählt werden, behandelt *F. Casorati*, Rend. Ist. Lomb. (2) 10 (1877), p. 11—19, 40—45; Nouv. Ann. (2) 17 (1878), p. 5—20.

139) Von dieser Deutung ging *J. Plücker,* J. f. Math. 5 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 126, bei der ersten Einführung des entsprechenden ebenen Koordinatensystems aus. Vgl. ferner Syst. Geom. d. R. (1846), p. 5.

140) Die Gleichungen dieser Ebenen lassen sich stets in solcher Form schreiben, daß a_i, b_i, c_i die vorgegebene Orientierung der Ebene $x_i = 0$ bestimmen (Nr. 3). Man kann aber auch die Koordinatenvorzeichen eines einzigen, in keiner Koordinatenebene liegenden Punktes wählen (*J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 6, Nr. 9).

141) Orientiert man z. B., wie es gewöhnlich geschieht, die Ebenen derart, daß die Punkte im Innern des Tetraeders lauter positive Koordinaten besitzen, so gibt es keine Punkte mit lauter negativen Koordinaten.

142) *W. Fiedler*, Darst. Geom. 3 (3. Aufl.), p. 111. Vgl. auch *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul, § 34 = Ges. W. 1, p. 55—57; *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 7;

Je vier beliebige Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 (0, 0, 0, 0 ausgenommen) können immer als homogene Tetraederkoordinaten eines Punktes betrachtet werden[143]), weil sich immer eine Konstante ϱ so bestimmen läßt, daß

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

wird. Bezeichnet Δ_i die zu d_i gehörige Unterdeterminante von Δ, so ist

$$\varrho = \frac{\Delta}{\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \Delta_3 x_3 + \Delta_4 x_4}. \tag{7}$$

Sollen also vier Zahlen x_i gleich (nicht bloß proportional) den mit den Konstanten $\varrho_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}$ multiplizierten Normalabständen p_i von vier Ebenen $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ sein, so muß zwischen ihnen die Gleichung

$$\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \Delta_3 x_3 + \Delta_4 x_4 = \Delta \tag{8}$$

bestehen, die verschiedene geometrische Deutungen zuläßt[144]). Aus (6) und (7) folgt $\sum \Delta_i x_i = 0$ als Gleichung der unendlichfernen Ebene[145]). Ist umgekehrt die Gleichung, die zwischen den Koordinaten x_i bestehen soll, gegeben, so bestimmen sich daraus die Konstanten ϱ_i, mit denen die Abstände p_i zu multiplizieren sind[146]).

Der Punkt E, dessen homogene Tetraederkoordinaten $\varrho x_i = 1$ sind, heißt *Einheitspunkt*. *W. Fiedler*[147]) hat durch die ausdrückliche Hervorhebung dieses Punktes (sowie der *Einheitsebene*, Nr. 21) das tetraedrische Koordinatensystem bedeutend durchsichtiger gestaltet, insbesondere die Übersicht über die möglichen Sonderfälle (Nr. 6)

W. Killing, Lehrbuch d. analyt. Geom. in homogenen Koordinaten, Paderborn 1900—1901, 1, § 2; 2, § 2.

143) Dabei wird vorausgesetzt, daß diese vier Zahlen auf eine durch die Bezeichnung bestimmte Weise den Koordinatenebenen zugeordnet sind. Sonst bestimmen diese Zahlen 24 (in der Ebene 6) Punkte, die einer Fläche (Kurve) 2. O. angehören. Vgl. *W. Fiedler*, a. a. O., p. 113, 131. — Über die Elementengruppen aus permutierten Koordinaten handeln: *G. Veronese*, Ann. mat. p. appl. (2) 11 (1883), p. 93—236; *P. H. Schoute*, L'Enseign. math. 5 (1903), p. 106—110. Wegen Lagenbeziehungen zweier Punkte (oder Ebenen), deren Koordinaten z. B. reziprok sind, vgl. *W. Fiedler*, a. a. O., p. 115.

144) Vgl. *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., Nr. 10 f. (für d. Ebene); *J. Toeplitz*, Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 253—260; *L. Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), p. 160; ferner Anm. 148.

145) Vgl. Anm. 42.

146) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., Nr. 10—13.

147) Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 170; Darst. Geom., 1. Aufl. (1871), p. 532. Erwähnt wird dieser Punkt schon bei *K. G. Chr. v. Staudt*, Beiträge z. Geom. d. Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857, p. 267.

erleichtert. Da die Abstände e_i des Punktes E von den Koordinatenebenen proportional $\frac{1}{\varrho_i}$ sind, so ist

(9) $$\varrho x_i = \varrho_i p_i = \frac{p_i}{e_i}$$ [148]).

Betrachtet man die Abstände e_i als Längeneinheiten, wodurch die Abstände p_i gemessen werden, so sind die Tetraederkoordinaten eines Punktes proportional seinen durch die Abstände des Einheitspunktes gemessenen Abständen von den Koordinatenebenen. Die x_i heißen deshalb auch *tetrametrische Punktkoordinaten*[149]). Statt als Normalabstände kann man die e_i und p_i auch als die parallel zu vier beliebigen festen Richtungen gemessenen Entfernungen der Punkte E und P von den Koordinatenebenen annehmen.

E darf beliebig außerhalb der Koordinatenebenen gewählt werden; seine Wahl ersetzt die der Konstanten ϱ_i. Das Koordinatentetraeder und der Einheitspunkt bilden die *Basis der linearen Punktkoordinaten.*

Die ausgezeichnete Rolle, die nach der obigen Definition der x_i (Gl. 6) die unendlichferne Ebene spielt, indem ihren Punkten unendlichgroße Koordinatenwerte entsprechen, kann nach *J. Plücker*[150]) dadurch aufgehoben werden, daß man noch eine fünfte Ebene

$$x_5 \equiv a_5 x + b_5 y + c_5 z + d_5 = 0$$

hinzunimmt und

(10) $$\varrho x_i' = \frac{x_i}{x_5} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

setzt; dann sind die x_i' auf dasselbe Tetraeder bezogene lineare Koordinaten, die aber für die Punkte von $x_5 = 0$ unendlichgroß werden. Durch die Wahl der fünf Ebenen $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_5 = 0$ sind die homogenen Koordinaten x_i' ebenso bestimmt, wie früher die x_i durch die Wahl des Tetraeders und des Einheitspunktes (15 Konstante)[151]).

Die Werte von $r\,(r > 4)$ linearen Funktionen x_i der Parallelkoordinaten eines Punktes heißen *lineare überzählige Punktkoordi-*

---

148) Bezeichnen f_i die Inhalte der Tetraederflächen und v das Tetraedervolumen, so läßt sich Gl. (8) in der Form schreiben $\sum e_i f_i x_i = v$. Vgl. *W. Fiedler,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 171; Darst. Geom. (3. Aufl.) 3, p. 157.

149) *W. Fiedler,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 170, oder Darst. Geom., 1. Aufl., p. 532.

Eine andere auf den R_n ausdehnbare Deutung der Koordinaten x_i gibt *G. Kohn,* Sitzungsber. Ak. (math.-nat.) Wien 104 (1895), p. 1167—1170.

150) Syst. anal. Geom., Nr. 17, 18 (für die Ebene).

151) *J. Plücker,* a. a. O., p. 13.

naten[152]) oder *Polyederkoordinaten*[153]). Sie stellen die mit festen Konstanten multiplizierten Abstände des Punktes von mehr als vier Ebenen dar. Werden sie homogen verwendet, so bestehen zwischen ihnen $r-4$ lineare Bedingungsgleichungen. Zahlreiche Anwendungen dieser Koordinaten sowie der entsprechenden in der Ebene finden sich bei *É. Bobillier*[154]), *J. Plücker*[155]), *P. Serret*[156]) u. a.[157]).

Die Verhältnisse der Tetraederkoordinaten x_i (oder x_i') eines Punktes P lassen sich als Doppelverhältnisse deuten[158]). Werden

152) In der Ebene: *J. Plücker*, J. f. Math. 5 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 153. Solche Koordinaten sind auch die Teilverhältnisse, welche *M. Chasles*, Traité de géom. sup., Paris 1852, 2ᵉ éd. 1880, p. 290—300, verwendet.

153) *P. Serret*, Géométrie de direction, Application des coordonnées polyédriques etc., Paris 1869, p. 19.

154) Vgl. Anm. 130.

155) Zuerst erwähnt J. f. Math. 5 (1829), Nr. 42 = Ges. Abh. 1, p. 153 und Syst. anal. Geom. (1835), p. 9. Seine „Methode der abgekürzten Bezeichnung" läßt sich jedoch ebenfalls als Einführung passend gewählter überzähliger (wenn auch nicht immer linearer) Punktkoordinaten ansehen. Dasselbe gilt von einigen Teilen des *Graßmann*schen Kalküls.

156) Géométrie de direction, Paris 1869.

157) „Quadrilinear" und „Pentahedral coordinates" behandelt *W. A. Witworth*, The Oxf. Cambr. Dublin Mess. 1 (1862), p. 193—203; 3 (1866), p. 71—82, 146—151, 173—177; *E. Laguerre*, Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 319 f. = Oeuvres 2 (Paris 1905), p. 281; *A. Clebsch*, Math. Ann. 4 (1871), p. 329 ff.; *F. Klein*, Vorl. üb. d. Ikosaeder, Leipzig 1884, p. 162, 163; wegen Anwendung der Pentaederkoordinaten in der Theorie d. Fl. 3. O. vgl. III C 7, *Meyer*; *F. Morley*, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 290 f. — *A. Maatz*, Zur Geschichte der Polyederkoordinaten, Rostock 1903, war dem Verfasser nicht zugänglich.

158) Vgl. *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 169, und Darst. Geom. (1. Aufl.), p. 532, der an *K. G. Chr. v. Staudt* (Anm. 147, p. 266) und *W. R. Hamilton*, Elements of Quaternions, ed. by *W. E. Hamilton*, Dublin 1866, p. 24 f. u. 62 f. („anharmonic coordinates"), anknüpft und gleichzeitig die dualen Koordinaten (Nr. 21) betrachtet.

Der Begriff projektiver Koordinaten ist schon vollkommen klar in *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul (1827), 8. Kap., § 235 ff. („der abgekürzte barycentrische Calcul") enthalten. Wenn er in der Ebene vier mit Gewichten versehene Punkte A, B, C, D annimmt, zwischen denen die Gleichung $A+B+C+D=0$ besteht, und irgend einen fünften Punkt E durch die Gleichung

$$\varepsilon A+\varepsilon' B+\varepsilon'' C+E=0$$

bestimmt (§ 239), so bemerkt er dazu (§ 242), daß $\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}$ und $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ Doppelverhältnisse sind, und zwar

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}=(A, C, BD, BE)=(B\cdot ACDE).$$

Wird D als Einheitspunkt angesehen, so stimmt diese Form genau mit der *W. Fiedlers* überein. Das Analoge zeigt *Möbius* (§ 244) für den Raum. Er ist

nämlich die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in irgend einer Reihenfolge mit $A_i A_k A_l A_m$ und der Einheitspunkt mit E bezeichnet, so ist

$$(11)\qquad \frac{x_i}{x_k} = \frac{p_i}{e_i} : \frac{p_k}{e_k} = \frac{e_k}{e_i} : \frac{p_k}{p_i},$$

also gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen, die sich durch die Kante $[A_l A_m]$ nach den Punkten A_i, A_k, E, P legen lassen, d. h.

$$(12)\qquad \frac{x_i}{x_k} = (A_l A_m \cdot A_i A_k E P).$$

Die drei in Gl. (5) mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichneten Koordinaten, die die Lage eines Punktes gegenüber dem Koordinatentetraeder und Ein-

---

sich auch (§ 235) vollkommen klar über die Rolle dieser Koordinaten bei geometrischen Untersuchungen, nämlich zur „Entwicklung aller derjenigen Eigenschaften einer Figur, welche sie mit jeder ihr kollinear verwandten Figur, als solchen, gemein hat".

Da die Rechnung mit Punkten bei *Möbius* nur eine abgekürzte Schreibweise dafür ist, daß alle Gleichungen für die parallel zu irgend einer Richtung gemessenen Entfernungen der Punkte von jeder beliebigen Geraden gelten sollen, so erhält man daraus unmittelbar die im Text gegebene Ableitung, wenn man diese Gerade nacheinander mit den Seiten des Fundamentaldreiecks zusammenfallen läßt.

M. Chasles[152]) gelangt durch kollineare Umformung des Cartesischen Systems im wesentlichen zu demselben System. Statt des Einheitspunktes E treten drei in den Kanten $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ beliebig gewählte Punkte auf, die als Projektionen von E aus den Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ auf die gegenüberliegenden Tetraederkanten zu betrachten sind. Wird ebenso der laufende Punkt P projiziert, so sind die Doppelverhältnisse der auf den Kanten durch A_4 liegenden Punktquadrupel die *Chasles*schen Koordinaten, also mit den obigen ξ_1, ξ_2, ξ_3 identisch. *Chasles* stellt die Tatsache, daß diese Doppelverhältnisse projektive Koordinaten sind, in verschiedenen Formen dar, die darauf hinauskommen, daß sich das Doppelverhältnis der im Text erwähnten vier Ebenen durch $[A_l A_m]$ durch das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit irgend welchen Geraden des Raumes ersetzen läßt; er betrachtet auch die Sonderfälle, daß A_4 oder $[A_1 A_2 A_3]$ unendlichfern liegen (vgl. Anm. 188). Vgl. auch Traité de géométrie supérieure, Paris 1852 (2e éd. 1880), p. 341 f.

Es sei ferner bemerkt, daß die als weitgehende Verallgemeinerung des *Möbius*schen abgekürzten bar. Kalk. aufzufassenden „harmonischen Gleichungen" von *H. Graßmann* (Ausdehnungsl. v. 1844, § 168 f. = Ges. W. 1^1, p. 275 f.) implizite die projektiven Koordinaten enthalten, da die Verhältnisse der „harmonischen Koeffizienten" projektive Invarianten sind.

Erst durch *W. Fiedlers* systematische Darstellung dieser Koordinaten für die verschiedenen Grundgebilde fanden sie allgemeine Verbreitung und Anwendung, sodaß sie öfter auch mit seinem Namen belegt werden. Vgl. wegen *Fiedlers* Verdienste in dieser Richtung *G. Hauck,* Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 424—426, und *W. Fiedler,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 14 (1905), p. 497—500.

heitspunkt bestimmen, sind also *Doppelverhältnisse*[159]) (*Würfe*) und als solche invariant gegenüber projektiven Transformationen des Raumes. Man nennt daher ξ_1, ξ_2, ξ_3 *Doppelverhältnis-* oder *Wurfkoordinaten*[160]), auch *nichthomogene*[161]) (die x_i *homogene*) *lineare projektive*[162]) *Koordinaten*. Da dieses Koordinatensystem invariant (Nr. 1) gegenüber projektiven Punkttransformationen des Raumes ist, so eignet es sich besonders zur analytischen Behandlung der projektiven Geometrie[163]).

Für die Punkte der Koordinatenebene α_4 nehmen ξ_1, ξ_2, ξ_3 unendlichgroße Werte an.

159) Alle linearen, nichthomogenen Punktkoordinaten müssen sich auf das Schema der Gl. (12) bringen lassen. Dies erscheint zuweilen dadurch verschleiert, daß die in (12) auftretenden Ebenenquadrupel z. B. mit Geraden geschnitten und statt der Doppelverhältnisse der Ebenen die der Schnittpunkte verwendet werden. Beispiele hierfür bei *M. Chasles*, Ap. hist., p. 730 f. u. Traité de géom. sup., Paris 1852, 2ᵉ éd. 1880, p. 285 f. (insbes. Fußn. p. 286).

160) *v. Staudt*, Anm. 158; sein Hauptverdienst gegenüber seinen Vorgängern beruht auf dem Nachweis, daß die Wurfkoordinaten gleicherweise zur Bestimmung der von ihm geometrisch definierten imaginären Elemente dienen. Vgl. hierzu *J. Lüroth*, Math. Ann. 8 (1875), p. 207—214; 11 (1877), p. 84—110; *R. Sturm*, ebenda 9 (1876), p. 343—346. Wegen der sich hieraus ergebenden Fortschritte vgl. III AB 4a, *Fano*, Nr. 14.

161) Die sechs einem Punkte *P* zugehörigen Doppelverhältnisse sind halbhomogene Koordinaten (Anm. 4), ebenso die baryzentrischen Koordinaten (Nr. 6). Vgl. *F. Giudice*, Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 289 f., 293.

162) *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 152.

163) Die Maßverhältnisse des euklidischen Raumes behandeln mit diesen Koordinaten: *R. Gerlach*, Die Metrik in projektiven Koordinaten, Diss. Zürich 1899 (sehr eingehend für Punkt-, Ebenen- und Strahlenkoordinaten); *W. Fiedler*, Zeitschr. Math. Phys. 8 (1863), p. 45—53; Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 170—179; Darst. Geom. (3. Aufl.) 3, p. 77, 107; *E. d'Ovidio*, G. mat. 8 (1870), p. 250—284; 11 (1873), p. 197—220; *H. Faure*, Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 140—144; *F. Giudice*, Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 278—306; 13 (1899), p. 379; Atti Acc. Torino 34 (1899), p. 277—291; *Vogt*, Nouv. Ann. (3) 11 (1892), p. 148—158; *L. Pilgrim*[65]), p. 83 ff. — *S. Gundelfinger*, Vorl. a. d. anal. Geom. d. Kegelschnitte, herausgeg. von *Fr. Dingeldey*, Leipzig 1895, behandelt damit sämtliche metrischen Probleme über Kegelschnitte in der Ebene. Wegen Behandlung der *Cayley-Klein*schen Maßgeometrie (III AB 1, *Enriques*, Nr. 22, 23) mittels projektiver Koordinaten seien erwähnt: *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 573—625; Nicht-Euklidische Geometrie, Autogr. Vorl., geh. 1889/90, ausgearb. von *Fr. Schilling*, 2. Abdr., Göttingen 1893; *E. d'Ovidio*, Studio sulla geometria proiettiva, Ann. mat. p. appl. (2) 6 (1873), p. 72—101; Le funzione metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante, Mem. Acc. Lincei (fis. mat. nat.) 1 (1876—77); vgl. auch Math. Ann. 12 (1877), p. 403—418. *F. Lindemann*, Sitzungsber. phys.-med. Soc. Erlangen 1873 (28. Juli); Math. Ann. 7 (1874), p. 56—144; *Clebsch-Lindemann* 2^1, p. 461 f.; *H. Stahl*, Über die Maßfunktionen der analytischen Geometrie, Progr. Berlin 1873.

Mittels der Definition $x_i = \frac{p_i}{e_i}$ lassen sich diese Koordinaten unter Voraussetzung von Maßbegriffen auch direkt, ohne Zurückgehen auf Parallelkoordinaten, einführen und als lineare Koordinaten erkennen[164]). Da ferner nach *v. Staudt* das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe unabhängig von allen Maßbegriffen definierbar ist (III A B 5, *Schoenflies*, Nr. 17) und nach *F. Klein*[165]) auch die Annahmen über die unendlichfernen Punkte einer Geraden dafür irrelevant sind, so kann die Einführung projektiver Koordinaten allein auf Grund der Axiome der Anordnung, Verknüpfung und Stetigkeit[166]) geschehen und damit die analytische Geometrie begründet werden[167]).

F. Enriques[168]) faßt die Einführung der homogenen projektiven Koordinaten als Herstellung einer Kollineation zwischen dem Punktraum und dem analytischen Raum (Nr. 3) der homogenen Zahlenquadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) auf.

Der Übergang von einem System homogener linearer Koordinaten zu einem anderen (Nr. 37) wird nach *J. Plücker* (vgl. Gl. (3)) durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante be-

---

164) Diesen Vorgang befolgen die meisten modernen Lehrbücher der anal. Geometrie, so: *W. Fiedler*, Darst. Geom. (3. Aufl.) 3, p. 69 ff.; Anal. Geom. der Kegelschnitte (nach *G. Salmon*), 7. Aufl., 1. T., Leipzig 1907, p. 142 f.; *H. Cranz*, Lehrb. d. anal. Geom. der Ebene (nach *S. Gundelfinger*) 1. T., Stuttgart 1892, p. 162—183; *W. Killing*, Lehrb. d. anal. Geom. in homogenen Koordinaten 1, 2, Paderborn 1900—01; *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen 1, Leipzig 1902, und die meisten der in Anm. 16 erwähnten Lehrbücher; ferner *F. Morley*, Trans. Amer. math. Soc. 4 (1903), p. 288—296. Hingegen gehen von Parallelkoordinaten aus: *Clebsch-Lindemann* 1^1, p. 64, 2^1, p. 80; *O. Staude*, Anal. Geom., p. 301.

165) Math. Ann. 4 (1871), p. 623 f.; 6 (1873), p. 142—145. *F. Schur*, ebenda 39 (1891), p. 113—124.

166) Benennungen nach *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, 2. Aufl. 1903, 3. Aufl. 1909 (Bd. 7 von „Wissenschaft und Hypothese").

167) *K. G. Chr. v. Staudt*[147]), p. 266 f.; *M. Pasch*, Vorl. über neuere Geom., Leipzig 1882, § 22; *J. Lüroth*, Math. Ann. 8 (1875), p. 207—218; *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1873), p. 142; *Clebsch-Lindemann* 2^1, p. 433—461. (Vgl. ferner III A B 5, *Schoenflies*, Nr. 21; III A B 1, *Enriques*, Nr. 19.) Eine davon völlig verschiedene, sich auf den Entfernungsbegriff stützende Begründung der anal. Geometrie gibt *J. de Tilly*, Mém. cour. et autres Ac. Belg. 47 (1892) = Mathesis (2) 2 (1892), Suppl., p. (1)—(80). Vgl. auch *F. Klein*, Elementarmath. 2, p. 327 ff.

168) Lezioni di geometria proiettiva, Bologna 1898 (2. Aufl. 1904), p. 352, insbes. deutsche Übers. (Vorl. über proj. Geom.) von *H. Fleischer*, Leipzig 1903, p. 338 ff.; Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 222. Vgl. hierzu die Bemerkung von *O. Hölder*, Math. Ann. 65 (1908), p. 164 Fußn.

wirkt. Umgekehrt läßt sich jede solche Substitution

$$x_i = a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_3' + a_{i4}x_4' \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{13}$$

als Übergang zu einer neuen Koordinatenbasis deuten. Die i^{te} Ecke A_i' des neuen Koordinatentetraeders hat im alten System die Koordinaten $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}$, der neue Einheitspunkt die Koordinaten

$$\sum a_{i1}, \; \sum a_{i2}, \; \sum a_{i3}, \; \sum a_{i4}$$ [169]).

Die Einführung linearer projektiver Koordinaten in der Ebene und Geraden geschieht völlig analog wie im Raum und kann entweder von den Parallel- bzw. Abstandskoordinaten (Nr. 2) ausgehend oder unmittelbar geschehen[170]). Letztere Art läßt sich ebenso für die Strahlen eines Bündels[171]) oder Büschels und für alle übrigen Grundgebilde der verschiedenen Stufenzahlen (Nr. 21) durchführen[170]). Erstere Art ist unmittelbar auf den R_n (Nr. 3) anwendbar.

Bezeichnen $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ homogene Parallelkoordinaten der nicht derselben Ebene angehörigen Punkte $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}$, so lassen sich die Koordinaten x, y, z, t aller Punkte der Geraden $P^{(1)}P^{(2)}$ oder der Ebene $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$ oder des Raumes in der Form

$$\varrho x = \sum \lambda_i x^{(i)}, \quad \varrho y = \sum \lambda_i y^{(i)}, \quad \varrho z = \sum \lambda_i z^{(i)}, \quad \varrho t = \sum \lambda_i t^{(i)} \tag{14}$$

darstellen, wenn bzw. $i = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3, 4$ gesetzt wird[172]).

---

169) *J. J. Hemming*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 16 (1871), p. 41—49; *W. Fiedler*, Darst. Geom. (1871), p. 566 f.; 3. Aufl., 3, § 63; Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 145 ff. — Vgl. auch *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1844, § 118; Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 238, und die Zusammenstellung bei *P. Muth*, Grundlagen, p. 91 f.

170) Vgl. *W. Fiedler*[158]) und die Anm. 16 u. 164 zitierten Lehrbücher. Für die Gerade ist die projektive Koordinate $\xi = (A_1 A_2 EP)$; *O. Staude* (III C 2, Nr. 22 und Anal. Geom., p. 35, 293) nennt sie *Zweiecks-*, für das Strahl- und Ebenenbüschel *Zweiseits-* bzw. *Zweiflachskoordinate.*

171) Projiziert man eine Ebene ε mit der Koordinatenbasis A_1, A_2, A_3, E aus einem Punkt S und wählt im Bündel (S) die mit jenen Punkten inzidenten Strahlen a_1, a_2, a_3, e als Basis (Koordinatendreikant und Einheitstrahl), so haben irgend ein Punkt P in ε und der mit ihm inzidente Strahl p in (S) die gleichen Koordinaten

$$\xi_1 = (A_2 \cdot A_1 A_3 EP) = (a_2 \cdot a_1 a_3 ep), \quad \xi_2 = (A_1 \cdot A_2 A_3 EP) = (a_1 \cdot a_2 a_3 ep).$$

Daraus folgt, daß jedes System linearer Koordinaten in einer Ebene als Zentralprojektion eines ebenen Parallelkoordinatensystems betrachtet werden darf. *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 8 (1832), p. 338—341 = Werke 3, p. 138—141; allgemeiner bei *W. Fiedler*, Darst. Geom. (1871), p. 539.

172) Als Zusammenfassung der vier Gl. (14) in eine läßt sich der (abgekürzte) baryzentrische Kalkül von *A. F. Möbius* (1827) und die Rechnung mit Punkten bei *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1844, § 107, auffassen. Eingehende

Die *homogenen Parameter*[173]) (λ_1, λ_2), $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sind dann ebenfalls homogene lineare Koordinaten der Punkte einer Geraden bzw. einer Ebene oder des Raumes[174]).

6. Besondere Arten linearer Punktkoordinaten. Sämtliche Arten linearer Punktkoordinaten müssen aus den projektiven durch besondere Wahl der Koordinatenbasis hervorgehen (Nr. 5). Bei der folgenden Aufzählung der wichtigsten Fälle sollen mit E_1, E_2, E_3 und P_1, P_2, P_3 stets die Projektionen des Punktes E bzw. P auf die Kanten A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 des Koordinatentetraeders aus deren Gegenkanten bezeichnet werden (Fig. 3).

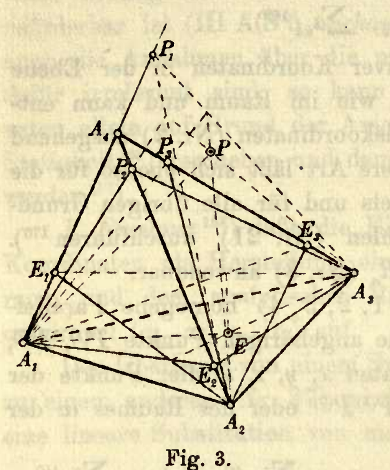


Fig. 3.

a) *Sämtliche Ecken des Koordinatentetraeders liegen im Endlichen.* Wählt man E als Mitte der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel[175]), so sind die x_i proportional den Abständen des Punktes P von den Koordinatenebenen (*Vierebenenkoordinaten*[176]) [englisch: quadriplanar coordinates] oder *Normalkoordinaten*[177])).

Berücksichtigung finden diese Parameterdarstellungen bei *P. Muth*, Grundlagen, und *O. Staude,* Anal. Geom. (insbes. Anm. 80). S. auch *Clebsch-Lindemann,* 2^1, p. 99.

173) Vgl. Anm. 35.

174) Wegen ihrer Verwendung im R_n (Nr. 3) vgl. etwa *E. Bertini,* Intr. alla geom. proiettiva degli iperspazi, Pisa 1907, p. 3 f.

175) Für E als Mitte einer der angeschriebenen Kugeln würden, statt der Punkte im Innenraum des Tetraeders, die Punkte jenes der acht Gebiete (Nr. 5), dem die Kugel angehört, Koordinaten von gleichem Vorzeichen besitzen.

176) *W. Fiedler,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 148; Darst. Geom. (3. Aufl.) 3, p. 107; vgl. Anm. 137. Sie finden sich bei *J. Plücker,* Anm. 131; Syst. anal. Geom., p. 7, und haben durch die Lehrbücher von *G. Salmon* zumal in der deutschen Bearbeitung von *W. Fiedler* weite Verbreitung erhalten [1) A treatise on conic sections etc., London 1848, 2. Aufl. 1850, 3. Aufl. 1855, 6. Aufl. 1879. Die Ausgabe von 1855 liegt der ersten deutschen Bearb. „Anal. Geom. d. Kegelschnitte", Leipzig 1860 zugrunde, wovon der 1. Teil 1907 in 7. Aufl. erschienen. 2) A treatise on the higher plane curves etc., Dublin 1852; 2. Aufl. 1873, 3. Aufl. 1879. Nach der 2. von *A. Cayley* mitbesorgten Ausgabe erschien die deutsche Bearb. „Anal. Geom. d. höheren ebenen Kurven", Leipzig 1873, 2. Aufl. 1882. 3) A treatise on the analytic geometry of three dimensions, Dublin 1862, 3. Aufl. 1874, 4. Aufl. 1882. Deutsche Bearb. „Anal. Geom. des

Wählt man E als Schwerpunkt des Koordinatentetraeders, so lassen sich die x_i entweder als *baryzentrische*[178]) oder als *Volumkoordinaten*[179]) auffassen. Im ersten Fall sind die x_i ponderable Massen, mit denen man sich die Ecken des Koordinatentetraeders belegt denkt, damit P ihr Schwerpunkt wird[180]); im zweiten Fall sind die x_i proportional den Volumen der Tetraeder, die P mit den Seitenflächen des Koordinatentetraeders bestimmt[181]). Damit im ersten Fall P das Gewicht eins erhalte oder im zweiten Fall die Zahlen x_i den angegebenen Volumen gleich seien, muß die Beziehung $\sum x_i = 4$ bestehen[148]); $\sum x_i = 0$ ist die Gleichung der unendlichfernen Ebene[182]). Diese Koordinaten sind invariant gegenüber affinen Transformationen,

---

Raumes", Leipzig 1. T. 1863, 2. T. 1865; 4. Aufl. d. 1. T. 1898, 3. Aufl. d. 2. T. 1880.] Vgl. ferner: *H. Faure*, Nouv. Ann. (2) 2 (1863), p. 289—300; *E. Walker*, The Oxf. Camb. Dublin Mess. 2 (1864), p. 40—44; *W. A. Whitworth*, ebenda 1 (1862), p. 162; *R. Heger*, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 1—41.

177) Dieser Name wird gebraucht III C 1, *Dingeldey*, Anm. 80, und von *J. de Vries*, Arch. Math. Phys. (3) 9 (1905), p. 33—36.

178) *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 59, 421.

179) *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 148.

180) *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul, § 33; IV 4, *Jung*, Nr. 6. Vgl. die Darlegung des Zusammenhanges zwischen baryzentrischen und Dreilinienkoordinaten bei *W. Fiedler*, Anal. Geom. d. Kegelschn. von *G. Salmon*, Leipzig 1860, p. 576 f. Eingehend behandelt werden sie bei *Heffter-Koehler* 1, p. 35, 223. Anwendungen von ihnen machten (außer *Möbius*) *G. Darboux*, Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 323—392; *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 215—242; Ann. mat. p. appl. (2) 15 (1887—88), p. 313—323 (auf Kurven im R_n); Mathesis (1) 10 (1890), p. 177—190 (auf die Geometrie des Dreiecks); Vorl. über natürliche Geometrie, deutsche Ausg. von *G. Kowalewski*, Leipzig 1901, p. 111—135, 297. Die baryz. Koordinaten eines Punktes in bezug auf ein Dreieck stehen in einfacher Beziehung zu den *Trägheitskoordinaten* dieses Punktes, d. h. seinen rechtwinkligen Koordinaten in bezug auf die Trägheitshauptachsen der Dreiecksfläche.

In der Ebene heißen die Verhältnisse der reziproken baryz. Koordinaten *Ceva*sche Koordinaten. Vgl. *F. Giudice*, Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 290 f.

181) *A. F. Möbius*, a. a. O. — *K. W. Feuerbach*, Anm. 129, p. 7, nennt den vierten Teil dieser Volumen die den Tetraederecken „koordinierten Koeffizienten" des Punktes P und benutzt dieses „neue Koordinatensystem" (p. 8) zur Ableitung zahlreicher Sätze über das Tetraeder. Mit diesem Koordinatensystem beschäftigen sich: *A. Cayley*, On the six coord. of a line, Nr. 78, Trans. Cambr. Phil. Soc. 11² (1869), p. 290—323 = Math. pap. 7, p. 96 f.; *Osw. Hermes*, Die Verhältniskoord. in der Ebene, Progr. Berlin 1860; *N. M. Ferrers*, Treatise on trilinear coordinates etc., London 1861 (4. Aufl. 1890), p. 94; *L. Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), p. 159—162; *L. Schendel*, Elem. der anal. Geom. der Ebene in trilin. Koord., Jena 1874; *J. W. Sharpe*, Mess. of math. 9 (1879—80), p. 10—23.

182) *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul, § 34 = Ges. W. 1, p. 57.

daher zur Behandlung der affinen Geometrie geeignet (III A B 4b, *Fano*, Nr. 7).

Wählt man E auf einer durch A_4 parallel zu α_4 gelegten Geraden und $\overline{A_4E}$ als Längeneinheit, dann schneiden die Ebenen A_1A_2P, A_2A_3P, A_3A_1P auf jener Geraden Punkte aus, deren Entfernungen von A_4 bzw. ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind[183]).

Schneidet die Gerade PE die Ebene α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in Q_i, so ist $\xi_i = (Q_4Q_iEP)$ $(i = 1, 2, 3)$. Wird E unendlichfern gewählt, so ist $\xi_i = \frac{\overline{Q_iP}}{\overline{Q_4P}}$ [184]).

Durch reelle kollineare räumliche Transformationen sind alle Fälle (reeller) linearer Koordinaten auf den Fall *regulärer tetraedrischer Koordinaten*[185]) zurückführbar, in dem das Koordinatentetraeder regelmäßig und dessen Mitte Einheitspunkt ist[186]).

b) *Die Ecke A_4 des Koordinatentetraeders liegt unendlichfern*[187]). Wählt man E derart, daß die Punkte E_1, E_2, E_3 auf derselben Seite von α_4 liegen und von den Punkten A_1, A_2, A_3 die gleiche als negative Längeneinheit zu betrachtende Entfernung besitzen (s. Nr. 22, Fig. 5), so ist

$$(1) \qquad \xi_i = -\frac{1}{\overline{A_iP_i}} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Diese Punktkoordinaten[188]) haben eine ähnliche Form wie die *Plücker*schen Ebenenkoordinaten (Nr 19).

---

183) *M. Chasles*, Ap. hist., p. 734. Das im Traité de géom. sup., Paris 1852, 2ᵉ éd. 1880, chap. 21, 23 angegebene System lin. Koord. in der Ebene ergibt sich, wenn man die zu den Ecken A_2, A_1 des Koordinatendreiecks $A_1A_2A_3$ gehörigen Doppelverhältnisse ξ_1 bzw. ξ_2 von je vier Strahlen (vgl. Anm. 171) durch die ihnen gleichen einfachen Verhältnisse ersetzt, welche diese Strahlen auf zwei bzw. zu $[A_1E]$ und $[A_2E]$ parallelen Geraden bestimmen.

184) *J. Plücker* und *F. Casorati*, Anm. 138.

185) *W. Fiedler*, Darst. Geom. (3. Aufl.) 3, p. 128, 95.

186) Bezeichnen die x_i $(i = 1, 2, 3)$ reguläre Dreieckskoordinaten in der Ebene, so sind die Koordinaten der beiden absoluten Punkte dieser Ebene, unter w eine dritte Einheitswurzel verstanden,

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : w : w^2 \quad \text{und} \quad = 1 : w^2 : w.$$

Vgl. *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. höh. eb. Kurven, Leipzig 1873, p. 6, und die Verallgemeinerung von *P. Mansion*, Mess. of math. 5 (1876), p. 159. — *H. M. Jeffery*, The Quart. J. p. appl. math. 10 (1870), p. 1 f., wählt als Koordinatentetraeder eines mit normalen Gegenkanten.

187) *W. Fiedler*, a. a. O., p. 123, nennt diese Koordinaten *prismatische* und die entsprechenden in der Ebene (p. 91) *Streifenkoordinaten*. S. auch Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 164.

188) Sie finden sich schon bei *M. Chasles*, Ap. hist. (1837), Mém. de

Wählt man A_4 als den unendlichfernen Punkt der zur Ebene des Dreiecks $A_1A_2A_3$ senkrechten Richtung und E derart, daß die Strecken $\overline{A_iE_i}$ $(i=1,2,3)$ gleichgerichtet und gleich den zu den Ecken A_i gehörigen Höhen des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind, so ist

$$(2) \qquad \xi_i = \frac{\overline{A_iE_i}}{\overline{A_iP_i}} = \cot \varphi_i \qquad (i=1,2,3).$$

Hierin bezeichnet φ_i den Winkel, den die Halbebene $\overline{A_kA_lP}$ mit der Halbebene $\overline{A_kA_lA_i}$ bildet, und dessen positiver Drehsinn von letzterer aus nach der Seite von E hin zu nehmen ist[188a]). Die entsprechenden Koordinaten in der Ebene, das sind die Kotangenten der Winkel φ_1 und φ_2, welche die von zwei festen Punkten A_2 und A_1 aus nach dem laufenden Punkt P gezogenen Halbstrahlen mit der Strecke A_1A_2 bilden, werden als *Winkel-*[189]) oder *biangulare Koordinaten* bezeichnet[189a]).

---

géom. Nr. 234, nur sind $\overline{A_iE_i}$ als positive Einheiten gewählt. — Die analogen Koordinaten in der Ebene behandelt *K. Schwering*, Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 278—286; Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten, Leipzig 1884. *M. d'Ocagne*, Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 493—502; (3) 11 (1892), p. 70—75, etc. (Anm. 409), behandelte sie als „coordonnées parallèles". — Wegen der räumlichen Koordinaten s. auch *H. Heddaeus*, Theorie u. Anwendung e. bes. Ebenenkoordinatensystems, Diss. Marburg 1889. — Daß man in der Ebene zwei der Koordinatenlinien parallel wählen dürfe, bemerkt schon *J. Plücker*, J. f. Math. 5 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 127. — Vgl. ferner *V. Schlegel*, Bull. Soc. math. France 23 (1895), p. 216—219.

188a) Diese Koordinaten benutzt *F. Folie*, Fondements d'une géométrie supérieure Cartésienne, Mém. Ac. Belg. 39 (1872), Extrait p. 125 f., als „coordonnées triédriques particulières".

189) Diese Koordinaten, bei denen also φ_1 und φ_2 in entgegengesetztem Sinn gemessen werden, behandeln, ohne des Zusammenhanges mit den projektiven Koordinaten zu gedenken: *W. Walton, P. Ford, H. M. Jeffery*, The Quart. J. p. appl. math. 9 (1868), p. 47—57 [u. Nouv. Ann. (2) 10 (1871), p. 122—135], 13 (1875), p. 75—87, 130—149; *F. Folie*[188a]), Extrait p. 63 (als „coordonnées bipolaires"); *R. W. Genese*, Proc. London Math. Soc. 12 (1881), p. 157—168; The Quart. J. p. appl. math. 18 (1881), p. 150—154; *J. C. Wilson*, On the traversing of geometrical figures, Oxford 1905, p. 132 f. — Auch wenn φ_1 und φ_2 in demselben Sinn gemessen werden, sind $\operatorname{cotg}\varphi_1$ und $\operatorname{cotg}\varphi_2$ lineare Koordinaten. Sie ergeben sich aus den allg. projektiven ξ_2 und ξ_1, wenn man A_3 als unendlichfernen Punkt der zu A_1A_2 normalen Richtung und E_1, E_2 zu verschiedenen Seiten von A_1A_2 so wählt, daß $\overline{A_1E_1} = \overline{A_2E_2} = \overline{A_1A_2}$ ist. E ist also der unendlichferne Punkt von A_1E_2. Diese Koordinaten behandelt *T. Biggin*, The Quart. J. p. appl. math. 25 (1891), p. 237 f. — *B. Sommer*, Die Winkelkoordinaten, Coblenz 1848, wählt $u = \operatorname{cotg}\varphi_1$ und $v = \operatorname{cotg}\varphi_1 - \operatorname{cotg}\varphi_2$ als Koordinaten eines Punktes. Hierher gehören auch die „achsialen" Punktkoordinaten von *W. Esson*, The Quart. J. p. appl. math. 10 (1870), p. 113—121.

189a) Vgl. auch Nr. 17, insbes. Anm. 350.

Wird E auf einer Geraden g durch A_4 so gewählt, daß seine Entfernung vom Schnittpunkt O der Ebene α_4 mit g gleich der positiven Einheit ist, und haben die Schnittpunkte der Ebenen A_2A_3P, A_3A_1P, A_1A_2P mit g von O bzw. die Abstände p_1, p_2, p_3, dann ist $\xi_i = \frac{1}{p_i}$ $(i = 1, 2, 3)$[190].

c) *Die Ecken A_4 und A_3 liegen unendlichfern.* Diese *Keilkoordinaten* bespricht *W. Fiedler*[191]. Stehen die Richtungen von A_3 und A_4 untereinander und zu A_1A_2 senkrecht und wählt man E als den unendlichfernen Punkt der von A_2 ausgehenden Diagonale jenes Würfels, dessen Kanten die Richtungen A_2A_1, A_2A_3, A_2A_4 haben, so sind die ξ_i identisch mit der von *T. Biggin*[192]) gegebenen Ausdehnung der Zweiwinkelkoordinaten auf den Raum. Bezeichnen nämlich P' den Normalriß von P auf α_3, φ_1 und φ_2 die Neigungswinkel der Halbstrahlen A_2P' bzw. A_1P' gegen $\overrightarrow{A_1A_2}$, δ den Neigungswinkel der Halbebene A_1A_2P gegen α_3, so hat man

$$\xi_1 = \operatorname{cotg} \varphi_1, \quad \xi_2 = \operatorname{cotg} \varphi_2, \quad \xi_3 = \operatorname{tg} \delta.$$

d) *Die Ebene α_4 liegt unendlichfern.* In diesem zu b) in gewissem Sinne dualen Fall artet das Koordinatentetraeder in das Achsenkreuz der Parallelkoordinaten (Nr. 3) mit A_4 als Ursprung aus. $\overline{A_4E_1}$, $\overline{A_4E_2}$, $\overline{A_4E_3}$ sind die Einheitstrecken. Je nach der Wahl von E sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die gleichschenkligen oder allgemeinen Cartesischen Koordinaten. Letztere lassen sich auch als die Verhältnisse der parallel zu festen Richtungen gemessenen Abstände der Punkte P und E von den drei Koordinatenebenen deuten. Die festen Richtungen dürfen auch zu den Koordinatenebenen senkrechtstehen[193]) oder in eine Richtung zusammenfallen[194]).

Die Sonderfälle der linearen Koordinaten in den Grundgebilden 1. Stufe behandeln eingehend *Heffter-Koehler*[194a]).

---

190) Die entsprechenden Koordinaten in der Ebene bei *Aubertin,* J. f. Math. 45 (1852), p. 247.

191) Darst. Geom. (3. Aufl.) 3, p. 126.

192) The Quart. J. p. appl. math. 25 (1891), p. 237—258.

193) *J. Plücker,* Syst. anal. Geom., Nr. 22, p. 16. Die entsprechenden Koordinaten in der Ebene für zwei feste Richtungen verwendet *É. Perrin,* Assoc. Franç. Congrès de St. Étienne (1897), 26 (1898), p. 90—107.

194) *J. Plücker,* a. a. O.

194a) 1, I. Abschn. Im Strahlbüschel z. B. ist bei festgelegtem positiven Drehsinn die Tangente oder Kotangente des Winkels, den ein veränderlicher Strahl p mit einem festen einschließt, eine lineare Koordinate von p (a. a. O., p. 104).

7. Minimalkoordinaten. Wählt man zur Definition linearer Punktkoordinaten (Nr. 5) komplexe lineare Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten[195]), dann besteht das Grundtetraeder aus komplexen Ebenen, und es entsprechen einem reellen Punkt im allgemeinen komplexe Koordinaten. Z. B. benutzt man zuweilen ein von zwei Paaren konjugierter Minimalebenen gebildetes Koordinatentetraeder, das durch seine zwei reellen Gegenkanten bestimmt ist[196]).

Wählt man in der Ebene die Werte zweier konjugiert komplexen linearen Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten als nichthomogene Dreieckskoordinaten, so besteht das Grunddreiseit aus zwei konjugiert komplexen Geraden, die sich in einem reellen Punkt schneiden, und aus der unendlichfernen Geraden. Setzt man insbesondere

$$(1) \qquad u = x + iy, \qquad v = x - iy,$$

so sind die durch den Ursprung des rechtwinkligen Achsenkreuzes gehenden Minimalgeraden die im Endlichen liegenden Seiten des neuen Grunddreiecks. Wir nennen daher mit *F. Klein*[197]) u und v die *Minimalkoordinaten* des reellen oder komplexen Punktes $P(x, y)$. Die Minimalgeraden durch P schneiden dann die x-Achse in Punkten mit den Abszissen u und v. Das Entfernungsquadrat der Punkte $P_1(u_1, v_1)$, $P_2(u_2, v_2)$ stellt sich in Produktform

$$(2) \qquad \overline{P_1P_2}^2 = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

dar[198]). Ferner ist für reelle Punkte P_1, P_2

$$(3) \qquad \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = e^{2i\varphi},$$

195) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., Nr. 27 f.; J. f. Math. 34 (1847), p. 346 f. Fußn. = Ges. Abh. 1, p. 423. — Die Definition der Wurfkoordinaten bei *K. G. Chr. v. Staudt*, Beitr. z. Geom. d. Lage (1857), Nr. 411, bezieht sich auch auf imaginäre Grundelemente.

196) S. *G. Darboux*, Classe rem., p. 218 f. — Vgl. auch Nr. 33.

197) Ausgew. Kapitel der Zahlentheorie 1, Autogr. Vorl. (Winters. 1895/96), ausgearb. von *A. Sommerfeld*, Göttingen 1896, p. 65. — *A. Cayley*, Trans. R. Soc. Edinb. 25 (1868), p. 1—110 = Math. pap. 6, p. 498, nennt sie *circular coordinates* (bei *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. höh. eb. Kurven, Leipzig 1873, p. 7, mit „Kreis-Koordinaten" übers.) und nimmt zur Herbeiführung der Homogenität noch eine dritte, gewöhnlich als Einheit gedachte Koordinate w hinzu. $u = 0$, $w = 0$ und $v = 0$, $w = 0$ sind dann die Koordinaten der absoluten Punkte. — *E. Laguerre*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 171 = Oeuvres 2, p. 94, nennt u, v *coordonnées isotropes*, die Minimalgeraden (p. 164, 165 = Oeuvres 2, p. 89) *droites isotropes* (auch Bull. Soc. Philom. 1867 = Oeuvres 2, p. 27) und die der Differentialgleichung $ds = 0$ genügenden Kurven einer Fläche „lignes isotropes".

198) *E. Laguerre*, a. a. O., p. 172, 173 (Oeuvres 2, p. 95). Auf den Gl. (2) u. (3) beruhen viele Sätze, die *G. Darboux*, Classe rem., p. 61—106, und an anderen Orten mittels dieser Koordinaten ableitet.

wo φ den Neigungswinkel des Halbstrahles $\overrightarrow{P_1 P_2}$ mit der positiven x-Halbachse bezeichnet[199]).

Ein *reeller* Punkt ist durch seine u- oder seine v-Koordinate allein bestimmt, weil die reellen und die imaginären Teile beider gleich sind[200]). Für einen *komplexen* Punkt P ($x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$) hingegen, wo jetzt x', x'', y', y'' reelle Zahlen bedeuten, haben

$$(4)\qquad \begin{aligned} u &= (x' - y'') + i(y' + x'') \\ v &= (x' + y'') - i(y' - x'') \end{aligned}$$

verschiedene reelle und imaginäre Teile. Bestimmt nun die u-Koordinate von P den reellen Punkt p und die v-Koordinate den reellen Punkt p', so ist damit einem jeden (endlichfernen) imaginären Punkt P umkehrbar eindeutig ein reelles *orientiertes Punktepaar* pp' (bei dem also die Reihenfolge zu beachten ist) zugeordnet (*E. Laguerre*[201])). Die Punkte p und p' fallen für einen reellen Punkt P zusammen und ändern ihre Reihenfolge für den zu P konjugierten Punkt. p, p' sind die reellen Punkte der beiden Minimalgeraden durch P[202]), daher

199) *E. Laguerre*, a. a. O., p. 172.

200) Geometrisch heißt dies, die ∞^2 imaginären Strahlen eines jeden der Büschel von Minimalgeraden sind den reellen endlichfernen Punkten ein-eindeutig zugeordnet. Damit dies auch für den reellen, unendlichfernen Strahl gelte, faßt man diesen als Punkt auf; eine unendlichgroße u- oder v-Koordinate bestimmt den *unendlichfernen Punkt.* S. *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie 2 (Autogr. Vorl., Sommers. 1890, ausgearb. v. *Fr. Schilling*, 2. Abdr. Gött. 1893), p. 90.

201) A. a. O., p. 168 f. (Oeuvres 2, p. 92 f.); der Vektor pp' heißt das *segment représentatif* des imag. Punktes. — Vgl. dagegen die Darstellung eines komplexen Punktes durch ein Punktepaar bei *O. Stolz*, Math. Ann. 4 (1871), p. 416 Fußn.; *W. Fiedler*, Anal. Geom. der Kegelschnitte, nach *G. Salmon*, 7. Aufl., 1 (1907), p. 25. — *C. A. Bjerknes*, Über die geom. Representation der Gleichungen, usw., Christiania 1859, hat die unvollkommene Darstellung des imag. Punktes P durch den reellen Punkt ($x' - y''$, $y' + x''$) benutzt. Vgl. Bull. sc. math. 8 (1875), p. 135, und *E. R. Neovius*, Öfv. Förh. Finska Soc. Helsingf. 29 (1886), p. 154—161. *M. Marie*, Théorie des fonctions de variables imaginaires, Paris 1874—75, und in zahlreichen anderen Abhandl. repräsentiert P durch den reellen Punkt ($x' + x''$, $y' + y''$). Wegen anderer Darstellungen s. *A. Ramorino*, Giorn. mat. 35 (1897), p. 257 f.

202) Denkt man sich mit *v. Staudt* einen imaginären Punkt durch eine elliptische Involution in einer reellen orientierten Geraden definiert, so sind p, p' jene zwei Punkte der Ebene, aus denen diese Involution durch Rechtwinkelinvolutionen projiziert wird. Da sich der Sinn der Geraden auf die beiden Strahlbüschel überträgt, so besitzt die eine Strahlinvolution den positiven, die andere den negativen Drehsinn der Ebene. Der Scheitel der ersteren soll den ersten, der Scheitel der letzteren den zweiten Punkt des darstellenden Punktepaares bilden. Für die sämtlichen imag. Punkte einer reellen Geraden findet

unabhängig von dem ursprünglichen rechtwinkligen Koordinatensystem[203]).

Jeder Gleichung $f(u, v) = 0$ gehört eine reelle oder imaginäre Kurve und umgekehrt zu[203a]). Besitzt die äquivalente Gleichung in x, y nur reelle Koeffizienten, so enthält die Kurve zu jedem komplexen Punkt auch den konjugierten. Ordnet man nun nach *Laguerre* den ∞^2 Punkten einer (nicht in Minimalgerade zerfallenden) Kurve die orientierten Punktepaare pp' zu, so bilden p und p' entsprechende Punkte einer (von singulären Stellen abgesehen) *gegensinnig konformen*[204]) Punktverwandtschaft in der Ebene, die für reelle oder nullteilige Kurven involutorisch ist. Die Punkte einer reellen Geraden g werden auf diese Weise durch die zu g symmetrischen Punktepaare, die Punkte einer komplexen Geraden oder eines komplexen Kreises durch die entsprechenden Punkte zweier gegensinnig ähnlichen[205]) bzw. kreisverwandten[206]) Systeme dargestellt. Die Koordinaten u, v bilden also ein Hilfsmittel zum Studium gegensinnig konformer Verwandtschaften in der Ebene[207]).

---

sich diese Darstellung schon bei *K. G. Chr. v. Staudt*, Beitr. z. Geom. d. L., 2. H., Nürnberg 1857, Nr. 410.

Sind p_1p_1', p_2p_2' die die komplexen Punkte P_1, P_2 darstellenden Punktepaare, so folgert *Laguerre*, a. a. O., p. 174 = Oeuvres 2, p. 97, aus Gl. (2), daß

$$\overline{P_1 P_2}^2 = \overline{p_1 p_2} \cdot \overline{p_1' p_2'} \cdot e^{\mu i}$$

ist, wo μ den Winkel bezeichnet, den die gerichtete Strecke $p_1'p_2'$ mit $p_1 p_2$ bildet.

203) *Laguerre*, Oeuvres 2, p. 92.

203a) Die Beziehungen, die zwischen den Gleichungskoeffizienten für eine reelle Kurve bestehen müssen, untersucht *A. Perna*, Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1902), p. 65—72. — Wegen Anwendungen der Koordinaten u, v vgl.: *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (4) 1 (1901), p. 1—9; *H. Poincaré*, Acta math. 3 (1883), p. 50.

204) *E. Study*, Math. Ann. 63 (1906), p. 242. Er weist auf den Zusammenhang dieser Verwandtschaften mit den konformen Spiegelungen an einem reellen Kurvenbogen (*H. A. Schwarz*, Ges. W. 2, p. 149—151) hin.

205) *E. Laguerre*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 252 = Oeuvres 2, p. 107; Bull. Soc. math. France 1 (1873), p. 242 = Oeuvres 2, p. 353. — Daraus, daß in der Umgebung eines Kurvenpunktes die Kurve durch ihre Tangente ersetzbar ist, folgert man dann die vorher erwähnte gegensinnige Konformität der allgemeinen Punktverwandtschaft. Obige Tatsache führt auch zu einem geometrischen Übertragungsprinzip, demzufolge man in der Geometrie der Ebene den Punkt durch ein orientiertes Punktepaar, die Gerade durch eine gegensinnige Ähnlichkeit ersetzen darf.

206) *E. Laguerre*, Bull. Soc. math. France 1 (1873), p. 248 = Oeuvres 2, p. 362.

207) pp' stellt z. B. (*Laguerre*, Oeuvres 2, p. 103) einen komplexen Punkt einer reellen Ellipse dann und nur dann dar, wenn p und p' auf einer konfokalen Hyperbel so liegen, daß ihre Verbindungslinie zu einer der Tangenten

Für die reellen Punkte der Ebene ist die Minimalkoordinate u identisch mit jener komplexen Zahl, die nach *K. F. Gauß* (bzw. *C. Wessel* und *J. R. Argand*, I A 4, *Study*, Nr. 5) jedem Punkt zugeordnet wird[208]). Faßt man diese Zuordnung als Abbildung der komplexen Punkte einer Geraden (hier der x-Achse) auf die reellen Punkte der Ebene auf, so läßt sich wie im binären Gebiet (Nr. 5) jeder reelle Punkt z der Ebene durch das komplexe Doppelverhältnis[209])

$$(5) \qquad \zeta = (a_1 a_2 z e) = \frac{z - a_1}{e - a_1} : \frac{z - a_2}{e - a_2}$$

---

der Hyperbel in deren Schnittpunkten mit der Ellipse parallel ist. Diese Darstellung imaginärer Punkte durch reelle orientierte Punktepaare hängt aufs engste mit *F. Kleins* Darstellung der Riemannschen Fläche einer algebraischen Funktion (Math. Ann. 7 (1874), p. 558—566) zusammen. Vgl. *E. Laguerre,* Nouv. Ann. (2) 9 (1870) = Oeuvres 2, p. 102.

Im Raum wird nach *E. Laguerre,* Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 14—21, 108—117, 241—254 (oder L'Institut, Nr. 1898 (1870)), ein imaginärer Punkt P durch einen reellen orientierten Kreis dargestellt, den Ort der reellen Punkte des Minimalkegels durch P. Vgl. noch *P. Molenbroek,* Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 434—453 (auch Arch. Math. Phys. (2) 10 (1891), p. 261—282, und Nieuw Arch. Wisk. 19 (1891), p. 113—131). Die entsprechende Abbildung von imaginären Kreisen einer Ebene durch reelle Punktepaare haben schon *M. Chasles*, Traité de géom. sup., Paris 1852, 2e éd. 1880, chap. 33, und *A. F. Möbius,* Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 9 (1857), p. 38—48; 10 (1858), p. 1—17 = Ges. W. 2, p. 313—328, 329—347, betrachtet. Eine Darstellung der imaginären Punkte des Raumes durch reelle Punktepaare studiert *L. Autonne,* Bull. Soc. math. France 29 (1901), p. 95—118. Weitere Literatur hierzu bei *A. Ramorino,* Giorn. mat. 35 ((2) 4) (1897), p. 256—258.

208) Diese *Gauß*sche Koordinate wurde in zahlreichen geometrischen Untersuchungen verwendet. Vgl. etwa außer den Arbeiten von *A. F. Möbius* und verschiedenen meist im Nachlaß gefundenen Bemerkungen von *C. F. Gauß* (Werke 4, p. 396—398; 8, p. 307—356): *F. H. Siebeck,* J. f. Math. 55 (1858), p. 221—253; *F. Lucas,* Paris C. R. 75 (1872), p. 1250; 77 (1873), p. 1463; Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 225—229; *G. Holzmüller,* Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften usw., Leipzig 1882; *J. Brill,* Mess. of Math. 16 (1886—87), p. 8—20; *J. Schick*, Sitzungsber. math.-phys. Ak. München 30 (1900), p. 249—272; *E. v. Weber,* ebenda 31 (1901), p. 367—408; *F. Morley,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 97—115; 4 (1903), p. 1—12; 8 (1907), p. 14—24; *E. Cesàro,* Giorn. mat. 39 (1901), p. 145—161; *J. Kürschák,* Arch. Math. Phys. (3) 8 (1905), p. 285.

Eine projektive Verallgemeinerung dieser Koordinate verwendet *E. Busche,* Grundz. einer rechnenden Geom. der Lage, Progr. Bergedorf bei Hamburg 1890, indem er einem reellen Punkt der Ebene mit den projektiven Koordinaten ξ, η die komplexe Zahl $\xi + i\eta$ zuordnet.

Wegen Verwendung bikomplexer Zahlen als Koordinaten s. III A B 4a, *Fano,* Nr. 17, 18.

209) Dieser Begriff stammt von *A. F. Möbius*, Ber. Ges. Leipzig (math.-

bestimmen, das er mit den *Grundpunkten* a_1, a_2 und dem *Einheitspunkt* e bildet. Diese drei Punkte sind willkürlich wählbar. Nach *L. Wedekind*[210]) ist ζ auch durch die Winkel ausdrückbar, welche die vier durch je drei der Punkte a_1, a_2, z, e legbaren Kreise miteinander einschließen[211]). Wählt man $a_1 = 0$ (Ursprung des rechtwinkligen Achsenkreuzes), $a_2 = \infty$ (unendlichferner Punkt der Ebene), $e = +1$ ($x = 1$, $y = 0$), so ist nach (5) $\zeta = z$. Die *Gauß*sche Koordinate z eines Punktes erscheint demnach als Sonderfall der komplexen Doppelverhältniskoordinate. Letztere geht aus ersterer durch eine Transformation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{6}$$

mit komplexen Koeffizienten hervor. Daraus folgt (I A 4, *Study*, Nr. **6**), daß alle Punkte, für welche der reelle bzw. imaginäre Teil von ζ konstant ist, auf Kreisen durch a_2 liegen, die in diesem Punkt den Kreis $a_1 a_2 e$ berühren bzw. orthogonal schneiden[212]).

Die Koordinate ζ ist invariant gegenüber linearen Transformationen der Form (6), d. h. gegenüber Kreisverwandtschaften ohne Umlegung der Winkel[213]), ist daher in der ebenen Geometrie der reziproken Radien (III AB 4b, *Fano*, Nr. **11** und **30**, a)) vorteilhaft verwendbar, sofern es sich bloß um reelle Figuren handelt[214]). Zur analogen Koordinatenbestimmung komplexer Punkte sind zwei Doppelverhältnisse erforderlich (vgl. Nr. **8**).

---

phys.) 5 (1853), p. 14—24 insbes. § 2 = J. f. Math. 52 (1856), p. 229—242 = Ges. W. 2, p. 208. Wegen des Zusammenhanges mit der *v. Staudt*schen Theorie vgl. *Clebsch-Lindemann*, 2[1], p. 621 f. — *E. Study*, Betrachtungen über Doppelverhältnisse, Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 48 (1896), p. 200—221, gab verschiedene weitere Verallgemeinerungen dieses Begriffs.

210) Beitr. z. geom. Interpr. binärer Formen, Diss. Erlangen 1875, p. 12, 19; Math. Ann. 9 (1876), p. 211; 17 (1880), p. 9.

211) Hieraus folgt sofort die Möglichkeit, diese Koordinatenbestimmung eines Punktes durch stereographische Projektion auf die Kugel zu übertragen (Nr. **33**).

F. Lucas, Paris C. R. 77 (1873), p. 1464, verwendet in der Ebene als „coordonnées anharmoniques" den absoluten Betrag und die Amplitude von ζ. Einen Sonderfall davon bilden die *Polarkoordinaten* (Nr. **9**, a)).

212) *L. Wedekind*, Beitr. z. geom. Interpr. usw., p. 20.

213) Ähnlichkeitstransformationen brauchen nicht, wie es häufig geschieht, besonders erwähnt zu werden, da sie sich aus Inversionen zusammensetzen lassen. (Die Zusammensetzung zweier Inversionen an konzentrischen Kreisen ist eine Ähnlichkeit.)

214) *F. Klein*, Vergl. Betr., § 6, insbes. Math. Ann. 43 (1893), p. 78 (letzte Fußn.).

8. Nichtlineare projektive Punktkoordinaten. Weist man in zwei Strahlbüscheln (A_1) und (A_2) der Ebene mit den reellen Scheiteln A_1, A_2 je drei beliebigen reellen Strahlen die Doppelverhältniswerte $0, \infty, 1$ zu, so ist durch diese Festsetzung jedem reellen Strahl der beiden Büschel eine reelle, jedem nicht reellen Strahl eine komplexe Zahl als projektive Koordinate (Nr. 5) zugeordnet[215]. Durch jeden Punkt P der Ebene, mit Ausnahme von A_1 und A_2, geht nun *ein* Strahl eines jeden Büschels. Gehören diesen Strahlen in den Büscheln bzw. die Koordinaten ξ_1 und ξ_2 zu, so sind diese Zahlen *nichtlineare projektive Koordinaten* des Punktes P. Denn sie bestimmen den Punkt im allgemeinen eindeutig, und alle Punkte, deren Koordinaten ξ_1, ξ_2 der linearen Gleichung $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3 = 0$ genügen, gehören einem Kegelschnitt an, der durch A_1, A_2 und den Schnittpunkt der beiden Strahlen mit der Koordinate ∞ geht[216]. Nur die zur Verbindungslinie A_1A_2 gehörigen Koordinaten bestimmen keinen Punkt eindeutig, und nur für die Punkte A_1, A_2 wird eine der Koordinaten unbestimmt. Ferner ändern sich ξ_1, ξ_2 bei einer kollinearen Transformation der Ebene nicht.

Diese Koordinaten gehen aus den rechtwinkligen durch eine quadratische Transformation[217] hervor. Eine analoge Koordinatenbestimmung ist auf alle Elemente anwendbar, die aus den Elementen zweier Grundgebilde erster Stufe durch Verbinden oder Schneiden hervorgehen[218].

Bezeichnet $f(\xi_1, \xi_2)$ eine ganze rationale Funktion, die in ξ_1 vom n_1^{ten}, in ξ_2 vom n_2^{ten} Grade ist, so stellt $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ eine algebraische Kurve dar, die jede Gerade durch A_2 in n_1 und jede Gerade durch A_1 in n_2 Punkten (außerhalb A_2 bzw. A_1) schneidet[219]. Werden ξ_1

---

215) *K. G. Chr. v. Staudt,* Beitr. z. Geom. d. Lage, 2. H., Nürnberg 1857, § 29.

216) *J. C. Becker,* Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 531—534; *E. Busche*[208], p. 10; *K. Hensel* u. *G. Landsberg,* Theorie der algebr. Funktionen einer Variablen usw., Leipzig 1902, p. 366 f.

217) Vgl. III A B 4b, *Fano,* Anm. 72, und wegen Einzelheiten etwa *K. Doehlemann,* Geom. Transformationen 2, Leipzig 1908, 1. Kap.

218) Für zwei Ebenenbüschel im Raume z. B. sind die Doppelverhältnisse ξ_1, ξ_2 Koordinaten der Strahlen des durch die beiden Büschel erzeugten Netzes oder Bündels (*E. Busche,* a. a. O.). Vgl. den Sonderfall bei *F. Folie*[183a], p. 132 f. Werden in zwei Ebenen oder allgemeiner in zwei Grundgebilden 2. Stufe Elemente mit gleichen projektiven Koordinaten einander zugeordnet, so ergibt sich die allgemeine quadratische Verwandtschaft zwischen diesen Grundgebilden. Vgl. *F. Seydewitz,* Arch. Math. Phys. 7 (1846), p. 113—148.

219) *E. Kasner,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 450, nennt n_1, n_2 die *Teilordnungen* (*partial orders*) der Kurve. Vgl. hierzu auch Nr. 33.

und ξ_2 beliebigen voneinander unabhängigen linearen Transformationen unterworfen, so erfahren die Punkte der Ebene eine quadratische Transformation.

Die Koordinaten ξ_1, ξ_2 lassen sich ebenso für Strahlbüschel mit komplexen Scheiteln definieren. Verlegt man insbesondere A_1, A_2 in die absoluten Punkte der Ebene, so werden ξ_1, ξ_2 *nichtlineare Minimalkoordinaten*[220]), die erwähnte quadratische Transformation geht in die *Möbius*sche Kreisverwandtschaft über, und die Invariantentheorie der ebenen Kurven für die Gruppe der Inversionen wird nach *E. Kasner*[220]) mit der Invariantentheorie der doppelt binären Formen identisch[221]), deren Variable unabhängigen linearen Transformationen unterworfen werden. Für $n_1 = n_2 = 2$ stellt $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ eine zyklische Kurve 4. Ordnung[222]) dar.

Gehört dem Strahl $A_1 A_2$ in beiden Büscheln der Wert ∞ zu, so sind ξ_1, ξ_2 die in Nr. 5 (bzw. Nr. 7) betrachteten linearen Koordinaten.

Im Raume lassen sich analog wie in der Ebene als projektive Koordinaten eines Punktes P die Doppelverhältnisse ξ_1, ξ_2, ξ_3 verwenden, die zu den durch P gehenden Ebenen dreier Ebenenbüschel gehören. Von dieser eindeutigen Bestimmung durch Koordinaten sind die Punkte der durch die Achsen der drei Ebenenbüschel legbaren Fläche 2. Ordnung ausgenommen[223]). Auch diese Koordinaten sind nicht linear[224]), da eine lineare Gleichung zwischen ihnen eine Fläche 3. Ordnung definiert (III C 7, *Meyer*). Einen Sonderfall davon führt *K. G. Chr. v. Staudt*[225]) an. Liegen die Achsen der drei Büschel

---

220) Ebenda p. 451.

221) Statt ξ_1, ξ_2 lassen sich nämlich sofort homogene Koordinaten $\xi_1' : \xi_1''$, $\xi_2' : \xi_2''$ einführen.

222) Vgl. Nr. 10, Anm. 275. *E. Kasner* gibt a. a. O., p. 490 f. unter Verwendung der Minimalkoordinaten eine Klassifikation dieser Kurven; p. 493 führt er für jedes der Büschel von Minimalgeraden drei homogene Koordinaten ein, zwischen denen eine quadratische Bedingungsgleichung besteht (vgl. Anm. 614).

223) Deshalb schlägt *A. Visnya*, Arch. Math. Phys. (3) 10 (1906), p. 338, den Übergang zu den Koordinaten in bezug auf eine Normkurve vor (vgl. Anm. 224).

224) *E. Busche*[208]). Der Ort aller Punkte $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ ist eine Raumkurve 3. O. C_3 (mit den Achsen jener Ebenenbüschel als Bisekanten), auf der hierdurch ein Parameter verteilt ist. Die Koordinatenbestimmung läßt sich nun auch so auffassen, daß jedem Punkt P die Parameterwerte seiner Projektionen aus jenen Bisekanten auf die C_3 zugeordnet werden. Analoges gilt für die Ebene und für den R_n (Nr. 11).

Werden in zwei Räumen Punkte mit gleichen derartigen Koordinaten zugeordnet, so ergibt sich eine rationale kubische Verwandtschaft dieser Räume. Vgl. *F. v. Krieg*, Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884) Suppl., p. 38—72.

in einer Ebene und gehört ihr in allen drei Büscheln die Koordinate ∞ zu, so sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 lineare Koordinaten (Nr. 5).

Allgemein sind die Werte dreier Funktionen der linearen projektiven Koordinaten *nichtlineare* projektive Koordinaten. Namentlich gilt dies für die reziproken Werte der linearen Koordinaten[226]).

9. Polarkoordinaten. Wird die Lage eines Punktes P durch seine Entfernung r von einem festen Punkt O (dem *Pol*[227]), *Anfangspunkt*[228]) oder *Ursprung*) und die Richtung des Halbstrahls OP bestimmt, so heißen die hierzu nötigen Zahlen seit dem 19. Jahrhundert die *Polarkoordinaten* von P. $r = \overline{OP}$ wird *Radiusvektor*[227]) (auch *Vektor*) oder *Leitstrahl*[228]), *Fahrstrahl* genannt. Die Bestimmung der Richtung von OP erfolgt auf mancherlei Arten.

a) In der Ebene. Wählt man einen vom Pol ausgehenden festen Halbstrahl OX (die *Polarachse, Achse*[228]) oder *Fundamentallinie*) und den positiven Drehsinn der Ebene, dann ist der Halbstrahl OP durch seinen im Bogenmaß ausgedrückten Neigungswinkel φ gegen OX bestimmt. φ wird *Anomalie, Amplitude, Abweichung, Azimuth*[229]) oder *Argument*[229a]) genannt und ist nur bis auf Vielfache

225) Beitr. z. Geom. d. Lage, H. 2, Nürnberg 1857, Nr. 412. Hierher gehören auch die „coordonnées triédriques générales" von *F. Folie*[188a]), p. 134 f., der die Achsen der drei Ebenenbüschel parallel zu einer festen Ebene wählt und als Koordinaten eines Punktes P die Kotangenten der Winkel nimmt, welche die durch P gehenden Ebenen der Büschel mit der festen Ebene bilden (vgl. Anm. 194a).

226) *A. Demoulin,* Mém. cour. et autres Ac. Belg. 44 (1891) (vgl. Bull. Ac. Belg. Sc. 20 (1890), p. 20—27), z. B. verwendet die reziproken Werte der Nr. 6 Ende von b) erwähnten Koordinaten.

E. Lemoine, Bull. Soc. math. France 16 (1888), p. 170 f., wählt auf den Geraden OX, OY, OZ die festen Punkte A, B, C und projiziert den laufenden Punkt P aus BC, CA, AB bzw. auf OX, OY, OZ. Die Entfernungen der Projektionen von O nennt er „verallgemeinerte Cartesische Koordinaten", weil sie in letztere übergehen, wenn A, B, C ins Unendliche rücken. Diese Koordinaten sind, wie eine einfache Rechnung zeigt, lineare gebrochene Funktionen der linearen projektiven Koordinaten. Ihr ebenes Analogon wird (p. 165 f.) etwas näher untersucht.

227) *Monge* et *Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (t. 4) (an X), p. 150. Nach *M. Cantor*, Vorl. 4, p. 513, tritt der Ausdruck „equazione polare" zuerst bei dem Italiener *Fontana* (1784) auf.

228) *L. I. Magnus,* Aufg. u. Lehrsätze, 1, p. 4; 2, p. 3.

229) *G. Loria*, L'Enseign. math. 1 (1899), p. 357. Bei *M. Simon*, Anal. Geometrie der Ebene, Leipzig 1900, p. 25, auch *Phase* oder *Richtungsbogen.*

229a) *J. A. Grunert*, Anal. Geom. d. Ebene und d. Raumes für polare Koordinatensysteme, Greifswald u. Leipzig 1857, p. 3. Dieses Werk behandelt die ganze analytische Geometrie, inkl. Differentialgeometrie, unter ausschließlicher Benutzung von Polarkoordinaten.

von 2π bestimmt. r wird gewöhnlich als positiv angesehen; jedoch läßt ein negativer Wert von r die Deutung zu, daß P der Ergänzung des durch φ bestimmten Halbstrahls angehört, also sich mit dem Punkt $(\varphi \pm \pi, r)$ deckt[230]). Dieses erste Beispiel eines von dem *Cartesischen* verschiedenen Koordinatensystems wurde 1748 von *L. Euler*[231]) ohne Einführung besonderer Namen angegeben.

Als Koordinatenbasis kann ein orientierter Einheitskreis mit dem Pol als Mitte und ein auf der Peripherie gewählter Anfangspunkt für die Bogenmessung betrachtet werden.

Wählt man die Polarachse als positive x-Achse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Einheitstrecke dem Radius und dessen positiver Drehsinn (Nr. 2) dem des Basiskreises gleich ist, so hängen die rechtwinkligen und polaren Koordinaten eines Punktes durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

zusammen[232]). Die Polarkoordinaten des Punktes (x, y) sind also die Werte der Funktionen

$$(2) \qquad f_1(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

230) *L. Euler*, Introd., lib. 2, cap. 21, § 526; *L. I. Magnus*, Aufg. u. Lehrs. 1, p. 4; *Th. Dobson*, The Mathematician 1, London 1845, p. 167 f.; *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 14, 4; *H. Drasch*, Z. Realschulw. Wien, 12 (1887), p. 79—83; *G. Loria*, Period. mat. insegn. sec. Livorno 15 (1899), p. 7—11; L'Enseign. math. 1 (1899), p. 357—364; Ebene Kurven, p. 714; *Serret-Scheffers*, Diff.- u. Integr.-Rechnung 1, Leipzig 1906, p. 345 f. Vgl. ferner die Bemerkung von *E. Prouhet*, Nouv. Ann. (1) 20 (1861), p. 344—348, über den Fall der Reduktibilität der Polargleichung einer Kurve oder Fläche.

231) Introd. 2, cap. 17, § 391 f. und cap. 21, § 526 f. Da von *Euler* unsere heutige Bezeichnungsweise der trigonometrischen Funktionen sowie deren Auffassung als Winkelfunktionen stammt (vgl. *Th. St. Davies*, Trans. R. Soc. Edinb. 12 (1834, gel. 1832), p. 264; *A. v. Braunmühl*, Vorl. über Geschichte d. Trigonometrie 2, Leipzig 1903, p. 104), so wird es verständlich, daß vor ihm Polarkoordinaten in dem heutzutage gebräuchlichen Sinn nicht auftreten. — Nach *M. Cantor*, Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 482 hat *Jakob Bernoulli*, Acta Erud. Lips., Januarh. 1691 = Opera 1, p. 431—442, die erste Anwendung von Polarkoordinaten zur Behandlung der parabolischen Spirale gemacht. Er denkt sich die Achse einer gewöhnlichen Parabel in Gestalt eines Kreises gebogen und die Ordinaten senkrecht zu diesem aufgetragen. *P. de Varignon*, Hist. Mém. math. phys. Ac. sc. Paris (a. 1704) 1722, p. 69—131 hat, anknüpfend an *Fermat* (Oeuvres, p. 179) Gleichungen von Kurven in Polarkoordinaten aufgestellt (p. 70 f.), indem er, von einer beliebigen ebenen Kurve ausgehend, die Ordinate eines Kurvenpunktes als Bogen eines festen Kreises und die Abszisse als zugehörigen Radiusvektor auffaßt. Aber erst bei *Euler* tritt der Gedanke hinzu, daß auf diese Weise die Lage jedes Punktes der Ebene bestimmbar ist.

232) *L. Euler*, Introd. 2, § 395.

wo arctg kongruent mit einem Winkel $\lesseqgtr \pi$ gewählt wird, je nachdem y positiv oder negativ ist, und wo die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen ist. Sie gehören zu den orthogonalen krummlinigen Koordinaten (Nr. 4). Die Koordinatenkurven sind die Geraden durch den Pol und die Kreise um ihn.

Jede in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$f(r, \varphi) = 0 \tag{3}$$

kann als Normalriß der Schnittkurve einer Drehfläche mit einer Wendelfläche betrachtet werden, deren gemeinsame Achse die im Pol errichtete Normale auf die Koordinatenebene ist. Wählt man für die Wendelfläche die Steigung eins, so hat der Meridian der Drehfläche, die Drehachse als z-Achse betrachtet, in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung $f(y, z) = 0$ [233]).

Lineare Gleichungen in Polarkoordinaten stellen archimedische Spiralen dar, die vom Pol ausgehen[234]).

Polarkoordinaten werden häufig zur Untersuchung einer Kurve in der Umgebung eines ihrer Punkte benutzt[235]).

Als Verallgemeinerung dieser Koordinaten sind (für reelle Punkte) der absolute Betrag und die Amplitude des in Nr. 7 betrachteten komplexen Doppelverhältnisses ζ aufzufassen[236]), ferner die *elliptischen* und *hyperbolischen Polarkoordinaten* von *C.-A. Laisant*[236a]).

---

233) *M. Chasles*, Ap. hist., Note VIII, p. 297—301. Sonderfälle davon hat schon *Pappus* betrachtet (ebenda § 26). S. auch *H. Wieleitner*, Spez. ebene Kurven, Leipzig 1908, p. 249. — Wegen der Ableitung der Kurve $f(\varphi, r) = 0$ aus $f(x, y) = 0$ vgl. *P. de Varignon*, Anm. 231 und *G. Loria,* Ebene Kurven, p. 595. Über die Konstruktion von Kurven, deren Gleichungen in Polarkoordinaten gegeben sind, handelt *Ch. Biehler*, Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 367—376; 4 (1885), p. 153—159, 223—235, 249—256. Die Symmetrie in Polarkoordinaten untersucht *J. Lefèbre*, Nouv. Ann. (3) 11 (1892), p. 302—314, 358—374. Die Kurven von der Gl. $r^2 = 2m\varphi + n\varphi^2$ studiert *R. Rudini*, Ann. sc. mat. fis. Roma 4 (1853), p. 5—24. — S. auch III C 4, *Berzolari*, Anm. 2 und III D 4, *Scheffers,* Nr. **9**, **37**.

234) *L. Euler,* Introd. 2, § 526. Die Kurve $f(r, \varphi) = 0$ wird daher im Punkt (r_0, φ_0) von der archimedischen Spirale $(r - r_0)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 + (\varphi - \varphi_0)\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_0 = 0$ berührt (*H. I. Purkiss*[122a]), p. 20).

235) *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. höheren ebenen Kurven, Leipzig 1873, p. 26. *G. Halphen*, III C 4, *Berzolari*, Anm. 2.

236) S. *F. Lucas*[211]). — Als weitgehende Verallgemeinerung, wobei statt des Poles eine Kurve tritt, können die von *E. Habich*, Anm. 126, benutzten Koordinaten aufgefaßt werden.

236a) Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris 1874. *Laisant* wählt z. B. statt des Einheitskreises eine gleichseitige Hyperbel mit der Mitte O, deren auf dem Halbstrahl OX liegender reeller Scheitel A von O die Entfernung eins hat. Schneidet der Halbstrahl OP die Hyperbel in dem reellen Punkt M, so nennt

b) **Im Raum**[237]). Legt man durch den Pol O eine orientierte Ebene π mit bestimmtem positiven Drehsinn (*Polarebene*)[238]) und zieht in ihr einen Halbstrahl OX (*Polarachse*), so wird, wenn P' den Normalriß von P auf π bezeichnet (Fig. 4), die Richtung von OP bestimmt durch die Winkel $\varphi = X\hat{O}P'$ und $\chi = P'\hat{O}P$. r, φ, χ sind dann *räumliche Polarkoordinaten*[239]) des Punktes P. Wählt man die Polarachse als x-Achse, die Polarebene als gleichorientierte xy-Ebene eines rechtwinklig-gleichschenkligen Koordinatensystems (Nr. 3), so hängen diese Polarkoordinaten mit den rechtwinkligen durch die Gleichungen

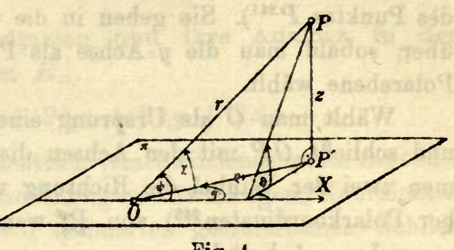


Fig. 4.

$$(4) \qquad x = r\cos\chi\cos\varphi, \quad y = r\cos\chi\sin\varphi, \quad z = r\sin\chi$$

zusammen[240]).

---

er $r = \frac{OM}{OA}$ und den doppelten Hyperbelsektor $\varphi = 2 \cdot AOM$ die *Polarkoordinaten der gleichseitigen Hyperbel* (a. a. O., p. 76). Ihr Zusammenhang mit den rechtwinkligen Koordinaten wird durch Gleichungen vermittelt, die sich von den Gl. (1) bloß dadurch unterscheiden, daß statt der Kreisfunktionen die entsprechenden Hyperbelfunktionen treten. Ähnlich werden Polarkoordinaten einer ungleichseitigen Hyperbel (p. 82) oder einer Ellipse (p. 71) definiert und zu geometrischen Untersuchungen verwertet. Vgl. hierzu auch *S. Günther*, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen usw., Halle a./S. 1881, p. 381, 385, 389. — Diese Koordinaten sind im Grunde nichts anderes als Polarkoordinaten einer pseudometrischen Geometrie, in der nämlich irgend ein reelles oder konjugiert imaginäres Punktepaar der unendlichfernen Geraden als absolutes Punktepaar verwendet wird. (Vgl. wegen dieser Geometrien: *F. Klein*, Ausgew. Kapitel der Zahlentheorie, Autogr. Vorl. 1, Göttingen 1896, p. 57—79; Elementarmath. 2, p. 368—375, 379.) S. auch Anm. 362.

237) Solche Koordinaten dürfte *A. Cl. Clairaut*, Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731 (Vorrede, letzte Seite) im Auge gehabt haben, wenn er sagt; „A l'égard des courbes à double courbure, *dont les coordonnées partent d'un point* . . .“

238) *Fundamentalebene* bei *J. A. Grunert*, Anm. 229 a, p. 2; *G. S. Ohm*, Anal. Geom., p. 127, der von „Central-“ statt Polarkoordinaten spricht, verwendet astronomische Benennungen: π = Gleicherebene, OX = Grundrichtung, φ = Länge, χ = Breite.

239) *J. L. Lagrange*, Nouv. Mém. Ac. Berlin (a. 1773), p. 127 = Oeuvres 3, Paris 1869, p. 626, bezeichnet die Einführung dieser Koordinaten statt der rechtwinkligen als „une des transformations les plus utiles et les plus ordinaires“. Vgl. *Monge* et *Hachette*[227]); *J. A. Grunert*[229a]), p. 3, nennt φ das *fundamentale*, χ das *normale Argument* des Punktes P.

240) *J. L. Lagrange*[239]), wo nur statt χ das Komplement auftritt; *Monge*

Sei $\psi = X\hat{O}P$ und ϑ der Neigungswinkel der Halbebene OXP gegen π (Fig. 4), so benutzt man auch r, ψ, ϑ als Polarkoordinaten des Punktes P[241]). Sie gehen in die vorhergehenden im wesentlichen über, sobald man die y-Achse als Polarachse und die yz-Ebene als Polarebene wählt.

Wählt man O als Ursprung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes und schließt OP mit den Achsen die Winkel λ, μ, ν ein, so bestimmen zwei der Winkel die Richtung von OP[242]). r, λ, μ, ν sind daher Polarkoordinaten[243]) von P, wenn die Gleichung $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$ besteht.

Die Koordinaten φ, χ, r sowohl als ϑ, ψ, r sind orthogonale Koordinaten (Nr. 4). Da sich unter den Koordinatenflächen (Nr. 4) eine Schar von Kugeln befindet, heißen sie auch *Kugelkoordinaten*[244]).

Ist P' der Normalriß von P auf die Polarebene π und bezeichnet man die ebenen Polarkoordinaten von P' (Fig. 4) mit φ, ϱ, den Abstand $\overline{P'P}$ mit z, so heißen die orthogonalen Koordinaten φ, ϱ, z auch *Zylinderkoordinaten*[245]) des Punktes P.

Unter k eine willkürliche Konstante verstanden, heißen die Ausdrücke

$$(5) \qquad x = k\sin\frac{r}{k}\sin\lambda, \quad y = k\sin\frac{r}{k}\sin\mu, \quad z = k\sin\frac{r}{k}\sin\nu,$$

$$p = \cos\frac{r}{k},$$

zwischen denen die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = k^2(1 - p^2)$ besteht,

---

et *Hachette*[227]) (mit zwei Druckfehlern); *L. I. Magnus*, Aufg. u. Lehrs. 2, p. 3. Den Zusammenhang dieser Koordinaten mit den schiefwinkligen Parallelkoordinaten leitet *G. S. Ohm*, Anal. Geom., p. 129 f. ab; die analogen Koordinaten für den R_n gibt *F. Klein*, Math. Ann. 18 (1881), p. 245, an.

241) *L. I. Magnus*, a. a. O., samt Zusammenhang mit den rechtwinkligen Koordinaten.

242) Wegen Konstruktion von P aus r, λ, μ s. *O. Staude*, Anal. Geom., p. 163.

243) *Monge* et *Hachette* und *L. I. Magnus* a. a. O. — *Ch. Laisant*, Bull. Soc. math. France 26 (1896), p. 271, nennt sie *symmetrische* Polarkoordinaten. Ähnlich definiert *O. Staude*, Anal. Geom., p. 64, die *Polarkoordinaten einer Strecke*. Die Richtung von OP wird auch durch die Winkel bestimmt, welche die Normalrisse von OP auf die xz- und xy-Ebene mit OX einschließen. S. wegen dieser Koordinaten *L. I. Magnus*, a. a. O., p. 4.

244) *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 388. — Die von *S. Günther*, Anm. 236[a], p. 421, 425, 435, betrachteten *hyperboloidischen Polarkoordinaten* bilden das räumliche Analogon der oben erwähnten *Laisant*schen Koordinaten.

245) *R. Baltzer*, ebenda, p. 386. Zur analytischen Darstellung von Schraubflächen verwendet sie *L. I. Magnus*, Aufg. u. Lehrs. 2, p. 474; zur Ausführung von Kubaturen usw. *Brenner*, Arch. Math. Phys. 13 (1849), p. 244—259. — Wegen der *elliptischen Polarkoordinaten* s. Anm. 623.

nach *W. Killing*[246]) die *Weierstraßschen Koordinaten* eines Punktes. Sie haben sich für das Studium nichteuklidischer Räume als nützlich erwiesen[247]).

10. Polysphärische Koordinaten und ihre Analoga in der Ebene, in der Geraden und im R_n.

$$(1)\qquad K_i \equiv a_i(x^2+y^2+z^2)+2b_ix+2c_iy+2d_iz+e_i$$

sei eine besondere *reelle*, nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktion 2. Grades der gleichschenklig-rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Sämtliche durch $K_i=0$ definierten geometrischen Gebilde sollen jetzt *Kugeln* heißen. Für $a_i \neq 0$ stellt $K_i=0$ eine Kugel im Sinne der Elementargeometrie dar, deren Mitte O_i die reellen Koordinaten $-\frac{b_i}{a_i}, -\frac{c_i}{a_i}, -\frac{d_i}{a_i}$ hat und deren Radius r_i durch

$$(2)\qquad r_i^2=\frac{b_i^2+c_i^2+d_i^2-a_ie_i}{a_i^2}$$

bis auf das Vorzeichen gegeben ist. r_i kann reell oder rein imaginär sein[248]). Für $r_i=0$ soll die in den Minimalkegel des reellen Punktes O_i degenerierte Kugel *Nullkugel*[249]) genannt werden. Für $a_i=0$ stellt $K_i=0$ eine Ebene als Kugel mit unendlich großem Radius dar. Die Strecke (b_i, c_i, d_i) bestimmt (Nr. 3) die Richtung des unendlichfernen Mittelpunktes. Der Form $K_i\equiv e_i$ entspricht die unendlichferne Ebene (Nr. 3), die hier zugleich als Nullkugel zu betrachten ist[250]).

---

246) Die Nichteuklidischen Raumformen in anal. Behandlung, Leipzig 1885, p. 56. Nach *F. Klein*, Autogr. Vorl. über Nichteukl. Geom. 1, p. 297, hat diese Koordinaten *Weierstraß* im Sommersemester 1872 im Seminar mitgeteilt.

247) Wählt man in einem solchen Raum drei zueinander normale Ebenen und bezeichnet die aus einem Punkte P auf sie gefällten Lote mit a, b, c, so ist

$$x=k\sin\frac{a}{k},\quad y=k\sin\frac{b}{k},\quad z=k\sin\frac{c}{k},$$

wo $\frac{1}{k^2}$ das Krümmungsmaß des Raumes bedeutet. Für $k=\infty$ gehen x, y, z in die Cartesischen Koordinaten über. — Anwendungen finden sich, außer in den Anm. 246 angeführten Werken, noch bei *W. Story*, Amer. J. math. 5 (1882), p. 358—381; *W. Killing*, J. f. Math. 98 (1885), p. 1—48; *L. Gérard*, Sur la géométrie non euclidienne, Thèse, Paris 1892; *F. Hausdorff*, Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 51 (1899), p. 161—214; *H. Liebmann*, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1905, p. 166 f. — Wegen anderer Koordinaten in nichteuklidischen Räumen s. III AB 11.

248) In letzerem Fall soll die Kugel nach *F. Klein* (Anm. 81) *nullteilig* heißen.

249) *A. Cayley*, Ann. mat. p. appl. (2) 1 (1867—68), p. 132; *Punktkugel* bei *Th. Reye*, Geom. d. Kugeln, p. 4, und *G. Loria*, Mem. Acc. Torino (2) 36 (1884), p. 203.

250) Vgl. Anm. 263.

Ist $a_i \neq 0$, so heißt der Wert von $\frac{K_i}{a_i}$ für einen Punkt $P(x, y, z)$ die *Potenz der Kugel in diesem Punkt*[251]). Setzt man $\overline{O_i P} = d_i$, so ist

$$(3) \qquad \frac{K_i}{a_i} = d_i^2 - r_i^2$$

das Quadrat der Tangentialentfernung des Punktes P von der Kugel (O_i, r_i). Für $a_i = 0$ kann der Wert von K_i selbst als Potenz betrachtet werden (vgl. Nr. 3). Der Ort aller Punkte, in denen K_i einen konstanten Wert hat, ist eine Kugel um O_i.

Die Werte von drei oder vier linear unabhängigen Funktionen K_i in einem Punkte P bilden (Nr. 4) nichthomogene bzw. homogene krummlinige Koordinaten des Punktes P und können als *trisphärische* bzw. *tetrasphärische Punktkoordinaten* bezeichnet werden. Sie sind die mit festen Konstanten multiplizierten Potenzen von drei nicht durch denselben Kreis gehenden, bzw. vier nicht durch dasselbe Punktepaar gehenden Grundkugeln im Punkte P[252]), werden daher auch *Potenz-*

---

251) III C 2, *Staude*, Nr. 11. Der Name stammt von *J. Steiner*, J. f. Math. 1 (1826), p. 164 f. = Ges. W. 1, p. 22; *E. Laguerre*, Paris C. R. 1865 = Oeuvres 2, p. 20, nennt die linke Seite der Gl. $f(x, y) = 0$ die Potenz der dadurch definierten algebraischen Kurve im Punkte (x, y). Für eine Kurve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, die die absoluten Punkte zu n-fachen Punkten hat, gilt der Satz: Zieht man durch den Punkt P eine beliebige, die Kurve in $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ schneidende Gerade, so hat $\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} \cdot \ldots \cdot \overline{PA_{2n}}$ einen von der Richtung der Geraden unabhängigen Wert, die Potenz der Kurve in P. Solche den Kreis und die später erwähnten zyklischen Kurven umfassende Kurven werden daher auch *Potenzkurven* genannt (vgl. *H. Wieleitner*, Spez. ebene Kurven, Leipzig 1908, p. 10).

252) Nachdem *J. Plücker*, Entw. 1 (1828), p. 49 f. auf das Rechnen mit den linken Seiten von Kreisgleichungen aufmerksam gemacht, lag es nahe, diese Größen als Punktkoordinaten in der Ebene zu betrachten. *H. G. Zeuthen*, Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 297—306, untersucht die durch lineare und quadratische Gleichungen zwischen *Zweikreiskoordinaten* bestimmten Kurven. *G. Darboux*, ebenda, p. 156—165, untersucht die ebenen Schnitte des Torus, indem er die Gleichung dieser Fläche in der Form $ct + c't' + c''t'' = 0$ darstellt, worin t, t', t'' die Tangentialentfernungen eines Flächenpunktes von drei eingeschriebenen Kugeln bezeichnen, also die Quadratwurzeln aus trisphärischen Koordinaten. Vgl. wegen tetrasphärischer Koordinaten auch zahlreiche Stellen in „Classe rem.". Auf den Sonderfall dieser Koordinaten, daß man als Grundkugeln Nullkugeln wähle, machte *F. H. Siebeck*, J. f. Math. 62 (1863), p. 155 f., aufmerksam. Trizyklische Koordinaten in der Ebene und tetrasphärische im Raum hat *J. Casey* vielfach benutzt. Vgl. bezüglich ersterer Trans. R. Ir. Ac. Dublin 24 (1869), p. 457—569, bezüglich letzterer (bei orthogonalen Grundkugeln) Phil. Trans. 161 (1871), p. 587 ff. Ist $K = \sum m_i K_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, so hat die Mitte von K bezüglich der Mitten der vier Kugeln K_i die baryzentrischen Koordinaten m_i; *J. Casey*, a. a. O., p. 585. Der Satz findet sich schon bei *H. Graßmann*, Geom. Analyse usw., gekrönte Preisschr. Leipzig 1847 = Ges. W. 1[1], p. 386; Ausdehnungsl. v. 1862,

koordinaten[253]) genannt. Vier beliebige Zahlen, als tetrasphärische Koordinaten betrachtet, bestimmen zwei bezüglich der Orthogonalkugel der Grundkugeln inverse Punkte. Die trisphärischen Koordinaten lassen sich als tetrasphärische ansehen, für die eine Grundkugel die unendlichferne Ebene (Nullkugel) ist.

Jede homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den tetrasphärischen Koordinaten stellt eine Fläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung dar, die den absoluten Kegelschnitt zur n-fachen Kurve hat und bezüglich der Orthogonalkugel der Grundkugeln zu sich selbst invers ist[254]). Solche Flächen heißen nach *Th. Moutard*[255]) *anallagmatisch*; sie werden von allen Kugeln doppelt berührt, deren Mitten einer bestimmten Fläche n^{ter} Ordnung angehören und die eine feste Kugel orthogonal schneiden. Jede lineare homogene Gleichung stellt insbesondere eine dem Gebüsch der Grundkugeln angehörige Kugel dar[256]).

Besonders vorteilhaft hat sich die Einführung überzähliger homogener Koordinaten obiger Art, der *Darboux*schen *pentasphärischen Punktkoordinaten*[257]), erwiesen. Bezeichnen $K_1, K_2, \ldots, K_5$ voneinander linear unabhängige Formen obiger Art $(|a_1 b_2 c_3 d_4 e_5| \neq 0)$, α_1, α_2,

---

p. 271 = Ges. W. 1², p. 268; vgl. auch *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 373; *K. Doehlemann*, Geom. Transformationen 2, Leipzig 1908, p. 85. — *É. Lucas*, Nouv. Corr. math. 2 (1876), p. 225—232, 257—265, 289—296; 3 (1877), p. 225—230; Ann. mat. p. appl. (2) 8 (1877), p. 187—192, benutzt $\frac{K_i}{2a_i r_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ oder (Bull. Soc. math. France 5 (1877), p. 136—143) $\frac{K_i}{a_i}$ als tetrasphärische (bzw. trizyklische) Punktkoordinaten. Vgl. auch: *A. Magener*, Anallagmatische Punktkoordinaten im Kugelgebüsche und ihre Anwendung auf die nichteukl. Geometrie, Diss. Straßburg 1906; ferner die *astatischen Koordinaten* bei *Weber-Wellstein*, Encykl. 3, p. 539—545, die trizyklische Koordinaten darstellen, deren Grundkreise durch denselben Punkt gehen.

253) *W. K. Clifford*s „power-coordinates", Math. pap., p. 334; vgl. Anm. 261.

254) *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 369; Classe rem., p. 127.

255) L'Institut (1864) = Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 307. Der Name ist zusammengesetzt aus dem α privativum und ἀλλάσσω = ich ändere.

256) *J. Casey*, London Phil. Trans. 161 (1871), p. 585; für Nullkugeln als Grundkugeln schon bei *F. H. Siebeck*, Anm. 252, p. 156.

257) Paris C. R. 73 (1871), p. 734 f.; Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 392. *Darboux* befand sich schon 1868 in deren Besitz; vgl. seine Bemerkung Paris C. R. 73 (1871), p. 734, ferner: *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 268; Höhere Geom. 1, p. 107; *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 252. Ausführlich behandelt hat er sie für den Fall zueinander normaler Grundkugeln in „Classe rem." Note X, p. 256, und „Leçons" 1 (1887), chap. VI; der Name „coordonnées pentasphériques" findet sich daselbst p. 213. S. die Darlegung dieser Koordinaten samt zahlreichen Anwendungen bei *R. Lachlan*, On systems of circles and spheres, London Phil. Trans. 177 (1886), p. 481—625, und *F. Klein*, Höhere Geom. 1 (1893), p. 98 ff.

..., α_5 irgendwelche reelle Konstanten und ϱ einen Proportionalitätsfaktor, so versteht man darunter die durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \varrho x_i = \alpha_i K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

definierten Zahlen x_i. Damit fünf Zahlen x_i pentasphärische Koordinaten eines Punktes seien, müssen sie einer aus (4) leicht ableitbaren homogenen quadratischen Gleichung $\Omega(x) = 0$ von nicht verschwindender Diskriminante genügen[258]). Hat man es mit einem *reellen* Koordinatensystem zu tun, worin nämlich einem reellen Punkt reelle Koordinaten entsprechen, so ist die Form Ω im Sinne des Trägheitsgesetzes (I B 2, *Meyer*, Nr. 3) durch vier Vorzeichen der einen und ein Vorzeichen der anderen Art gekennzeichnet[259]). Jede Größe K der Art (1) läßt sich in der Form

$$(5) \qquad K = \sum_1^5 m_i K_i$$

darstellen[260]), worin die m_i der Größe K eigentümliche Konstanten bedeuten. Die Gleichung einer jeden Kugel ist daher in den Koordinaten x_i linear homogen, und umgekehrt stellt jede solche Gleichung eine Kugel dar. Die Zahlen m_i sollen die *Ableitzahlen*[260]) der Kugel $K = 0$ aus den Kugeln $K_i = 0$ heißen.

Beim Rechnen mit den Formen K spielt die aus den Koeffizienten irgend zweier Formen K_i und K_k gebildete bilineare Form

$$(6) \qquad [K_i | K_k] \equiv a_i e_k + a_k e_i - 2(b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k)$$

eine wichtige Rolle. Das Operationssymbol $[K_i | K_k]$ besitzt Produktcharakter[261]), denn es gilt dafür das kommutative und distributive

258) *G. Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 390; Classe rem., p. 271; *G. Loria,* Mem. Acc. Torino (2) 36 (1884), p. 209; *F. Klein,* Höhere Geom. 1, p. 99.

259) *F. Klein,* Höhere Geom. 1, p. 200; *M. Bôcher,* Reihenentw., p. 40, 30 f.

260) *H. Graßmann,* Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 392—395 = Ges. W. 1², p. 263—265.

261) Er ist von *M. Badorff,* Beiträge z. Theorie d. Kreises u. d. Kugel, Progr. Großherz. Gymn. in Baden, 1877, nachgewiesen und benutzt worden. S. ferner *W. K. Clifford.* On the powers of spheres, Math. pap. (London 1882), p. 333, welcher Aufsatz nach dem Herausgeber aus dem Jahre 1868 stammt. Für den Fall von Nullkugeln scheint diesen Produktcharakter auch *A. F. Möbius* erkannt zu haben; vgl. die Abschnitte V—VIII seiner nachgelassenen Abhandlung „Über geom. Addition u. Multipl." aus d. J. 1862, Ges. W. 4, p. 678—697. Die Arbeiten von: *R. Mehmke,* Anwendung d. Graßmannschen Ausdehnungslehre a. d. Geom. d. Kreise i. d. Ebene, Diss. Stuttgart 1880; *H. Cox,* The Quart. J. p. appl. math. 19 (1883), p. 79 f.; 25 (1891), p. 1—71; *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 365—402; 4 (1893), p. 1—52, beruhen zum großen Teil auf der Ausnutzung dieser Eigenschaft, die natürlich für alle bilinearen Formen gilt.

Gesetz. Für $a_i \neq 0$, $a_k \neq 0$ ist, unter d_{ik} die Zentraldistanz der Kugeln $K_i = 0$, $K_k = 0$ verstanden,

$$(7) \qquad \frac{[K_i | K_k]}{a_i a_k} = d_{ik}^2 - r_i^2 - r_k^2.$$

Dieser Ausdruck heißt die *gemeinsame Potenz*[262]) der beiden Kugeln oder die Potenz der einen Kugel in der anderen. Für $r_k = 0$ geht sie in die Potenz der Kugel K_i im Punkt K_k und für $r_i = r_k = 0$ in das Entfernungsquadrat der beiden Punkte über. Ferner ist $[K_i | K_i] = -2a_i^2 r_i^2$ [263]). Schneiden sich die beiden Kugeln in reellen Punkten unter dem Winkel φ_{ik}, so besteht die Gleichung[264])

$$(8) \qquad \frac{[K_i | K_k]}{a_i a_k} = -2 r_i r_k \cos \varphi_{ik};$$

für den Fall sich nicht reell schneidender Kugeln dient sie zur Definition des Schnittwinkels φ_{ik}.

Die Formeln in pentasphärischen Koordinaten gestalten sich besonders einfach, wenn die Größen K_i so gewählt werden, daß die Gleichungen

$$(9) \qquad [K_i | K_k] = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 5;\ i \neq k)$$

bestehen, die Grundkugeln also wechselseitig normal sind. Zwischen deren Halbmessern besteht dann die Gleichung

$$(10) \qquad \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \cdots + \frac{1}{r_5^2} = 0;$$

262) „puissance commune" bei *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 350; Classe rem., p. 259; s. auch *W. K. Clifford*, Anm. 261, p. 332. *G. Frobenius*, J. f. Math. 79 (1875), p. 185—247, verwendet das $-\frac{1}{2}$-fache dieser Größe unter der Bezeichnung r_{ik}; *G. Loria*, Mem. Acc. Torino (2) 36 (1885), p. 208, nennt $r_i^2 + r_k^2 - d_{ik}^2$ die *Simultaninvariante* der beiden Kugeln. Auf eine wichtige Eigenschaft dieses Ausdrucks weist *G. Schlumberger*, Üb. n-dimensionale lineare u. quadrat. Kugelsysteme, Diss. Zürich 1896, p. 9, hin. — Andere Ausdrücke werden von *J. Steiner*, Ges. W. 1, p. 32, und *Fr. G. Affolter*, Math. Ann. 4 (1872), p. 186, als „gemeinsame Potenz" zweier Kugeln bezeichnet. Eine Ausdehnung des Potenzbegriffs auf zwei Kegelschnitte einer Ebene gab *R. Lachlan*, London Phil. Trans. 177 (1886), p. 489.

263) Für $a_i = 0$, $a_k \neq 0$ ist $[K_i | K_k]$ gleich dem mit a_k und der Länge der Normalenstrecke (Nr. 3) der Ebene K_i multiplizierten Abstand des Punktes O_k von dieser Ebene. Für $a_i = a_k = 0$ ist $[K_i | K_k]$ gleich dem negativen doppelten Produkt der Normalenstrecken beider Ebenen, multipliziert mit dem Kosinus ihres Neigungswinkels. Für K_2 als unendlichferne Ebene ist $[K_1 | K_2] = a_1 e_2$ und $[K_2 | K_2] = 0$; wegen der letzten Gleichung ist die unendlichferne Ebene als Nullkugel zu betrachten. S. auch *R. Lachlan*[262]), p. 484, 576.

264) *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 352. Bei entsprechender Definition des Winkels kann rechts auch das positive Vorzeichen auftreten.

vier sind reell, einer ist imaginär[265]). Setzt man noch in Gl. (4)

$$(11) \qquad \alpha_i = \frac{1}{a_i r_i} = \frac{1}{\sqrt{b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 - a_i e_i}},$$

wo die Quadratwurzeln, mithin auch die Radien der Grundkugeln mit bestimmten Vorzeichen behaftet zu denken sind, so sind die *orthogonalen pentasphärischen Koordinaten* x_i eines Punktes

$$(12) \qquad \varrho x_i = \frac{K_i}{a_i r_i},$$

also proportional den durch die Kugelradien dividierten Potenzen des Punktes in bezug auf fünf zueinander normale Kugeln. Von den Größen K_i dürfen drei auch Ebenen bestimmen; ϱx_i ist dann der doppelte Abstand des Punktes von der orientierten Ebene $K_i = 0$ (Nr. 3)[266]). Alle Punkte der unendlichfernen Ebene außerhalb des absoluten Kegelschnittes haben die Koordinaten $x_i = \frac{1}{r_i}$; jedem Punkt des letzteren gehören ∞^1 Koordinatenquintupel zu[266a]).

In der Gleichung

$$(13) \qquad \sum_1^5 q_i x_i = 0$$

einer Kugel in diesen Koordinaten sind die Koeffizienten q_i den durch die Radien der Grundkugeln dividierten Potenzen der Kugel in den Grundkugeln proportional[267]). Da für eine Nullkugel die q_i den x_i

---

265) *G. Darboux*, Classe rem., p. 136; *F. Klein*, Höhere Geom. 1, p. 100—102. Nach *R. Lachlan*, London Phil. Trans. 177 (1886), p. 518 Fußn., wäre *Clifford*, Educational Times, 1865—66, der erste, der vier orthogonale Kreise in der Ebene benutzt; die Koordinaten in bezug auf fünf orthogonale Kugeln verwendet schon *J. Casey*, London Phil. Trans. 161 (1871), p. 600. — Die Mitten von je vier dieser Kugeln bilden die Ecken eines Tetraeders, dessen Höhen sich in der Mitte der fünften treffen (*Th. Moutard*, Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 306; *G. Darboux*, a. a. O.).

266) *G. Darboux*, Classe rem., p. 137, 265, 266; Leçons 1, p. 216.

266a) *G. Darboux*, Classe rem., p. 266, 267.

267) Denn da ($\varrho = 1$ gedacht)

$$K = \sum_1^5 q_i \frac{K_i}{a_i r_i}$$

die Gl. (13) entsprechende quadratische Form in kartesischen Koordinaten ist, so folgt

$$\left[K \,\middle|\, \frac{K_i}{a_i r_i}\right] = q_i \left[\frac{K_i}{a_i r_i} \,\middle|\, \frac{K_i}{a_i r_i}\right] = -2 q_i.$$

Vgl. *G. Darboux*, Paris C R. 73 (1871), p. 736; Classe rem., p. 259. q_i verschwindet, sobald die Kugel zur Grundkugel K_i normal ist.

proportional sind[267]), so ist für sie

(14a) $$\sum q_i^2 = 0$$

oder

(14b) $$\sum x_i^2 = 0.$$

Letztere einfache Form nimmt die oben erwähnte Bedingungsgleichung $\Omega(x) = 0$ für orthogonale pentasphärische Koordinaten an[268]). Umgekehrt lassen sich je fünf dieser Gleichung genügende Zahlen x_i als orthogonale pentasphärische Koordinaten eines Punktes ansehen[269]). Für

(15) $$\sum \frac{q_i}{r_i} = 0$$

stellt $\sum q_i x_i = 0$ eine Ebene dar;

(16) $$\sum \frac{x_i}{r_i} = 0$$

ist die Gleichung der unendlichfernen Ebene, die zufolge Gl. (14a) als Nullkugel zu betrachten ist[270]). Für irgend zwei Kugeln

$$K \equiv \sum q_i x_i = 0,$$
$$K' \equiv \sum q_i' x_i = 0$$

ist, wegen $[K|K'] = -\frac{2}{\varrho}\sum q_i q_i'$, die Bedingung ihrer Orthogonalität[271])

(17) $$\sum q_i q_i' = 0.$$

---

268) *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 390; Classe rem., Nr. 48; s. auch p. 272. — Einige andere Spezialsysteme pentasphärischer Koordinaten samt den entsprechenden Identitäten betrachtet *R. Lachlan*, a. a. O., p. 602 (drei orthogonale Kugeln und deren Schnittpunkte als Grundkugeln), und insbesondere *M. Bôcher*, Reihenentw., p. 41, 42. — *G. Darboux*, Bull. sc. math. astr. 2 (1871), p. 155, hat die projektive Verallgemeinerung dieser Koordinaten zum Studium der Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt (oder der allgemeinen Flächen dritter Ordnung) benutzt.

269) Für die rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes folgt

$$x = \frac{-\sum \frac{b_i x_i}{a_i r_i}}{\sum \frac{x_i}{r_i}}, \quad y = \frac{-\sum \frac{c_i x_i}{a_i r_i}}{\sum \frac{x_i}{r_i}}, \quad z = \frac{-\sum \frac{d_i x_i}{a_i r_i}}{\sum \frac{x_i}{r_i}}.$$

Da für fünf zueinander normale Kugeln K_i

$$\sum \frac{K_i}{a_i r_i^2} = -2$$

ist, so darf in diesen Gleichungen für Punkte im Endlichen $\sum \frac{x_i}{r_i} = -\frac{2}{\varrho}$ gesetzt werden. S. *G. Darboux*, Classe rem., p. 141, Gl. (41), wo aber bei x, y, z der Faktor 2 fehlt, und Leçons 1, p. 217.

270) *G. Darboux*, Classe rem., p. 260, 270. Vgl. auch Anm. 263.

271) *G. Darboux*, ebenda p. 262. Für die gemeinsame Potenz der beiden

Die Wichtigkeit des pentasphärischen Koordinatensystems besteht in seiner *Invarianz* (Nr. 1) *gegenüber der Gruppe der Inversionen* (III AB 4b, *Fano*, Nr. 11)[272]), so daß bei seiner Verwendung gleichzeitig alle durch Inversion ineinander überführbaren Figuren studiert werden[273]). Geht die Grundkugel K_i dabei in eine Ebene über, so wird ϱx_i der doppelte Abstand von der Ebene.

Kugeln findet er

$$\frac{-2\sum q_i q_i'}{\sum\frac{q_i}{r_i}\sum\frac{q_i'}{r_i'}}.$$

Daraus folgt für das Distanzquadrat zweier Punkte mit den orthogonalen pentasphärischen Koordinaten x_i und y_i

$$d^2 = \frac{\sum(x_i - y_i)^2}{\sum\frac{x_i}{r_i}\sum\frac{y_i}{r_i}}$$

und für das Linienelement

$$ds^2 = \frac{\sum dx_i^2}{\left(\sum\frac{x_i}{r_i}\right)^2};$$

a. a. O., Note X; Leçons 1, p. 213—219. Auch der Winkel zweier durch ihre Gleichungen in diesen Koordinaten gegebenen Flächen drückt sich auf symmetrische Weise aus; Leçons 1, p. 220.

272) Vorbereitet war diese Verwandtschaft durch *J. Steiners* „potenzhaltende Punkte", J. f. Math. 1 (1826) = Ges. W. 1, p. 33, und *Poncelets* invers liegende Punkte. Besprochen wurde sie zuerst von *J. Plücker*, Entw. 1 (1828), Nr. 184; J. f. Math. 11 (1834, dat. v. 1831) = Ges. Abh. 1, p. 277. Als Sonderfall der quadratischen Transformation hat sie gestreift *L. I. Magnus,* J. f. Math. 8 (1831), p. 51, insbes. p. 60; Aufg. u. Lehrs. 1, p. 236, 290; *G. Bellavitis*, Ann. sc. Ist. Regno Lomb. Ven. 6 (1836), p. 136—141; Nuovi Saggi Acc. Padova 4 (1838), p. 243—288 hat diese Transformation und ihre projektive Verallgemeinerung auseinandergesetzt. Vgl. ferner *J. W. Stubbs*, The London Edinb. Dublin Phil. Mag. (3) 23 (1843), p. 338—347. Neu entdeckt wurde diese Transformation als „Prinzip der elektrischen Bilder" von *W. Thomson,* J. math. p. appl. 10 (1845), p. 364—367, unabhängig von *Thomson* auch von *C. Neumann*, stat. Temperaturzustand, Leipzig 1861; vgl. auch „Potential", Leipzig 1877, p. 54, 355 [II A 7b, Nr. 16]; den Namen „transformation par rayons réciproques" erhielt sie durch *J. Liouville,* ebenda 12 (1847), p. 276. In allgemeinerer Form gelangte dazu *A. F. Möbius*, Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 5 (1853), p. 14—24 = J. f. Math. 52 (1856), p. 218—228 = Ges. W. 2, p. 207—217; Abh. Ges. Leipzig (math.-phys.) 2 (1855), p. 529—595 = Ges. W. 2, p. 243—314. Die projektive Verallgemeinerung behandelt als „quadratische Inversion" *T. A. Hirst*, Ann. mat. p. appl. (1) 7 (1865), p. 49—65 und Proc. R. Soc London 14 (1865), p. 49—65; hierin mit Erwähnung der dualen Transformation. Den Sonderfall der Inversion an einer gleichseitigen Hyperbel hat auch *G. V. Schiaparelli*, Mem. Acc. Torino (2) 21 (1864, geschr. 1861), p. 227—319, studiert. — Die Inversion wird auch *Spiegelung an einer Kugel* oder *Symmetrie bezüglich einer Kugel* genannt.

Jede homogene Gleichung $\varphi(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_5^2) = 0$ zwischen den Quadraten der orthogonalen pentasphärischen Koordinaten x_i bestimmt (zusammen mit der Identität $\sum x_i^2 = 0$) eine bezüglich jeder der Grundkugeln anallagmatische Fläche[274]). Eine homogene quadratische Gleichung zwischen den x_i bestimmt im allgemeinen eine Fläche vierter Ordnung mit dem absoluten Kegelschnitt als Doppelkurve, eine sogenannte *Zyklide*[275]). Diese Gleichung läßt sich im allgemein-

---

273) *G. Darboux*, Classe rem., p. 265. S. auch *F. Klein*, Vergl. Betr., § 6. Die Gruppe der Inversionen nennt *G. Koenigs*, Géom. réglée, p. 140, auch „anallagmatische Gruppe". Jede Transformation dieser Gruppe läßt sich als lineare Transformation der x_i auffassen, die $\Omega(x)$ in sich selbst überführt. Auf dieser Eigenschaft der Koordinaten x_i beruht ihre Anwendung in der Theorie der Krümmungslinien und der orthogonalen Flächensysteme; vgl. *G. Darboux*, Leçons 1, Nr. 154, 155.

274) *G. Darboux*, Classe rem., p. 139. Diese Kugeln heißen nach *Th. Moutard*[275]) „sphères principales", nach *J. de la Gournerie* und *G. Darboux* (Classe rem., p. 116) „sphères directrices", sonst auch *Symmetriekugeln*. — Auf andere anallagmatische Kurven und Flächen vierter und höherer Ordnung wies *H. Picquet*, Paris C. R. 87 (1878), p. 460, hin.

275) Diese Flächen wurden zuerst von *Th. Moutard*, Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 306—309, 536—539; Bull. Soc. Philom. (1864); Paris C. R. 59 (1864), p. 243, und *G. Darboux*, Paris C. R. 59 (1864), p. 240—242; Ann. éc. norm. 2 (1865), p. 55, 3 (1866), p. 97—141, (2) 1 (1872), p. 273—292, usw. untersucht. Mit diesen Flächen und den analogen Kurven auf der Kugel und in der Ebene hat sich ferner *E. Laguerre* von 1865 an in mehreren Arbeiten beschäftigt; vgl. Oeuvres 2, Paris 1905. — *G. Darboux*, Paris C. R. 68 (1869), p. 1313, gab ihnen den Namen *cyclides* (den analogen Kurven in der Ebene den Namen *cycliques*, ebenda), der ursprünglich von *Ch. Dupin*, Applications de géométrie et de mécanique, Paris 1822, p. 200, für die Hüllfläche der drei gegebene Kugeln berührenden Kugeln gebraucht wurde. [Diese *Dupinsche Zyklide* ist schon besprochen: Corr. éc. polyt. 1 (1804—8, geschr. a. XII), 2e éd. Paris 1813, p. 22—25; 2 (1809—13, geschr. 1812), p. 423—425.] *J. Casey*, London Phil. Trans. 161 (1871), p. 587, schloß sich dieser Benennung an. — *E. E. Kummer*, Monatsber. Ak. Berlin 1863, p. 324—336 = J. f. Math. 64 (1865), p. 66—76, hatte schon vorher die Flächen vierter Ordnung mit einem beliebigen Doppelkegelschnitt untersucht. Ausführliches über diese Flächen bei *L. Bersolari*, Ann. mat. p. appl. (2) 13 (1885), p. 81—174, und *C. Segre*, Math. Ann. 24 (1884), p. 313—444. — Bezüglich der hinsichtlich der Gruppe der Inversionen verschiedenen Arten von Zykliden s. *G. Darboux*, Classe rem., p. 128—131; *G. Loria*, Mem. Acc. Torino (2) 36 (1884), p. 266—297; *M. Bôcher*, Reihenentw., Kap. 3, 4, insbes. p. 53. — Zur Geschichte der Zykliden vgl. das die Hauptergebnisse seiner Untersuchungen über diese Flächen enthaltende Werk von *G. Darboux*, Classe rem., p. 107 ff. und das Literaturverzeichnis p. 337—340; ferner *C. Segre*, a. a. O., p. 313 ff.; *G. Loria*, Teor. geom. Kap. 3, Nr. 9; *R. Suppantschitsch*, Über Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, Progr. Prag 1904. — Wegen der *zyklischen* (oder *bizirkularen*) Kurven vierter Ordnung vgl. III C 5, *Kohn*, Nr. 84—90, 94—96, zumal Anm. 367.

sten Fall durch Übergang zu einem neuen System orthogonaler pentasphärischer Koordinaten auf die Form

$$(18) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{a_i} = 0$$

bringen, so daß die neuen Grundkugeln die *Symmetriekugeln* der Fläche[274]) sind.

In jedem der durch diese Symmetriekugeln (als Orthogonalkugeln) bestimmten Gebüsch gibt es ∞^2 die Fläche doppelt berührende Kugeln, deren Mitten einer Fläche zweiter Ordnung (einer *Deferente*[276]) angehören. Die fünf Deferenten sind konfokal (III C 2, *Staude*, Nr. 53)[276a]).

Die vollkommen analogen, nur durch die Koordinatenanzahl verschiedenen Koordinatensysteme existieren in Räumen beliebiger Dimensionenzahl[277]), insbesondere auch in der Ebene (*bi-*, *tri-* und *tetrazyklische Koordinaten*[278])) und in der Geraden. Für letztere sind die den obigen K_i entsprechenden Formen $a_i x^2 + 2b_i x + c_i$ *allgemeine* quadratische Formen einer Veränderlichen und bestimmen, gleich Null gesetzt, *Punktepaare*. Auf sie lassen sich die Begriffe Mittelpunkt, Radius, Potenz, gemeinsame Potenz übertragen; Orthogonalität ist durch harmonische Lage zu ersetzen[279]). Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den *Dreipunktepaarkoordinaten* eines Punktes bestimmt $2n$ Punkte[280]).

---

276) *J. de la Gournerie*, J. math. p. appl. (2) 14 (1869), p. 37, spricht von „courbe déférente"; die Bezeichnung ist der Astronomie der Alten entlehnt (vgl. *K. Doehlemann*, Geom. Transformationen 2, Leipzig 1908, p. 79 Fußn.). S. auch *G. Darboux*, Classe rem., p. 116.

276a) Vgl. *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 275; Classe rem., p. 117, 153.

277) *S. Lie*, Nachr. Ges. Gött. 1871, p. 191—209, 535—557; *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 257—277; *M. Bôcher*, Reihenentw., p. 243 f.; *G. Darboux*, Systèmes orth., p. 121.

278) Sie werden in der Mehrzahl der angeführten Arbeiten über pentasphärische Koordinaten besprochen. *H. Cox*, The Quart. J. p. appl. math. 19 (1883), p. 112, erwähnt den Sonderfall, daß als Grundkreise zwei orthogonale Kreise und deren Schnittpunkte verwendet werden. S. auch *R. Lachlan*, London Phil. Trans. 177 (1886), p. 518 f. — *M. Bôcher*, Reihenentw., p. 25—34, untersucht verschiedene Sonderfälle dieses Koordinatensystems. *E. Kasner*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 442 f., benutzt sie neben den Minimalkoordinaten zur Behandlung der Inversionsgruppe der Ebene und insbes. zur Klassifikation der zyklischen Kurven vierter Ordnung (p. 490).

279) *E. Müller*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 124, 125.

280) Eine ähnliche Darstellung binärer Formen gerader Ordnung kommt

11. Koordinaten in bezug auf eine Normkurve. In

$$(1)\qquad F(x, y, z, \lambda) \equiv f_3\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_1\lambda + f_0$$

seien die Koeffizienten f_i ganze rationale Funktionen der Cartesischen Koordinaten x, y, z (oder anderer linearer Punktkoordinaten). Dann definiert die Gleichung

$$(2)\qquad F(x, y, z, \lambda) = 0$$

λ als algebraische Funktion dritten Grades der Koordinaten x, y, z. *Die drei Zweige* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *dieser Funktion definieren dann im Sinne von* Nr. 4 *krummlinige Koordinaten des Punktes* (x, y, z)[281]. Im R_n (Nr. 3) müßte die der Gl. (2) entsprechende Gleichung vom n^{ten} Grade in λ sein.

Wählt man in (1) die f_i als voneinander unabhängige *ganze lineare* Funktionen von x, y, z oder, was auf dasselbe hinauskommt, als homogene lineare Funktionen der Tetraederkoordinaten x_i (Nr. 5), setzt also

$$(3)\qquad f_i \equiv (-1)^{i-1}\alpha_i \equiv (-1)^{i-1}(\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \alpha_{i4}x_4),$$
$$i = 0, 1, 2, 3; \quad |\alpha_{ik}| \neq 0,$$

so stellt die (2) entsprechende Gleichung[282]

$$(4)\qquad \alpha_3\lambda^3 - \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda - \alpha_0 = 0$$

die Ebenen einer Raumkurve dritter Ordnung dar, die den Werten von λ ein-eindeutig zugeordnet sind. Man nennt nach *W. Fr. Meyer*[283] für einen R_n die durch die analoge Gleichung

$$(5)\qquad \sum_0^n (-1)^{i-1}\alpha_i\lambda^i = 0$$

definierte Kurve n^{ter} Ordnung eine *Normkurve* dieses Raumes[284]. Die

---

bei *A. Clebsch,* Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, § 103, zur Anwendung.

281) Gl. (2) bestimmt eine Flächenschar, von der im allgemeinen durch jeden Punkt des Raumes drei Flächen gehen. Die elementarsymmetrischen Funktionen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, also $s_1 = -\frac{f_2}{f_3}$, $s_2 = \frac{f_1}{f_3}$, $s_3 = -\frac{f_0}{f_3}$, sind Koordinaten des Punktes (x, y, z) im gebräuchlicheren Sinn (Nr. 4).

282) Sie findet sich bei *L. Cremona,* Ann. mat. p. appl. (1) 1 (1858), p. 165, die Ausdehnung auf den R_n bei *W. K. Clifford,* London Phil. Trans. 169 (1878), p. 663—681 = Math. pap., p. 312; s. auch *C. A. v. Drach,* Zeitschr. Math. Phys. 12 (Supplement) (1867), p. 80 ff.; *E. Beltrami,* Rend. Ist. Lomb. (2) 1 (1868), p. 130 f. = Opere mat. 1, p. 354 f.; *R. Sturm,* J. f. Math. 86 (1879), p. 116. — Die duale Form verwendet schon *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul, § 96.

283) Apolarität, p. 42; auf dieses Werk verweise ich wegen weiterer Literatur.

284) *G. Kohn,* Sitzungsber. Ak. (math.-nat.) Wien 104 (1895), p. 1167—1170, deutet die linearen homogenen Koordinaten eines Punktes P im R_n mittels

einem Punkt (x, y, z) zugehörigen Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, d. h. die Parameter der durch ihn gehenden Kurvenebenen[285]), sollen daher die *Koordinaten des Punktes in bezug auf eine Normkurve*[286]) heißen. Sie unterscheiden sich von den früher besprochenen Punktkoordinaten wesentlich dadurch, daß es gleichgültig ist, welche der drei Koordinatenwerte man als λ_1, λ_2 oder λ_3 betrachtet. Die Punkte, für welche zwei der λ_i gleich sind, gehören der Tangentenfläche der Normkurve, jene, für welche $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ist, der Normkurve selbst an.

Das durch die Ebenen $\alpha_i = 0$ gebildete Tetraeder ist ein Schmiegtetraeder der Normkurve[287]). Die elementarsymmetrischen Funktionen der λ_i sind projektive Koordinaten in bezug auf dieses Tetraeder, dessen Einheitspunkt die Koordinaten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = +\sqrt{-1}$, $\lambda_3 = -\sqrt{-1}$ besitzt. Jede nicht zerfallende Raumkurve dritter Ordnung kann als Normkurve gewählt werden. Punkte, die in bezug auf zwei verschiedene Normkurven gleiche Koordinaten λ_i haben, sind entsprechende Punkte kollinearer Räume[288]). Das Koordinatensystem ist zur Untersuchung projektiver Eigenschaften geeignet.

Die durch Gleichungen zwischen den Koordinaten λ_i definierten Flächen sind kaum untersucht worden[289]). Die Hauptanwendungen

---

der durch die Grundpunkte, den Einheitspunkt und P legbaren Normkurve. Vgl. ferner dessen Deutung der Koordinaten einer Ebene, ebenda 112[2a] (1903), p. 332, die sich dualisieren läßt.

285) Sind die den Werten $\lambda = \infty, 0, 1$ entsprechenden Kurvenebenen ε_∞, ε_0, ε_1 fest gegeben, so ist der Parameter λ irgend einer Kurvenebene ε gleich dem Doppelverhältnis $(\varepsilon_\infty \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon)$ und kann für jede Normkurve rein geometrisch definiert werden. Da die Ebenen der Normkurve ihren Schnittpunkten mit irgend einer festen Tangente projektiv entsprechen, so können die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als projektive Koordinaten dreier Punkte dieser Tangente aufgefaßt werden.

286) *W. Fr. Meyer,* Apolarität, p. 50; dieses Werk bevorzugt als Koordinaten die elementarsymmetrischen Funktionen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Diese Koordinatenbestimmung verwenden schon *K. W. Clifford* und *R. Sturm*, a. a. O., sowie *Th. Hirst*, On the representation of points in space by triplets of points on a line, Proc. London Math. Soc. 2 (1869, geschr. 1867), p. 48.

287) *W. Fr. Meyer,* a. a. O., p. 47, 48. Die Ecken a_0 und a_3 des Tetraeders gehören der Raumkurve an, α_3 und α_0 sind Schmiegebenen, $[a_0 a_1]$, $[a_3 a_2]$ Tangenten in diesen Punkten. Die vier Ebenen $\alpha_i = 0$ bestimmen, auch wenn man angibt, welche zwei Tetraederecken Punkte und welche zwei Kanten Tangenten der Kurve sein sollen, diese noch nicht völlig, sondern es ist z. B. noch die Kenntnis eines ihrer Punkte nötig. Dies erklärt sich aus Gl. (4) dadurch, daß eine Ebene die lineare zugehörige Funktion α_i nur bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt.

288) *W. Fr. Meyer*, a. a. O., p. 399.

289) Ist $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade n_i in λ_i $(i = 1, 2, 3)$, so ist die Ordnung der Fläche $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ im allgemeinen

fand dieses Koordinatensystem beim Studium binärer Formen mittels geometrischer Abbildungen (Nr. 26)[290].

Das analoge Koordinatensystem in der Ebene, für welches, wenn α_i lineare homogene Funktionen der Dreieckskoordinaten bezeichnen, der Kegelschnitt

$$\alpha_2 \lambda^2 - \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \tag{6}$$

als *Normkurve* dient, ist von *G. Darboux*[291]) und *W. K. Clifford*[292]) aufgestellt und benutzt worden. Der absolute Kegelschnitt des Raumes insbesondere dient *Clebsch-Lindemann*[293]) zur Definition von Koordinaten in der unendlichfernen Ebene und *E. Waelsch*[294]), unter

$2(n_1 + n_2 + n_3)$. Ist die Funktion f in allen λ_i symmetrisch und vom n^{ten} Grade, so definiert $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ eine Fläche n^{ter} Ordnung. Eine allgemeine lineare Gleichung zwischen den λ_i bestimmt daher eine Fläche sechster Ordnung.

290) S. III C 2, *Staude*, Nr. 107; III A B 4b, *Fano*, Nr. 28; insbesondere aber *W. Fr. Meyer*, a. a. O. Ausführliche Literaturangaben darüber I B 2, *Meyer*, Nr. 24.

291) L'Institut 40 (1872), p. 180—182, 259—263; Classe rem., Note II, p. 183; Paris C. R. 90 (1880), p. 85. Vgl. auch *J. Neuberg*, Nouv. Corr. math. 2 (1876), p. 1, 34, 65. — Die zu (6) duale Gleichungsform eines Kegelschnitts im Wesen bei *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul, § 61.

292) Proc. London Math. Soc. 7 (1875), p. 29—38 = Math. pap., p. 205—217. Zu einem ähnlichen Koordinatensystem gelangte *J. Plücker*, J. f. Math. 34 (1847), p. 360—376 = Ges. Abh. 1, p. 437 f., indem er seine stereographischen Koordinaten eines Punktes einer Regelfläche zweiter Ordnung für den Fall der Degeneration der Fläche in das Tangentensystem einer Kurve zweiter Klasse untersucht. Vgl. auch die Bemerkung von *A. Cayley*, J. f. Math. 67 (1867), p. 95 f. = Math. pap. 7, p. 121 f. — Eine Kegelschnittgleichung der Form (6) vermittelt bei *O. Hesse*, J. f. Math. 66 (1866), p. 15—21 = Ges. W., p. 531—538, die Abbildung der Punkte der Ebene auf die Punktepaare einer Geraden. — Rein geometrisch definiert diese Koordinaten *A. Visnya*, Arch. Math. Phys. (3) 10 (1906), p. 337—339. Anwendung finden sie bei *A. Hurwitz*, Math. Ann. 45 (1894), p. 85 f.

Verwandt damit ist das System der „Kreiskoordinaten", das *J. Plücker* 1847 in seinen Vorlesungen erwähnt und *W. Stammer*, J. f. Math. 44 (1852), p. 295—316 (sowie Diss. 1849), behandelt hat. Als Normkegelschnitt dient ein Kreis, als Parameterwerte seiner Punkte werden ihre Bogenabstände von einem festen Punkt gewählt.

Hier greift die Beziehung zwischen $e^{i\varphi}$ und $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ als Parameter ein. Für

$$(x - iy)\lambda^2 - 2r\lambda + (x + iy) = 0$$

oder

$$(r + x)\lambda^2 - 2y\lambda + (r - x) = 0$$

als Gleichung des Normkreises erhält man als Parameterwerte seiner Punkte in obigem Sinn $\lambda = e^{i\varphi}$ bzw. $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

293) 2[1], p. 571, 606 f.

294) Sitzungsber. Ak. (math.-nat.) Wien 112[2a] (1903), p. 645—665, 1091—1097, 1533—1552; Anz. Ak. Wien 38 (1901), Nr. XXVII. Hat Punkt P die

Hinzunahme eines im Endlichen liegenden Punktes O, zur Aufstellung eines möglichst absoluten Koordinatensystems, das er zur „Binäranalyse des Raumes" verwendet.

12. Allgemeine elliptische Koordinaten[295]). Um den nächsten Fall der eingangs Nr. **11** erwähnten krummlinigen Koordinaten zu erhalten, wären in der dortigen Gl. (1) die f_i als beliebige quadratische Funktionen von x, y, z zu wählen[295a]). Hierzu gehören, als die einzig untersuchten Sonderfälle, die *elliptischen* und *parabolischen* Koordinaten sowie deren projektive Verallgemeinerung.

Auf die elliptischen Koordinaten wurde *G. Lamé*[296]) geführt, indem er eine isothermische Schar von Flächen 2. Ordnung suchte. Er fand die durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1 \qquad (a>b>c),$$

worin a, b, c reelle Zahlen und λ einen Parameter bezeichnen, definierte Schar *konfokaler*[297]) (homofokaler) Flächen. Multipliziert man

---

rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und setzt man $a_0 = x + iy$, $a_1 = iz$, $a_2 = x - iy$, so heißt die binäre quadratische Form a_x^2 die Koordinate des Punktes P oder des Vektors OP. Das vektorielle und skalare Produkt zweier Vektoren stehen mit der ersten und zweiten Überschiebung ihrer Koordinatenformen in einfacher Beziehung. Den Punkten des Minimalkegels aus O entsprechen Quadrate von Linearformen, welch letztere als Koordinaten der „Minimalpunkte" gelten. Eine Ebene wird durch die Koordinate ihres Poles bezüglich der Einheitskugel um O bestimmt. Eine orientierte Gerade (Speer) hat zu Koordinaten die ihrer Schnittpunkte mit dem Minimalkegel aus O. (Diese Binäranalyse wird auf die Dreiecksgeometrie angewandt: Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 273—311). Einer binären Form $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung lassen sich dann, entsprechend ihren Zerlegungen in quadratische Faktoren, ein System von je ν gleich langen von O ausgehenden Vektoren (*Polyvektoren* oder *Vielbeinen* ν^{ter} *Ordnung*) zuordnen; die Koeffizienten der binären Form sind die Koordinaten des Vielbeins. Vgl. Sitzungsber. Ak. (math.-nat.) Wien 113 [2a] (1904), p. 1107 ff.; Anz. Ak. Wien 43 (1906) v. 26. Apr.; Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 241—280; Paris C. R. 143 (1906), p. 204—207.

295) Vgl. auch III C 1, *Dingeldey*, Nr. **66**; III C 2, *Staude*, Nr. **64**; IV 2, *Timerding*, Nr. **30**.

295a) Einen allgemeineren hierher gehörigen Fall behandelt *O. Böklen*, Anal. Geom., p. 202 f.

296) J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 147—183, abgedruckt aus Mém. prés. div. sav. Ac. sc. Paris 5 (1833, erschienen 1838), p. 184, welcher Band aber nach jenem Aufsatz zur Ausgabe gelangte; vgl. auch die Inhaltsangabe in Ann. Chim. Phys. 53 (1833), p. 190—204.

297) Auf sie wurde *J. Binet*, J. éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 59 (lu à l'Institut 1811), geführt, der auch ihre Haupteigenschaften erkannt hat; vgl. J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 148. *Ch. Dupin* beschäftigte sich schon 1805 mit diesem

Gl. (1) mit $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$, wodurch auch die $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$ entsprechenden Doppelebenen $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$ als uneigentliche Flächen der Schar hinzugerechnet werden, so erhält sie die Form

$$(2) \quad f(\lambda) \equiv x^2(b-\lambda)(c-\lambda) + y^2(c-\lambda)(a-\lambda) + z^2(a-\lambda)(b-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0$$

oder

$$(3) \quad f(\lambda) \equiv \lambda^3 + \lambda^2(x^2+y^2+z^2-a-b-c) + \lambda[-(b+c)x^2-(c+a)y^2-(a+b)z^2+ab+bc+ca] + (bcx^2+cay^2+abz^2-abc) = 0.$$

Aus (3) ist die Übereinstimmung mit (1) in Nr. **11** ersichtlich[298]). Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dieser Gleichung heißen die (*allgemeinen*) *elliptischen Koordinaten*[299]) des Punktes (x, y, z). Sie gehören zu den *orthogonalen* krummlinigen Koordinaten (Nr. 4).

---

dreifach orthogonalen Flächensystem, hat aber seine Untersuchungen erst 1813, Dével. de géométrie, p. 305 f., veröffentlicht (L'Institut de France hat 1813 seine Priorität anerkannt; s. a. a. O., p. 305 Fußn.). — Weitere Literatur über konfokale Flächen 2. O. III C 2, *Staude*, Nr. 53; ihre Geschichte bei *E. Kötter*, Bericht 1, p. 81—83, 396 f. Wegen des ersten Auftretens konfokaler Kegelschnitte s. III C 1, *Dingeldey*, Anm. 402. — Bei *Lamé* hat Gl. (1) die Form

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

298) $f_0 = 0$ stellt die $\lambda = 0$ entsprechende Fläche der Schar, $f_2 = 0$ deren *Monge*sche Kugel und $f_1 = 0$ jene Fläche 2. O. dar, aus deren Punkten an $f_0 = 0$ drei rechtwinklige Tangenten legbar sind (III C 2, *Staude*, Nr. 25), während $f_3 = 0$ die unendlichferne Ebene bestimmt. — Die Analogie zwischen den Koordinaten in bezug auf eine Normkurve und den elliptischen Koordinaten hat *E. Beltrami*[282]), Opere mat. 1, p. 355, benutzt. Wählt man mit ihm als Normkurve die kubische Parabel

$$\frac{x}{a-\lambda} + \frac{y}{b-\lambda} + \frac{z}{c-\lambda} = 1,$$

so geht aus deren Schmiegebenen die Schar der konfokalen Flächen 2. O. durch eine quadratische Transformation hervor.

299) *G. Lamé*, J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 156 (hier und Ann. Chim. Phys. 53 (1833), p. 199, die Namen „coordonnées elliptiques" und „surfaces homofocales"; wegen des letzteren vgl. auch III C 2, *Staude*, Anm. 262). *C. G. J. Jacobi*, Monatsber. Ak. Berlin 1839, p. 64 = J. f. Math. 19 (1839), p. 309 = Werke 2, p. 57 = J. math. p. appl. (1) 6 (1840), p. 267 (vgl. auch Paris C. R. 8 (1839), p. 284), verwendet sie als Substitutionsvariable zur Integration der Differentialgleichungen der geodätischen Linien (Beweis der Sätze bei *J. Liouville*, J. math. p. appl. 9 (1844), p. 401—408) und der ebenen konformen Abbildung des Ellipsoides (vgl. d. näheren J. f. Math. 59 (1861), p. 80 ff., von *S. Cohn* aus den hinterlassenen Papieren mitgeteilt). Vgl. auch J. f. Math. 12 (1834), p. 25. Er be-

Setzt man in $f(\lambda)$ für λ nacheinander die Werte $-\infty, c, b, a$ ein, so erkennt man aus den auftretenden Zeichenwechseln, daß $f(\lambda) = 0$ für einen reellen Punkt allgemeiner Lage drei verschiedene reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ besitzt, für die die Ungleichungen

$$-\infty < \lambda_1 < c < \lambda_2 < b < \lambda_3 < a$$

bestehen. Von den diesen Wurzeln entsprechenden Flächen durch den Punkt (x, y, z) ist die erste ein *Ellipsoid*, die zweite ein *einschaliges*, die dritte ein *zweischaliges Hyperboloid*[300]). Für einen Punkt in einer der Koordinatenebenen artet eine der Flächen in diese doppelt überdeckt zu denkende Ebene aus. Dabei bildet in der xy-Ebene die *Fokalellipse*

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1$$

den Übergang von einem sehr platten, ihr Inneres doppelt überdeckenden Ellipsoid zu einem sehr platten, ihr Äußeres doppelt überdeckenden einschaligen Hyperboloid. In der xz-Ebene bildet die *Fokalhyperbel*

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1$$

den Übergang von einem sehr platten, ihr Äußeres doppelt überdeckenden einschaligen Hyperboloid zu einem sehr platten, ihr Inneres doppelt überdeckenden zweischaligen Hyperboloid. Die Fokalkurve in der yz-Ebene ist *nullteilig*[300a]).

Ein Wertetripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt acht gegen die Koordinatenebenen symmetrisch gelegene Punkte. Deren rechtwinklige Koordinaten sind durch die Gleichungen[301])

$$(6) \qquad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 &= \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-c)(b-a)}, \\ z^2 &= \frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned}$$

---

merkt die Anfänge der Substitution der ebenen elliptischen Koordinaten für x, y bei *Euler* und *Legendre;* vgl. *R. Baltzer,* Anal. Geom., p. 125. Weitere Literatur über elliptische Koordinaten bei *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 39 (1862), p. 377—424. — Wegen des Zusammenhanges der Gl. (3) mit der Theorie der gebrochenen Fokaldistanzen von *O. Staude* vgl. III C 2, *Staude,* Nr. 64.

300) Näheres bei *O. Staude,* Fokaleigenschaften, p. 1—16. Vgl. auch IV 2, *Timerding,* Nr. 30.

300a) Diese Diskussion gibt *Ch. Dupin,* Dével. de géométrie, p. 308—314; s. auch *F. Klein,* Höhere Geom. 1, p. 38 ff.

301) *G. Lamé*, Anm. 299, p. 156.

gegeben. Man erhält sie aus der Gleichung

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \tag{7}$$

wenn man nacheinander $\lambda = a, b, c$ setzt[302]). Weitere Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und elliptischen Koordinaten eines Punktes bei *O. Hesse*[303]) und *O. Böklen*[303a]).

Für die Fokalellipse wird $\lambda_1 = \lambda_2 = c$, für die Fokalhyperbel $\lambda_2 = \lambda_3 = b$, für die unendlichferne Ebene $\lambda_1 = -\infty$[304]). $\lambda_2 = c_2$, $\lambda_3 = c_3$ bestimmen eine Raumkurve 4. Ordnung, die für die beiden in ihr sich durchschneidenden Flächen Krümmungslinie ist[304a]). Das Linienelement ds_1 dieser Kurve ist durch die Gleichung

$$ds_1^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}\,d\lambda_1^2 \tag{8}$$

gegeben, und für die Linienelemente ds_2, ds_3 der beiden anderen Scharen von Schnittkurven bestehen analoge Gleichungen. Da diese drei Kurvenscharen einander rechtwinklig schneiden, so ergibt sich aus $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$ die *Formel für ein beliebiges Linienelement* in elliptischen Koordinaten[305]). Ihre Form zeigt, daß die Flächenschar isothermisch ist[305a]).

Geht man statt von (1) von der Gleichung der konfokalen Kurven 2. Ordnung (III C 1, *Dingeldey*, Nr. 65)

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$$

---

302) Der Grundgedanke dieser einfachen Lösung, nämlich

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1$$

als Partialbruchzerlegung von

$$\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}$$

anzusehen, stammt von *J. Binet*, J. éc. polyt. 9, cah. 16 (1813, lu à l'Institut 1811), p. 60 und insbes. J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 151, 152, wo er die Rechnung gleich für n Variable durchführt.

303) Vorles. Raum (1861), 22. Vorl. S. auch *A. Cayley*, Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 207 f. = Math. pap. 1, p. 253; *O. Staude*, Fokaleigenschaften, p. 27—29.

303a) Anal. Geom., p. 99 ff.; diese Beziehungen werden hier geometrisch gedeutet.

304) *O. Staude*, a. a. O., p. 15.

304a) Aus den Gl. (6) geht hervor, daß sich die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes einer solchen Krümmungslinie als elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen. S. auch III C 2, *Staude*, Nr. 113.

305) *G. Lamé*, J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 158. *O. Staude*, a. a. O., p. 29—31; *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 268.

305a) Wegen solcher Flächenscharen s. *G. Darboux*, Systèmes orth. 1, livre II. chap. 3, 4, 5.

aus, so gelangt man auf demselben Wege zu den *elliptischen Koordinaten in der Ebene*[306]). *C. G. J. Jacobi*[307]) hat die analogen Betrachtungen für den R_n durchgeführt.

13. Spezielle elliptische Koordinaten. Sie ergeben sich, wenn von den Größen a, b, c der Gl. (3) in Nr. **12** zwei oder alle drei einander gleich werden. Wegen $a > b > c$ sind nur die drei Grenzfälle I) $a = b$, $b > c$; II) $a > b$, $b = c$; III) $a = b = c$ möglich.

Fall I: $a = b$, $b > c$[308]).

Die Wurzel λ_3 der erwähnten Gleichung wird $= a$. Setzt man

$$r^2 = \frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{a - c},$$

so können die Gl. (6) von Nr. **12** in der Form

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z^2 &= \frac{(c - \lambda_1)(c - \lambda_2)}{c - a} \end{aligned}$$

geschrieben werden. In jeder Ebene durch die z-Achse, die mit der xz-Ebene den Winkel φ einschließt, sind λ_1, λ_2 elliptische Punktkoordinaten. Die Schar konfokaler Flächen besteht aus abgeplatteten Drehellipsoiden und einschaligen Drehhyperboloiden mit der z-Achse als Drehachse, ferner aus Ebenenpaaren durch diese[309]).

Fall II: $a > b$, $b = c$[310]).

Die Wurzel λ_1 der Gl. (3) in Nr. **12** wird $= b$. Setzt man

$$r^2 = \frac{(b - \lambda_2)(b - \lambda_3)}{b - a},$$

306) III C 1, *Dingeldey,* Nr. **66**; *Clebsch-Lindemann,* 1, p. 164; *O. Staude,* Fokaleigenschaften, p. 162 f. — Der Name „elliptische Koordinaten" eines Punktes der Ebene wird in einer zweiten Bedeutung von *E. Heine,* Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 1, Berlin 1878, p. 16, gebraucht. Vgl. Anm. 352.

307) J. f. Math. 19 (1839), p. 312 (vgl. Anm. 299); Vorlesungen über Dynamik, geh. Winters. 1842—43, herausgeg. von *A. Clebsch,* Berlin 1866; 2. Ausg. in Ges. W., Suppl., Berlin 1884, p. 199—211. — S. auch *L. Schlaefli,* J. f. Math. 43 (1852), p. 23—36; *F. Klein,* Math. Ann. 28 (1887), p. 543; *G. Darboux,* Systèmes orth. 1, p. 171; *A. Toxopeus,* Nieuw Arch. Wisk. Gen. Amst. (2) 6 (1903), p. 1—32.

308) *G. Lamé,* J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 170, § 18; *Clebsch-Lindemann,* 2^1, p. 273 f.

309) *O. Staude,* Fokaleigenschaften, p. 17.

310) *G. Lamé,* a. a. O., p. 169, § 17.

so können die Gl. (6), Nr. 12, in der Form

$$x^2 = \frac{(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{a-b},$$

(2) $$y = r\cos\varphi,$$

$$z = r\sin\varphi$$

geschrieben werden. In jeder Ebene durch die x-Achse, die mit der xy-Ebene den Winkel φ einschließt, sind λ_2, λ_3 elliptische Punktkoordinaten. Die Schar konfokaler Flächen besteht aus verlängerten Drehellipsoiden und zweischaligen Drehhyperboloiden mit der x-Achse als Drehachse, ferner aus Ebenenpaaren durch diese.

Fall III: $a = b = c$[311]).

Von den Wurzeln der Gl. (3), Nr. 12, werden $\lambda_2 = \lambda_3 = a$. Solange $a - \lambda \neq 0$, entsprechen den Werten von λ konzentrische Kugeln. Zur Untersuchung des Grenzfalles $\lambda = a$ nehme man mit *O. Hesse*[312]) die Substitution

(3) $$a = \varkappa + \varepsilon\alpha,\quad b = \varkappa + \varepsilon\beta,\quad c = \varkappa + \varepsilon\gamma,\quad \lambda = \varkappa + \varepsilon\mu$$

vor, wo α, β, γ beliebige reelle Zahlen bedeuten und ε gegen Null konvergieren soll. Gl. (1), Nr. 12, geht dann über in

(4) $$\frac{x^2}{\alpha-\mu} + \frac{y^2}{\beta-\mu} + \frac{z^2}{\gamma-\mu} = 0,$$

welche Gleichung eine Schar konfokaler Kegel 2. Ordnung mit gemeinsamer Spitze im Ursprung darstellt (ausgeartete Hyperboloide)[313]). Nehmen wir $\alpha > \beta > \gamma$ an, so besitzt Gl. (4) für jeden reellen Strahl aus dem Ursprung zwei reelle Wurzeln μ_1, μ_2, so daß

$$\alpha > \mu_2 > \beta > \mu_1 > \gamma$$

ist. Zwei Zahlen μ_1, μ_2 bestimmen vier vom Ursprung ausgehende, gegen die Koordinatenebenen symmetrische Strahlen und können als deren *elliptische Koordinaten im Bündel* angesehen werden.

Bezeichnet r den Radiusvektor des Punktes (x, y, z), so folgt aus (4):

(5) $$\begin{cases} x^2 = r^2\dfrac{(\alpha-\mu_1)(\alpha-\mu_2)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}, \quad y^2 = r^2\dfrac{(\beta-\mu_1)(\beta-\mu_2)}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}, \\ z^2 = r^2\dfrac{(\gamma-\mu_1)(\gamma-\mu_2)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}. \end{cases}$$

---

311) Ebenda p. 172, § 19.

312) Vorles. Raum, p. 270, für $a = 0$. S. *Clebsch-Lindemann*, 2¹, p. 274. Die Substitution kann auch in den Fällen I und II zur Anwendung kommen; s. *O. Staude*, Fokaleigenschaften, 1. Kap., § 5.

313) Bezüglich dieses Systems s. *Clebsch-Lindemann*, 2¹, p. 275—277, 278 Fußn.; III C 2, *Staude*, Nr. 59.

Die speziellen elliptischen Koordinaten μ_1, μ_2, r nennt *O. Hesse*[314]) *elliptische Kugelkoordinaten.*

Die Schar der konfokalen Kegel schneidet aus einer konzentrischen Kugel eine Schar konfokaler (sich gegenseitig orthogonal schneidender) sphärischer Kegelschnitte (III C 2, *Staude*, Anm. 522) aus; μ_1, μ_2 können als *elliptische Koordinaten auf der Kugel* (Nr. **32**) benutzt werden.

Werden noch von den Werten α, β, γ zwei einander gleich, z. B. $\alpha = \beta$, so gelangt man durch einen ähnlichen Grenzübergang wie im Fall I schließlich zu den räumlichen Polarkoordinaten φ, χ, r (Nr. **9**, Gl. (4))[315]).

14. Parabolische Koordinaten. Die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} + 2x + \lambda = 0,$$

worin b und c reelle Zahlen ($b > c$) und λ einen Parameter bezeichnen, definiert eine Schar konfokaler Paraboloide[316]) mit der x-Achse als Hauptachse. Bringt man (1) auf die Form

$$(2) \qquad f(\lambda) \equiv y^2(c-\lambda) + z^2(b-\lambda) + (2x+\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0,$$

wodurch die den Werten $\lambda = b, c$ entsprechenden Doppelebenen $y^2 = 0$, $z^2 = 0$ als uneigentliche Flächen der Schar beigefügt werden, so erkennt man, wie in Nr. **12**, daß diese Gleichung für einen reellen Punkt allgemeiner Lage drei verschiedene reelle Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 besitzt, für die die Ungleichungen

$$-\infty < \lambda_1 < c < \lambda_2 < b < \lambda_3 < +\infty$$

bestehen. Diese Wurzeln heißen die *parabolischen Koordinaten*[317]) des

314) Vorles. Raum, p. 271. — Für die Kugel M_{n-1} im R_n bei *F. Klein,* Math. Ann. 18 (1881), p. 245.

315) *Clebsch-Lindemann,* 2¹, p. 278. — Für den R_n *F. Klein,* a. a. O.

316) Diese Schar hat *Ch. Dupin,* Dével. de géom., Paris 1813, p. 314—322, entdeckt und diskutiert.

317) *G. Lamé,* J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 169 (bloß angedeutet); (1) 8 (1843), p. 432—434; (2) 19 (1874, geschr. 1843 oder 1844), p. 311—318; *O. Böklen,* Arch. Math. Phys. (1) 35 (1860), p. 81—92; Anal. Geom., p. 177 ff.; *C. A. Valson,* Nouv. Ann. (1) 19 (1860), p. 298—306 (hier p. 299 der Name „coordonnées paraboliques"); Paris C. R. 50 (1861), p. 680—682. — Der Grenzübergang von den elliptischen zu den parabolischen Koordinaten findet sich bei *J. A. Serret,* Cours de calcul différentiel et intégral 1, Paris 1868, art. 337, und *O. Staude,* Fokaleigenschaften, p. 177 f.; in letzterem Werke erfahren die parabolischen Koordinaten (p. 104—131) die eingehendste Behandlung. — Vgl. auch *I. Paczkowski,* Orthogonale parabol. Flächen, Progr. Gnesen 1874; *K. Baer,* Parabolische Koordinaten in der Ebene u. im Raume, Progr. Realgym. Frankfurt a. O. 1888; *F. Gros-*

Punktes (x, y, z). λ_1 entspricht ein *linkes*[318]) *elliptisches Paraboloid*, das sich nach der negativen Seite der x-Achse ins Unendliche erstreckt, λ_2 ein *hyperbolisches Paraboloid* und λ_3 ein *rechtes*[318]) *elliptisches Paraboloid*. In der xy- bzw. xz-Ebene bilden die Fokalparabeln

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{y^2}{b-c} + 2x + c = 0, \\ \frac{z^2}{c-b} + 2x + b = 0 \end{aligned}$$

den Übergang zwischen den sehr platten elliptischen und hyperbolischen Paraboloiden, die bzw. das Innere und Äußere dieser Parabeln doppelt überdecken.

Ein Koordinatentripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt durch den Schnitt der drei zugehörigen zueinander orthogonalen Paraboloide vier gegen die xy- und xz-Ebene symmetrisch liegende Punkte, deren rechtwinklige Koordinaten durch die Gleichungen[319])

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{b + c - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{2}, \\ y^2 &= \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{c-b}, \\ z^2 &= \frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{b-c} \end{aligned}$$

gegeben sind (vgl. Nr. **12**). Für die Punkte der linken Fokalparabel wird $\lambda_1 = \lambda_2 = c$, für die Punkte der rechten $\lambda_2 = \lambda_3 = b$. Für alle Punkte der unendlichfernen Ebene mit Ausnahme des Punktes in der x-Achse ist $\lambda_1 = -\infty$.

Für das Bogenelement der Schnittkurve zweier zueinander normalen Flächen der Schar, z. B. $\lambda_2 = c_2$ und $\lambda_3 = c_3$, erhält man

$$(5)\qquad ds_1^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}\,d\lambda_1^2,$$

woraus wie in Nr. **12** der Ausdruck für ein beliebiges Linienelement folgt[320]).

---

curth, Über parabolische Koordinaten und die geodätischen Linien auf dem elliptischen Paraboloid, Diss. Marburg 1887; *Clebsch-Lindemann*, 2¹, p. 304.

318) Benennung von *O. Staude*, a. a. O., p. 108.

319) *G. Lamé*, J. math. appl. (1) 8 (1843), p. 434; (2) 19 (1874, geschr. 1843 oder 1844), p. 312; *O. Böklen*, Arch. Math. Phys. (1) 35 (1860), p. 81; Anal. Geom., p. 178 f.; *C. A. Valson*, Nouv. Ann. (1) 19 (1860), p. 301; Paris C. R. 50 (1861), p. 680. Weitere Beziehungen zwischen rechtwinkligen und parabolischen Koordinaten bei *O. Böklen*, Anal. Geom., p. 179 f., und *O. Staude*, Fokaleigenschaften, § 30.

320) *C. A. Valson*, Nouv. Ann. (1) 19 (1860), p. 301; *O. Böklen*, Anal. Geom., p. 180.

Analoges gilt für die *parabolischen Koordinaten in der Ebene*[321]).

Spezielle parabolische Koordinaten[322]) ergeben sich für $b = c$. Die elliptischen Paraboloide werden Drehparaboloide um die x-Achse, die hyperbolischen gehen in die Ebenen durch diese Achse über. Wie in Nr. **13** erhält man,

$$r^2 = -(b - \lambda_1)(b - \lambda_3)$$

setzend,

$$(6) \qquad x = \tfrac{1}{2}(b - \lambda_1 - \lambda_3), \quad y = r \cos\varphi, \quad z = r \sin\varphi.$$

φ ist der Neigungswinkel der durch den Punkt (x, y, z) und die x-Achse gelegten Ebene mit der xy-Ebene; λ_1, λ_3 sind die ebenen parabolischen Koordinaten dieses Punktes.

15. Projektive Verallgemeinerung der elliptischen Koordinaten. Anwendungen. Das System der konfokalen Flächen 2. Ordnung läßt sich in linearen Ebenenkoordinaten (Nr. **21**) als lineares System darstellen[323]); es ist jene besondere Schar von Flächen 2. Klasse, die den absoluten Kegelschnitt als singuläre Fläche (*Grenzfläche*[324])) enthält. Sind nun $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$, $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ die Gleichungen zweier beliebigen Flächen 2. Klasse, so stellt $F - \lambda\Phi = 0$, unter λ einen veränderlichen Parameter verstanden, die durch F und Φ bestimmte Flächenschar dar. Ihre Gleichung in linearen homogenen Punktkoordinaten x_i (Nr. **5**) hat dann die Form[325])

$$(1) \qquad f_3\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_1\lambda + f_0 = 0,$$

worin die f_i durch kovariante Prozesse aus F und Φ hervorgegangene quadratische Formen der x_i bezeichnen (Nr. **11**). Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dieser Gleichung sind die *projektiv verallgemeinerten elliptischen Koordinaten*[326]) des Punktes (x_1, x_2, x_3, x_4). Sind die Gleichungen von F

---

321) *O. Staude*, Fokaleigenschaften, p. 171—173; III C 1, *Dingeldey*, Nr. 65, 66.

322) *O. Staude*, a. a. O., p. 122.

323) *M. Chasles*, Ap. hist., p. 397. Die analytische Darstellung in Ebenenkoordinaten stammt von *J. Plücker*, Syst. Geom. d. R., p. 331, Nr. 270; vgl. die Darstellung bei *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 287f., durch welche diese Auffassung erst allgemein bekannt geworden zu sein scheint. — Bei der Darstellung des Systems in Ebenenkoordinaten entsprechen den Werten $\lambda = -\infty, c, b, a$ der absolute Kegelschnitt und die Fokalkurven, nicht aber deren Ebenen als Doppelebenen. Vgl. *Clebsch-Lindemann*, 2[1], p. 267; *O. Staude*, Fokaleigenschaften, p. 176; III C 2, *Staude*, Nr. 53, 54.

324) *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 139.

325) Vgl. etwa *Salmon-Fiedler*, Analyt. Geom. des Raumes, 2. Aufl., 1. T., Leipzig 1874, p. 255.

326) *J. Lüroth*, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 158. (Die in dieser Arbeit behandelte Verallgemeinerung des Begriffs der Krümmungslinien einer Fläche 2. O. findet sich wieder bei *G. Darboux*, Classe rem., p. 177—180.) *O. Staude*,

und Φ (auf ihr gemeinsames Poltetraeder bezogen)

$$(2) \quad \begin{cases} F \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0, \\ \Phi \equiv u_1^2 \quad + u_2^2 \quad + u_3^2 \quad + u_4^2 \quad = 0, \end{cases}$$

so erhält die Gleichung $F - \lambda\Phi = 0$ in Punktkoordinaten die einfache Form

$$(3) \quad \frac{x_1^2}{\alpha_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\alpha_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{\alpha_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{\alpha_4 - \lambda} = 0.$$

Daraus folgen zwischen den x_i und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ähnliche Beziehungen wie in Nr. **12**[327]).

Die elliptischen und parabolischen Koordinaten wurden, abgesehen von ihren zahlreichen Anwendungen in der Mechanik und mathematischen Physik[328]), vornehmlich zum Studium der Flächen 2. Ordnung, besonders deren Krümmungs- und geodätischen Linien, zur Berechnung ihrer Oberfläche usw. mit Erfolg verwendet[329]).

Von den durch eine Gleichung $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ dargestellten Flächen haben namentlich *O. Staude*[330]) und *W. Roberts*[331]) einige Fälle untersucht.

Über lineare Gleichungen zwischen ellipt. Koordinaten, Diss. Leipzig 1881. — Eine ausführliche Behandlung und Verwendung erfahren diese Koordinaten bei *Clebsch-Lindemann* 2^1, p. 289 f.; dabei werden auch die Fälle besonderer gegenseitiger Lagen von F und Φ berücksichtigt.

327) *Clebsch-Lindemann*, 2^1, p. 290.

328) *G. Lamé*[115]); Anm. 116; *C. G. J. Jacobi*[307]); *J. Liouville*, J. math. p. appl. (1) 11 (1846), p. 217—236, 261—290, 352—378; 12 (1847), p. 410—444. *E. Heine*, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 1, Berlin 1878, p. 353 ff.; 2 (1881) an verschiedenen Stellen; *G. Kirchhoff*, Vorlesungen über math. Physik. Mechanik, Leipzig 1876, p. 203 ff.; *F. Klein*, Math. Ann. 18 (1881), p. 412 f.; *O. Staude*, Math. Ann. 27 (1886), p. 412—418; 41 (1892), p. 251 ff.

329) III C 2, *Staude*, Nr. 64—66; *C. G. J. Jacobi*[299]); *M. Roberts*, J. math. p. appl. (1) 11 (1846), p. 1—4 (Bericht darüber von *J. Liouville*, ebenda 10 (1845), p. 466); 13 (1848), p. 1—11; 15 (1850), p. 275—295; Ann. mat. p. appl. (2) 5 (1871/73), p. 17—19. *G. Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859, p. 129—142. *O. Böklen*, Arch. Math. Phys. 34 (1860), p. 26—32, 308—316; Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 383—387, und die mannigfachen Sätze in Anal. Geom. (1861), p. 98—197. *O. Hesse*, Vorles. Raum (1861), 22. u. 23. Vorl.; *W. Roberts*, Ann. mat. p. appl. (1) 6 (1863), p. 28—32; *H. Durrande*, Nouv. Ann. (2) 4 (1865), p. 125—128; *E. Beltrami*, ebenda p. 232 f. = Opere mat. 1, p. 105 f. Eine Reihe von Anwendungen (insbes. betreffs der Zentrafläche eines Ellipsoides) gibt *G. Darboux*, Bull. sc. math. (astr.) 3 (1872), p. 122—128; zahlreiche neue Fokaleigenschaften der Flächen zweiten Grades leitet damit ab *O. Staude*, Math. Ann. 20 (1882), p. 147—184; 22 (1883), p. 1—69, 145—176 (mit weiterer Literatur); 27 (1886), p. 256—271.

330) Über lineare Gleichungen zwischen elliptischen Koordinaten, Diss. Leipzig 1881; Math. Ann. 27 (1886), p. 253 f.

16. Zyklidische Koordinaten. Wählt man die fünf Symmetriekugeln einer allgemeinen *Zyklide* als Grundkugeln eines orthogonalen pentasphärischen Koordinatensystems, so hat ihre Gleichung (Nr. **10**, Gl. (18)) die Form

$$\sum_1^5 \frac{x_i^2}{a_i} = 0. \tag{1}$$

Das System der mit ihr *konfokalen* Zykliden, d. h. derjenigen Schar solcher Flächen, die derselben Minimaldeveloppablen[332]) eingeschrieben sind, wird dann durch die Gleichungen[333])

$$\sum_1^5 \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = 0, \tag{2a}$$

$$\Omega \equiv \sum_1^5 x_i^2 = 0 \tag{2b}$$

dargestellt, worin die a_i reell vorausgesetzt werden und λ einen veränderlichen Parameter bezeichnet. Dieses gleichzeitig von *Th. Moutard*[334]) und *G. Darboux*[333]) entdeckte, aus drei zueinander orthogo-

---

331) C. R. Ac. sc. Paris 53 (1861), p. 546—552, 724, 799—801; Ann. mat. p. appl. (1) 4 (1861), p. 143, 147 f.; J. f. Math. 62 (1863), p. 50—60. (S. auch *J. Cl. Maxwell,* The Quart. J. p. appl. math. 9 (1868), p. 123 = Scient. pap. 2, Cambridge 1890, p. 157, und *G. Darboux,* Systèmes orth. 1, p. 58—61.) In diesen Arbeiten werden die elliptischen Koordinaten auch zur Aufsuchung dreifach orthogonaler Flächensysteme benutzt; vgl. auch *H. Maschke,* Über ein dreifach orthogonales Flächensystem gebildet aus Flächen 3. O., Diss. Göttingen 1880. — Die Gleichung der Wellenfläche in diesen Koordinaten stellt auf *A. Cayley,* The Messenger Math. 8 (1879), p. 190; vgl. auch *O. Böklen,* Anal. Geom., 2. Aufl., p. 318 f.

332) Tangentenfläche einer Minimalkurve, III D 1, 2, *v. Mangoldt,* Nr. 12. *G. Darboux,* Paris C. R. 59 (1864), p. 240; 68 (1869), p. 1313, oder Classe rem., p. 9, nennt, die *Plücker*sche Brennpunktdefinition auf den Raum übertragend, die Doppelkurven der zu einer Fläche Φ gehörigen Minimaldeveloppablen die *Fokalkurven* von Φ.

333) In dieser Form zuerst bei *G. Darboux* in einem 1868 der Pariser Akademie eingereichten Mémoire (vgl. Paris C. R. 68 (1869), p. 1311; *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 252 Fußn.); dann Paris C. R. 73 (1871), p. 735; Sur les théorèmes d'Ivory etc., Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux 8 (1872), p. 240 (auch Paris 1872); und Classe rem., p. 134. S. auch *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 268. — Die Flächenschar selbst schon Paris C. R. 59 (1. Aug. 1864), p. 240—242; s. auch Ann. éc. norm. (1) 3 (1866), p. 97, wo drei der Grundkugeln als Ebenen vorausgesetzt sind (durch Inversion immer erreichbar). Von dem entsprechenden Kurvensystem in der Ebene (*konfokale zyklische Kurven 4. O.*) hat schon *H. Siebeck,* J. f. Math. 57 (1860), p. 359—370; 59 (1861), p. 173—184, einen Sonderfall behandelt.

334) L'Institut (1864); Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 537; Paris C. R. 59 (1864, 1. Aug.), p. 243 f.

nalen Scharen bestehende Flächensystem gibt zu einem die elliptischen und parabolischen Koordinaten (Nr. **12**, **14**) umfassenden Koordinatensystem Veranlassung.

Multipliziert man Gl. (2a) mit dem gemeinsamen Nenner, wodurch die fünf Grundkugeln $x_i = 0$, doppelt überdeckt, als uneigentliche Flächen zur Schar der Zykliden hinzugenommen werden, so fällt das Glied mit λ^4 infolge Gl. (2b) weg, und man erhält eine Gleichung dritten Grades in λ, die zur Art der eingangs Nr. **11** erwähnten gehört. Eine der Größen x_i^2, etwa x_5^2, ist für reelle Punkte negativ (Nr. **10**, Gl. (10)). Ordnet man nun die Zahlen a_i derart nach ihrer Größe, daß $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ ist, so besitzt die Gleichung für einen reellen Punkt allgemeiner Lage stets drei reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die so liegen, daß

$$a_1 > \lambda_1 > a_2 > \lambda_2 > a_3 > \lambda_3 > a_4$$

ist, welchen Wert auch a_5 haben mag[335]). $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen die (*allgemeinen*) *zyklidischen Koordinaten*[336]) des Punktes (x_i). Ihnen entsprechen die drei durch diesen Punkt gehenden, zueinander orthogonalen Zykliden des Systems[337]), deren 16 Schnittpunkte durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt werden.

Analog wie in Nr. **12** für die rechtwinkligen erhält man hier für die pentasphärischen Koordinaten der Punkte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ die Gleichungen[338])

$$(3) \qquad \sigma x_i^2 = \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)} \qquad (i = 1, 2, .., 5),$$

wo

$$(4) \qquad f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

$$(5) \qquad \varphi(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - a_4)(\lambda - a_5)$$

und

$$(6) \qquad \sigma = \frac{1}{\sum a_i x_i^2}$$

---

335) *G. Darboux*, Classe rem., p. 139.

336) *G. Darboux*, Paris C. R. 68 (1869), p. 1311—1313; 69 (1869), p. 392—394 (hier wird auch gezeigt, wie sich aus einem System elliptischer Koordinaten für n Variable (Nr. **12**) beliebig viele algebraische Orthogonalsysteme für drei Variable ableiten lassen, deren jedem ein orthogonales Koordinatensystem entspricht); Classe rem., p. 140—143. *M. Bôcher*, Reihenentw., p. 86 f., wo der Name „*zyklidisch*" für diese Koordinaten eingeführt wird.

337) Bezüglich der Gestalten dieser Zykliden s. *M. Bôcher*, Reihenentw., p. 71 f.

338) *G. Darboux*, Classe rem. p. 141; *M. Bôcher*, a. a. O., p. 87. — Mittels der Gleichungen in Anm. 269 folgen daraus die Ausdrücke für die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte; s. *G. Darboux*, a. a. O., p. 142.

ist. Der Ausdruck für ein beliebiges Linienelement ergibt sich nach Anm. 271 aus den Linienelementen dx_i in einer Form[339]), die sich von der in elliptischen Koordinaten (Nr. **12**, Gl. (8)) bloß durch einen von den Koordinaten des Raumpunktes abhängigen Faktor und den höheren Grad von $\varphi(\lambda)$ unterscheidet.

Die verschiedenen Arten und Ausartungen der zyklidischen Koordinaten hat *M. Bôcher*[340]) untersucht. Es gehören hierzu die meisten in der mathematischen Physik zur Verwendung gelangenden krummlinigen orthogonalen Koordinaten[341]), namentlich auch die elliptischen und Cartesischen.

Geometrische Anwendungen dieser Koordinaten sowie ihrer projektiven Verallgemeinerung gab *G. Darboux*[342]).

Auch diese Koordinaten lassen sich analog für den R_n definieren[343]).

17. Sonstige Punktkoordinaten. Aus den elliptischen sowohl als zyklidischen Koordinaten sind *transzendente* Punktkoordinaten abgeleitet worden. Z. B. hat man die drei hyperelliptischen Integrale

$$(1) \qquad u_i = \int_{\lambda_{i0}}^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo $\varphi(\lambda)$ die durch Gl. (5) in Nr. **16** definierte Funktion und λ_{i0} Konstante bedeuten, als transzendente Koordinaten verwendet[344]).

---

339) *G. Darboux*, a. a. O., p. 142; Systèmes orth. 1, p. 292; *M. Bôcher*, Reihenentw., p 89. — Dieses System ist nicht isotherm (*G. Darboux*, a. a. O., p. 140).

340) A. a. O., Kap. 3, § 4; Kap. 5, § 2, 3.

341) S. *E. Heine*, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2 Bände samt Anhang von *E. Haentzschel*, Berlin 1878, 1881, 1893. — *A. L. Dixon*, Proc. London Math. Soc. 27 (1896), p. 233 f.

342) Classe rem., p. 143—150; Sur les théorèmes d'Ivory etc., Paris 1872 = Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux 8 (1872), p. 240 ff.

343) *G. Darboux*, Paris C. R. 69 (1869), p. 393; Systèmes orth. 1, p. 122; *F. Klein*, Math. Ann. 38 (1891), p. 145; *M. Bôcher*, a. a. O., p. 247.

344) *O. Staude*, Math. Ann. 22 (1883), p. 27 ff.; Acta math. 10 (1887), p. 183—200 (schon *K. Weierstraß*, Monatsber. Ak. Berlin 1861, p. 986); *M. Bôcher*, Reihenentw., p. 99—101. Wegen der analogen, aus den elliptischen und parabolischen Koordinaten hervorgehenden transzendenten Koordinaten s. *G. Lamé*, J. math. p. appl. (1) 2 (1837), p. 175 ff.; (2) 19 (1874, geschr. 1843 oder 1844), p. 311; besonders eingehend: Leçons sur les fonctions inverses etc., Paris 1857, p. 46 ff.

Wegen des Ausdrückens der elliptischen Koordinaten durch elliptische Funktionen dreier Parameter vgl. z. B. *H. Durège*, Theorie d. elliptischen Funktionen, 5. Aufl., bearb. v. *L. Maurer*, Leipzig 1908, p. 263 f.

Zahlreiche orthogonale Koordinatensysteme in der Ebene hat *G. Holzmüller*[345]) untersucht.

Bestimmt man einen Punkt P der Ebene (zweideutig) durch seine Entfernungen r_1, r_2 von zwei festen Punkten O_1, O_2 (den *Polen*), so werden r_1, r_2 seine *bipolaren* oder *dipolaren Koordinaten* genannt[346]). r_1^2, r_2^2 sind nach Nr. 10 spezielle bizyklische Punktkoordinaten. Die Gleichung $f(r_1, r_2) = 0$ stellt eine zur Geraden $O_1 O_2$ symmetrische Kurve dar. Die ersten Anwendungen von diesen Koordinaten dürften *J. A. Grunert*[347]) und *Ch. Sturm*[348]) gemacht haben. *P. Zech*[349]) wies

Ein den Polarkoordinaten ähnliches Punktkoordinatensystem, bei dem statt der konzentrischen Kreise konfokale Ellipsen auftreten, benutzt *P. Meutzner*, Math. Ann. 8 (1875), p. 322 f.

345) Anm. 126. Besonders eingehend hat er sich (p. 166 ff.) mit den *lemniskatischen Koordinaten* beliebiger Ordnung beschäftigt, die aus der Substitution $X + iY = (x + iy)^n$ hervorgehen (s. auch J. f. Math. 83 (1877), p. 38—42). Bezüglich der gewöhnlichen lemniskatischen Koordinaten ($n = 2$) s. auch *G. Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859, p. 217; *E. Lommel*, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 50; *G. Holzmüller*, Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 330 f. u. a. a. O. Vgl. auch *J. G. Hagen*, Synopsis 2, p. 84—93.

346) *P. Tannery*, Zeitschr. Math. Phys. 44, Suppl. (1899), p. 510, schreibt ihre Aufstellung *R. Descartes* zu, dessen Ovalen (*aplanetische* Linien, *G. Loria*, Ebene Kurven, p. 163; III C 5, *Kohn*, Nr. 90) durch eine lineare Gleichung zwischen r_1, r_2 definiert sind; vgl. *R. Descartes*, La Géométrie (1637), livre II, p. 353 f. = Oeuvres 6, p. 424—431; 10, p. 310—324 und besonders die Bemerkungen von *P. Tannery*, p. 327. — *A. Cayley*, The Lond. Edinb. Dublin Phil. Mag. 14 (1857), p. 142—146 = Math. pap. 3, p. 258—261, untersucht die Gestalt der durch die Gleichung $m_1/r_1 + m_2/r_2 = c$ definierten Potentialkurven, jedoch ohne näheres Eingehen auf die Koordinaten r_1, r_2. Vgl. auch III C 5, *Kohn*, Anm. 394. *H. Seidler*, Z. Realschulw. Wien 34 (1909), p. 198—217, 270—278 untersucht Kurven von der Gleichung $r_1^m r_2^m =$ konst. — Diese Koordinaten geben die einfachste konstruktive Bestimmungsweise eines Punktes in der Ebene; vgl. *E. Lemoine*, Bull. Soc. math. France 16 (1888), p. 165.

347) Arch. Math. Phys. 32 (1859), p. 444—469.

348) Cours d'Analyse de l'éc. polyt., 2e éd., 1, Paris 1863, p. 209 f. Bezeichnen α_1, α_2 die Winkel der Kurventangente gegen die Leitstrahlen, so zeigt er, daß

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$$

ist, und gibt den Ausdruck für das Bogenelement an. In der 3. Aufl. dieses Bandes (1868) werden p. 219 auch die biangularen Koordinaten verwendet.

349) Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 277 f. Es ist

$$\frac{dr_1}{r_1} : \frac{dr_2}{r_2} = d\varphi_1 : d\varphi_2.$$

Damit läßt sich z. B. für das System der Niveaulinien für zwei entgegengesetzte Magnetpole $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{c}$ die Differentialgleichung der orthogonalen Trajek-

auf den Vorteil hin, den nach *C. W. Baur*[351]) die gleichzeitige Einführung der *biangularen Koordinaten* besitzt, d. h. der Winkel φ_1, φ_2, die O_1P bzw. O_2P mit O_1O_2 einschließen[350]). Bei jenen Kurven, deren Gleichungen in bipolaren Koordinaten einfache Gestalt besitzen, führt die *Roberval*sche Methode zu einfachen Tangentenkonstruktionen[351]).

H. Siebeck[333]) benutzte (1860)

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad v = \frac{r_1 - r_2}{2}, \tag{2}$$

also die halben Hauptachsen der durch P gehenden Kegelschnitte mit den Brennpunkten O_1, O_2, als Koordinaten von P[352]). Für $\overline{O_1O_2} = 2c$ ist

$$\frac{x^2}{e^2 - \lambda} + \frac{y^2}{-\lambda} = 1 \tag{3}$$

die Gleichung dieser konfokalen Schar. Für die zugehörigen elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2 (Nr. 12) ergeben sich die Beziehungen[353])

$$e^2 - \lambda_1 = u^2, \quad e^2 - \lambda_2 = v^2, \tag{4}$$

---

torien aufstellen, deren Integration $\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = c$ liefert. Vgl. auch *P. Barbarin*, Nouv. Ann. (3) 1 (1882), p. 15—28; *F. G. Teixeira*, Arch. Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 132—135; *Serret-Scheffers*, Diff.- u. Integr.-Rechnung 1, Leipzig und Berlin 1908, p. 352. Die orthogonalen Trajektorien eines in Bipolarkoordinaten gegebenen Kurvensystems behandeln ferner: *G. Dariès*, Nouv. Ann. (3) 13 (1894), p. 283—292; *G. Scheffers*, Math.-naturw. Mitt. Würt. (2) 2 (1900), p. 48 f. (auch Sonderabdruck, Stuttgart, p. 16 f.).

350) Vgl. Nr. 6. In dem Anm. 189 erwähnten Aufsatz von *W. Walton* wird gelegentlich das Winkelpaar φ_1, φ_2 selbst (nicht $\cot\varphi_1, \cot\varphi_2$) als Koordinaten verwendet und z. B. die Kurve $\varphi_1^2 \pm \varphi_2^2 = 1$ diskutiert. *W. Woolsey Johnson*, Amer. J. math. 3 (1880), p. 320—325, untersucht die durch die Gleichung $m_1\varphi_1 \pm m_2\varphi_2 = \alpha$, wo m_1, m_2 relativ prime ganze Zahlen bezeichnen, definierten verallgemeinerten Strophoiden.

351) *M. Cantor*, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 428—430; *C. W. Baur*, ebenda, p. 430—433; *A. Hurwitz*, Math. Ann. 22 (1883), p. 231 f.; *G. Peano*, Appl. geom. del Calc. inf., Torino 1887, p. 139—142; *G. Scheffers*, Math.-naturw. Mitt. Würt. (2) 2 (1900), p. 33—49; *H. Wieleitner*, Spez. ebene Kurven, Leipzig 1908, p. 33 f. — Die Kurve $f(r_1, r_2) = 0$ wird im Punkte (r_1, r_2) von dem *Descartes*schen Oval $(R_1 - r_1)\frac{\partial f}{\partial r_1} + (R_2 - r_2)\frac{\partial f}{\partial r_2} = 0$ berührt, worin R_1, R_2 laufende bipolare Koordinaten bezeichnen (*H. I. Purkiss*, Anm. 122*, p. 20). Eine Formel für den Krümmungsradius der Kurve stellt *P. Frost*, The Messenger Math. 10 (1880—81), p. 18, auf.

352) Für $e = 1$ sind u und v die Anm. 306 von *E. Heine* gebrauchten Koordinaten.

353) Sie deutet *G. Darboux*, Leçons 2 (1889), p. 422 an, wo sich auch Gl. (7) findet. Dieses Koordinatensystem bildet daselbst nur den Sonderfall eines Koordinatensystems auf irgend einer krummen Fläche, für die r_1, r_2 die geodätischen Entfernungen eines Punktes von zwei festen Kurven bedeuten. Die *u*-

woraus

$$(5)\quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{e^2 - \lambda_1} + \sqrt{e^2 - \lambda_2} \\ r_2 = \sqrt{e^2 - \lambda_1} - \sqrt{e^2 - \lambda_2} \end{cases}$$

und, mit Berücksichtigung der zu (6) und (8) in Nr. **12** analogen Gleichungen in der Ebene,

$$(6)\quad \begin{cases} x^2 = \frac{u^2 v^2}{2} \\ y^2 = -\frac{(e^2 - u^2)(e^2 - v^2)}{e^2} \end{cases}$$

$$(7)\quad ds^2 = (u^2 - v^2)\left(\frac{du^2}{u^2 - e^2} - \frac{dv^2}{v^2 - e^2}\right)$$

folgt.

Betrachtet man die Abstände eines Punktes der Ebene von mehreren Polen als seine (*multipolaren*) Koordinaten, so müssen zwischen diesen Bedingungsgleichungen bestehen[354]). Nähere Untersuchung haben nur die *tripolaren Koordinaten* gefunden[355]).

Tripolare Koordinaten im Raum werden merkwürdig selten verwendet; *G. Darboux*[356]) benutzt sie beim Beweis der *Jacobi*schen Sätze über Flächen 2. Ordnung (III C 2, *Staude,* Nr. 62) und deren Verallgemeinerungen sowie an anderen Orten. *M. d'Ocagne*[357]) wählt als Koordinaten eines Punktes P der Ebene seine Tangentialentfernungen von einer oder mehreren algebraischen festen Kurven.

Durch Verallgemeinerung der multipolaren Koordinaten sind auch

---

und v-Linien sind dann geodätische Ellipsen und Hyperbeln. Vgl. auch *O. Böklen,* Anal. Geom., 2. Aufl., p. 278 f.

354) Bezüglich der Gleichung zwischen den gegenseitigen Abständen von vier Punkten einer Ebene s. *R. Baltzer,* Theorie u. Anw. d. Determinanten, 5. Aufl., Leipzig 1881, p. 240. Unabhängig von diesen Bedingungsgleichungen ist die Tangentenkonstruktion für eine Kurve $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = c$ durchführbar; vgl. *G. Scheffers* u. *G. Peano,* Anm. 351.

355) *Éd. Lucas,* Mathesis 9 (1889), p. 129—134, 173—181; *A. Poulain,* J. math. spéc. Paris (3) 3 (1889), p. 3—10, 51—55, 130—134, 155—159, 171 f.; (3) 5 (1891), p. 265—276 (beide Zitate nach Jahrb. Fortschr. Math.). Verwendung bei *Salmon-Fiedler,* Anal. Geom. d. höh. ebenen Kurven, Leipzig 1873, p. 304 f.; *G. Darboux,* Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux 8 (1872), p. 243; Classe rem., p. 55.

356) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux 8 (1872), p. 210. Bemerkung über die Fläche (Zyklide) $ar_1 + br_2 + cr_3 = 0$ Classe rem., p. 47 Fußn.

357) Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 115—118. Allgemeiner Paris C. R. 109 (1889), p. 959; Nouv. Ann. (3) 9 (1890), p. 289—293; 13 (1894), p. 501, wo er statt der Tangentialentfernungen die „Entfernungen unter dem Winkel θ" (d. h. jene Verbindungsstrecken von P mit Kurvenpunkten, die die Kurve unter dem Winkel θ schneiden) wählt. Auch die dualen Koordinaten, gebildet aus den „Entfernungen unter dem Winkel θ" einer Geraden von einer oder mehreren algebraischen Kurven, werden benutzt.

A. Cayleys[358]) *zomale Koordinaten*, das sind die Quadratwurzeln aus ganzen rationalen Funktionen der homogenen rechtwinkligen Koordinaten, hervorgegangen.

Als *dipolare* Koordinaten eines Punktes P der Ebene bezeichnet man auch $\vartheta = \log \frac{r_2}{r_1}$ und den Winkel ω, unter dem die Strecke $O_1 O_2$ von P aus gesehen wird[359]). Die *peripolaren* Koordinaten von *C. Neumann*[360]) haben nur in der mathematischen Physik Anwendung gefunden.

Der Verwendung von r_1, r_2 als Koordinaten liegt die Auffassung zugrunde, jeden Punkt der Ebene als Schnitt der durch ihn gehenden Kreise zweier Büschel konzentrischer Kreise aufzufassen. Zu einem im Sinne der Kreisgeometrie verallgemeinerten Koordinatensystem gelangt man, wenn man zu demselben Zweck zwei beliebige Kreisbüschel benutzt, deren Kreise durch Koordinaten bestimmt werden. Ein hierher gehöriges System hat *E. Habich*[361]) betrachtet. Sind O, A, B feste Punkte und λ, μ die Winkel, unter denen man die Strecken OA, OB aus P sieht, so gelten $\cot\lambda$, $\cot\mu$ als dessen Koordinaten. Diese Bestimmungsweise läßt sich auf den Raum ausdehnen.

Hier wären auch jene Koordinaten zu erwähnen, die aus den üblichen durch Zugrundelegung einer andern Maßbestimmung hervorgehen[362]).

---

358) Trans. R. Soc. Edinb. 25 (1868), p. 1—110 = Math. pap. 6, p. 470—576.

359) *E. Betti*, Teoria delle force Newtoniane e sue applicaz. all' elettrostatica e al magnetismo, Pisa 1879; deutsch von *W. Fr. Meyer* unter dem Titel: „Lehrbuch der Potentialtheorie usw.", Stuttgart 1885, p. 208. Nach *C. Neumann*, Math. Ann. 18 (1881), p. 195 ff., sollen sie von *W. Thomson* eingeführt worden sein. Besitzen O_1, O_2 die rechtwinkligen Koordinaten $(-e, 0)$ bzw. $(+e, 0)$ und bezeichnet z die *Gauß*sche Koordinate (Nr. 7) von P, so sind ϑ und ω der reelle und imaginäre Teil von $\log \frac{z+e}{z-e}$. Die Kurven $\vartheta =$ konst. und $\omega =$ konst. bilden zwei orthogonale Kreisbüschel. Zur Bestimmung eines Punktes im Raume nimmt man noch den Neigungswinkel φ der Ebene PO_1O_2 gegen eine feste Ebene durch O_1O_2 hinzu. Geometrische Untersuchungen mittels dieser Koordinaten $\left(\text{wobei } \frac{r_1}{r_2} = e^{-\vartheta} \text{ statt } \vartheta \text{ benutzt wird}\right)$ von *G. Leonhardt*, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 346—362.

360) Abh. Ges. Leipzig (math.-phys.) 12 (1880), p. 365—398. Verwendet wurden sie schon in der Arbeit: Theorie d. Elektrizitäts- und Wärme-Vert. in einem Ringe, Halle a. S. 1864. Vgl. auch Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 29 (1877), p. 134 ff.

361) Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 353—367. Hiermit verwandt sind die „trigonic coordinates" von *W. Walton*, The Quart. J. p. appl. math. 9 (1868), p. 340—343. Vgl. auch *A. Poulain*, Principes de la nouvelle géométrie du triangle, Paris 1892.

362) Vgl. die Minimalkoordinaten in der pseudometrischen ebenen Geo-

II. Koordinaten von algebraischen Flächen, Linien in der Ebene und Punktgruppen in der Geraden (allgemein: M_{n-1}^m im R_n).

18. Allgemeines. Der allgemeinen Koordinatendefinition in Nr. 1 gemäß nennt man Zahlen, die eine Fläche gegenüber irgendwelchen festen Gebilden bestimmen, *Koordinaten dieser Fläche*. Dieser für die Weiterentwicklung der Koordinatenmethoden ausschlaggebende Gedanke geht auf *J. Plücker*[363]) zurück. Nach seinem Vorgange können wir die $N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Koeffizienten[364]) f_k in der Gleichung $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung als deren *homogene* Koordinaten (Nr. 1) bezeichnen[365]).

Sind $F_1, F_2, \ldots, F_N$ voneinander linear unabhängige solche Flächen, ist also die Determinante $|f_{ik}| \neq 0$, so läßt sich F in der Form

$$(1) \qquad F = m_1 F_1 + m_2 F_2 + \cdots + m_N F_N$$

darstellen. Die Zahlen m_i sollen nach *H. Graßmann*[366]) die (*homogenen*) *Koordinaten der Fläche* $F = 0$ *in bezug auf die festen Flächen* $F_1, F_2, \ldots, F_N$ heißen. Die vorher erwähnten Koordinaten f_k bilden einen Sonderfall davon.

Bei infinitesimal-geometrischen Untersuchungen wählt man noch allgemeiner[367]) irgend eine von n Parametern abhängige Fläche

$$(2) \qquad f(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

als Raumelement und betrachtet dann die Parameter $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Koordinaten einer besondern Fläche. Diese Fläche kann als Element

---

metrie bei *F. Klein*[197]). Gründet man in der Ebene auf zwei zu den absoluten (Kreis-)Punkten harmonische Punkte eine Maßbestimmung, so erhält man die von *J. Edalji*, Arch. Math. Phys. (3) 9 (1905), p. 271 f., besprochenen hyperbolischen Parallel- und Polarkoordinaten. Vgl. auch Anm. 236*.

Bei *F. Klein* und *S. Lie* kommen wiederholt die *logarithmischen Koordinaten* $\log x$, $\log y$, $\log z$ zur Verwendung. S. etwa *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransf. 1, Leipzig 1896, an verschiedenen Stellen.

363) Vgl. *A. Clebsch*, Abh. Ges. Gött. 16 (1872), p. 31 = *J. Plücker*, Ges. Abh. 1, p. XXXIII f.; *F. Klein*, Höhere Geom. 1, p. 151, 160, 230. Vollkommen vertraut war *H. Graßmann* mit dieser Auffassung; vgl. Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 392, 393.

364) III C 6, *Castelnuovo* und *Enriques*.

365) *R. Baltzer*, Anal. Geom., p. 73. Über das erste Auftreten von Flächen- oder Kurvenmannigfaltigkeiten (Serien) s. ebenda, § 19, Nr. 3.

366) Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 393 = Ges. W. 1^2, p. 264; die m_i heißen daselbst auch die *Ableitzahlen* von F aus $F_1, \ldots, F_N$.

367) *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 150; *G. Koenigs*, Paris C. R. 104 (1887), p. 673, 842; Acta math. 10 (1887), p. 313—338.

eines abstrakten R_n (Nr. 3) aufgefaßt werden[363]). Eine oder mehrere Gleichungen zwischen den p_i (oder m_i) bestimmen Flächenmannigfaltigkeiten[368]).

Analoges gilt für Kurven in der Ebene oder Punktgruppen in der Geraden.

19. Plückersche Ebenenkoordinaten und Linienkoordinaten in der Ebene. Ist

(1) $$u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 = 0$$

die Gleichung einer Ebene in Parallelkoordinaten (Nr. 3), so sind (nach Nr. 18) die Koeffizienten u_i die *homogenen* (*Plückerschen*) Koordinaten dieser Ebene[369]). Bringt man (1) durch Division mit u_4 auf die *Plückersche Normalform*

(2) $$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

so bedeuten u, v, w die negativen reziproken Achsenabschnitte der Ebene und heißen gewöhnlich deren *Plückersche Koordinaten*[370]). $u = 0$,

368) *H. Graßmann,* a. a. O., Nr. 393.

369) *J. Plücker,* J. f. Math. 6 (1829), p. 107—146 = Ges. Abh. 1, p. 178—219; Entw. 2 (1831), p. 10; an beiden Stellen für die Geraden der Ebene. In der Vorrede zu letzterem Bande (p. VII) erwähnt *Plücker,* daß er Ende August 1829 den neuen Schritt tat, die Koeffizienten in der Gleichung einer geraden Linie als deren Koordinaten zu betrachten. Die selbstverständliche Verallgemeinerung auf den Raum vollzog er J. f. Math. 9 (1832), p. 124—134 = Ges. Abh. 1, p. 224—234. — Implizite verwendet schon *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul (1827), § 6, bei der Begründung seines Kalküls Ebenenkoordinaten, indem er zeigt, daß alle Ebenen, deren parallel zu irgend einer Richtung gemessene Abstände von vier Grundpunkten einer linearen Gleichung genügen, durch denselben Punkt gehen. Vgl. auch seinen Brief an *W. Fiedler* in *Salmon-Fiedler,* Anal. Geom. d. Kegelschnitte, Leipzig 1860, p. 574 f. — *M. Chasles* hat unabhängig von *Plücker* und fast gleichzeitig mit ihm diese Koordinaten aufgestellt. Vgl. Brief vom 10. Dez. 1829 an *Quetelet* in Corr. math. phys. 6 (1830), p. 81—84 und die Bemerkung dazu p. 85—87; ferner auch *G. Darboux,* Bull. sc. math. (astr.) 6 (1874), p. 113—115; *E. Kötter,* Bericht 1, p. 355. *Chasles* gelangte zu den Ebenenkoordinaten, indem er das kartesische System einer korrelativen Transformation unterwarf und von dem erhaltenen Koordinatentetraeder eine Fläche ins Unendliche verlegte. Vgl. noch Ap. hist. p. 628—639. — *J. Booth,* On an application of a new analytic method of the theory of curves and surfaces, Liverpool 1843, scheint ebenfalls selbständig auf diese Koordinaten geführt worden zu sein, die er *tangential coordinates* (vgl. *W. R. Hamilton,* Elements of Quaternions, ed. by *W. E. Hamilton,* Dublin 1866, p. 45 Fußn.) nennt. Daher haben sie einige Geometer, besonders in England, als *Booth*sche Koordinaten bezeichnet. Es werden z. B. als solche die positiven reziproken Achsenabschnitte bezeichnet von *H. M. Jeffery,* The Quart. J. p. appl. math. 4 (1868), p. 309—332.

370) *J. Plücker,* Syst. Geom. d. R., p. 1, nennt sie *Plankoordinaten.* Jeder Normalform der Gleichung einer Ebene oder Geraden entspringen spezielle Ko-

$v = 0$, $w = 0$ sind die Koordinaten der unendlichfernen Ebene. Für die Ebenen durch den Ursprung haben u, v, w im allgemeinen unendlichgroße Werte; für die Ebenen durch eine Achse wird die betreffende Koordinate unbestimmt.

Sieht man in Gl. (2) x, y, z als konstant an, so genügen ihr die Koordinaten u, v, w aller durch den Punkt (x, y, z) gehenden Ebenen. Gl. (2) heißt dann die Gleichung des Punktes (x, y, z)[371]. Allgemeiner ist jede lineare Gleichung in u, v, w

$$au + bv + cw + d = 0 \tag{3}$$

die *Gleichung eines Punktes*, nämlich desjenigen, dessen homogene Parallelkoordinaten (Nr. 3) a, b, c, d sind.

Unter Voraussetzung eines rechtwinklig-gleichschenkligen Achsenkreuzes (Nr. 3) ist die linke Seite von (3) dem mit $d\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ multiplizierten Abstand des Punktes von der Ebene (u, v, w) gleich[372]), wobei die Strecke (u, v, w) (Nr. 3) die positive Richtung angibt. $d = 0$ ist die Gleichung des Ursprungs.

Führt man homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten (vgl. Nr. 3, insbes. Anm. 60) x_i bzw. u_i ein, so ist

$$\sum_1^4 u_i x_i = 0 \tag{4}$$

die Gleichung einer Ebene oder eines Punktes, je nachdem die u_i oder x_i als konstant betrachtet werden[373]).

---

ordinaten. *Plücker*, ebenda Nr. 3 und J. f. Math. 9 (1832), p. 124 = Ges. Abh. 1, p. 224, bevorzugt die Form $z + uy + vx + w = 0$; *W. Killing*, Lehrb. d. anal. Geom. in homogenen Koordinaten, Paderborn 1900—01, 1, § 11; 2, § 8, nennt die Koeffizienten der *Hesse*schen Normalform (Nr. 3) der Gleichung einer Ebene ihre *Hesse*schen Koordinaten; *M. d'Ocagne*, Nouv. Ann. (4) 1 (1901), p. 433—450, betrachtet gelegentlich, von der Gleichungsform $y = \mu(x - \lambda)$ einer Geraden ausgehend, λ und μ als deren (nichtlineare) Koordinaten.

371) *J. Plücker*, J. f. Math. 6 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 179 (für die Ebene); J. f. Math. 9 (1832) = Ges. Abh. 1, p. 225 (für den Raum). *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 49, nennt sie die *Normalform* der Gleichung des Punktes.

372) *J. Plücker*, J. f. Math. 6 (1829), p. 112 = Ges. Abh. 1, p. 183 (für Linienkoordinaten in der Ebene). Setzt man diesen Ausdruck einer Konstanten gleich, so erhält man die Gleichung einer orientierten Kugel (Nr. 25) in linearen Ebenenkoordinaten. Für die Kreise der Ebene: *J. Plücker*, a. a. O., Ende § 1; Entw. 2 (1831), p. 34 f.; *O. Hesse*, Vorles. Ebene (3. Aufl.), p. 189 f. Für die Kugeln, bei Benutzung von Vierpunktkoordinaten (Nr. 22): *L. Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), p. 162.

373) *J. Plücker*, Syst. Geom. d. R., p. 3. Die Schreibweise mit Indizes bei *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 61.

Alle Ebenen, deren Koordinaten u_i die homogene Gleichung $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ befriedigen[374], umhüllen eine Fläche, die aber auch ganz oder teilweise in Kurven oder Punkte degenerieren kann. So z. B. umhüllen die der Gleichung

$$(5) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

genügenden *Minimalebenen* (Nr. 3) den in der unendlichfernen Ebene liegenden imaginären *absoluten Kegelschnitt* (*Kugelkreis*)[375]. Zwei solche Gleichungen definieren im allgemeinen eine abwickelbare Fläche[375a]) (einen *Torsus* oder eine *Torse*), drei eine Gruppe diskreter Ebenen[376]. Ist F eine ganze rationale homogene Funktion n^{ten} Grades, so gehen durch jede Gerade des Raumes n Tangentenebenen der Fläche, und diese heißt eine algebraische Fläche n^{ter} Klasse[377]. Die Fläche erster Klasse ist der Punkt als Ebenenbündel aufgefaßt.

Entsprechendes gilt im R_n, zumal in der Ebene. Die Koordinaten einer Geraden heißen *Linien-* oder *Strahlkoordinaten.*

Durch Einführung der Ebenenkoordinaten (Strahlkoordinaten in der Ebene) hat *J. Plücker* dem Prinzip der Dualität[378]) seinen analy-

---

374) *F* wird gewöhnlich als analytische Funktion vorausgesetzt, s. Nr. 3. Die Gleichung des Berührungspunktes in nichthomogener Form bei *M. Chasles*, Ap. hist., p. 634.

375) III A B 1, *Enriques*, Nr. 22; III A B 4a, *Fano*, Nr. 7, 11, 12; IV 2, *Timerding*, Nr. 29.

375a) *J. Plücker*, J. f. Math. 9 (1832) = Ges. Abh. 1, p. 228; *M. Chasles*, Ap. hist., p. 634. Solche Flächen wurden zuerst von *L. Euler* (1771) und *G. Monge* (1780) untersucht. S. III D 6a, *Voß*, Nr. 21.

376) Vgl. hierzu sowie zur analytischen Darstellung anderer Raumgebilde *O. Staude*, Anal. Geom., § 72.

377) Der Klassenbegriff für Kurven stammt von *J. D. Gergonne*, Ann. math. p. appl. 18 (1827—28), p. 151. Nach *M. Chasles*, Ap. hist., p. 96, war *De Beaune* (1601—?) der erste, der die Idee faßte, Kurven durch Eigenschaften ihrer Tangenten zu definieren; Kurven als Enveloppen von Geraden haben *Ch. Huygens* und *E. W. v. Tschirnhaus* betrachtet (vgl. *M. Cantor*, Vorl. 3, 2. Aufl., p. 140 f., 148). Gleichungen von Kurven und Flächen als Strahl- bzw. Ebenenort treten zuerst bei *J. Plücker*, J. f. Math. 6 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 180 bzw. J. f. Math. 9 (1832), p. 124 = Ges. Abh. 1, p. 224 auf. Für die verhältnismäßig seltenere Verwendung der Ebenenkoordinaten in der Infinitesimalgeometrie vgl. man: *J. Plücker*, J. f. Math. 9 (1832), p. 124—134 = Ges. Abh. 1, p. 224—234; Syst. Geom. d. R., p. 32—36; *L. Painvin*, Paris C. R. 71 (1870), p. 217—222; 73 (1871), p. 902 f.; Bull. sc. math. (astr.) 3 (1872), p. 174—190; J. math. p. appl. (2) 17 (1872), p. 219—248; *J. Franz*, Arch. Math. Phys. 55 (1873), p. 105—112; *G. Darboux*, Leçons 1, p. 234 f.; *L. Bianchi*, Vorl. üb. Differentialgeom., deutsch von *M. Lukat*, Leipzig 1899, p. 139.

378) III A B 4a, *Fano*, Nr. 7 (insbes. Anm. 17), 8, 12, 2). Zur Geschichte des Dualitätsgesetzes vgl. *A. Clebsch*, Abh. Ges. Gött. 16 (1872), p. 12 f. =

tischen Ausdruck geschaffen. Je zwei duale Sätze im Raum (in der Ebene) sind verschiedene Interpretationen — in Punkt- und in Ebenenkoordinaten (Strahlkoordinaten) — desselben analytischen Satzes.

20. Allgemeine Ebenenkoordinaten. Damit bezeichnet man völlig analog wie in Nr. 4 die Werte

(1) $$u_i = f_i(u, v, w) \quad (i = 1, 2, 3),$$

welche drei voneinander unabhängige analytische Funktionen f_i der *Plücker*schen Ebenenkoordinaten (Nr. 19) für eine Ebene (u, v, w) des Raumes annehmen[379]). Sieht man die u_i als veränderliche Parameter an, so definieren die Gleichungen (1) drei Scharen von Flächen, aus denen je eine Fläche eine gegebene Ebene berührt. Alle Ebenen, für die zwei der Koordinaten u_i gegebene Werte annehmen, umhüllen eine abwickelbare Fläche[380]). Einem Koordinatentripel u_1, u_2, u_3 gehört im allgemeinen eine Gruppe von Ebenen zu, als gemeinschaftliche Tangentenebenen der den einzelnen Koordinatenwerten entsprechenden Flächen.

Diese allgemeinen Ebenenkoordinaten haben bisher keine eingehendere Untersuchung erfahren. *J. Plücker*[379]) hat für den Fall, als die f_i rationale Funktionen bezeichnen, eine geometrische Deutung der Koordinaten u_i gegeben.

Jede (auch lineare) Gleichung zwischen den Koordinaten u_i definiert eine Fläche (im besondern eine Kurve oder Punktgruppe) als Ebenenort[381]); zwei Gleichungen definieren im allgemeinen eine abwickelbare Fläche, drei eine Ebenengruppe. Der Begriff homogener Koordinaten aus Nr. 4 sowie der dort ausgesprochene allgemeine Satz lassen sich auf die allgemeinen Ebenenkoordinaten unmittelbar übertragen.

Analoge Begriffsbildungen sind in der Ebene und im Strahlbündel (allgemein R_n) möglich.

J. Plückers Ges. Abh., p. XVIIIf. (vgl. auch ebenda p. 619); *R. Baltzer*, Anal. Geom., § 19, Nr. 5; *E. Kötter*, Bericht 1, p. 160f.; *Tropfke* 2, p. 95; *O. Staude*, Anal. Geom., p. 441, Anm. 119.

379) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., Nr. 43 (für die Ebene); s. auch *N. Druckenmüller*, Übertragungsprinzipien, p. 70—88.

380) Hier gilt Anm. 117ᵃ in dualer Übertragung.

381) Ist $f(u_1, u_2, u_3) = 0$ diese Gleichung, so stellt

$$\sum (U_i - u_i)\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

worin die U_i laufende Koordinaten derselben Art bezeichnen, eine Fläche dar, die die gegebene in der Ebene u_i berührt (Anm. 122ᵃ).

21. Lineare Ebenenkoordinaten im allgemeinen. Man versteht unter *linearen*[382]) Ebenenkoordinaten im Raume solche, in denen jeder Punkt durch eine lineare Gleichung dargestellt wird. Die allgemeinsten homogenen Koordinaten u_i dieser Art sind (vgl. die analogen Betrachtungen in Nr. 5) proportional vier gegebenen, voneinander unabhängigen linearen Funktionen der *Plücker*schen Ebenenkoordinaten, also

$$(1) \qquad \sigma u_i = A_i u + B_i v + C_i w + D_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo $\Delta = |A_1 B_2 C_3 D_4| \neq 0$ ist und σ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet[383]).

Zufolge der in Nr. **19** erwähnten Deutung der rechten Seiten dieser Gleichungen sind die linearen Koordinaten einer Ebene π proportional ihren mit festen Konstanten D_i multiplizierten Normalabständen π_i von den vier festen Punkten $u_i = 0$[384]). Es ändern sich bloß die Konstanten, wenn man die Abstände der Ebenen parallel zu vier festen Richtungen mißt[385]). Die Punkte $u_i = 0$ heißen *Fundamental-, Grund-, Koordinatenpunkte, Ecken des Fundamental-* oder *Grundtetraeders* und die Koordinaten u_i *Vierpunkt-* oder *homogene Tetraederkoordinaten* der Ebene[386]).

Je vier beliebige Zahlen u_1, u_2, u_3, u_4 (0, 0, 0, 0 ausgenommen) können immer als homogene Tetraederkoordinaten einer Ebene angesehen werden[387]) (vgl. Nr. **5**). Sollen diese Zahlen gleich (nicht bloß proportional) den mit den Konstanten D_i multiplizierten Normalabständen einer Ebene von den Grundpunkten sein, so muß zwischen

---

382) *J. Plücker,* Syst. anal. Geom., p. 30 (für die Ebene); Syst. Geom. d. R., p. 6 (für den Raum).

383) Ebenda p. 32 bzw. 6.

384) Man kann noch eine weitere lineare Funktion

$$u_5 = A_5 u + B_5 v + C_5 w + D_5$$

hinzunehmen und wie für die Punktkoordinaten (Nr. 5) $\frac{u_i}{u_5}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ als homogene Koordinaten einer Ebene wählen; vgl. *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 37. *R. Heger,* Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 119, z. B. betrachtet als Koordinaten einer Ebene die Quotienten aus ihren Abständen von den Ecken des Grundtetraeders und vom Mittelpunkt der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel und ersetzt (ebenda p. 391; 16 (1871), p. 3) letzteren Punkt durch einen beliebigen.

385) *J. Plücker,* Syst. anal. Geom., p. 33; Syst. Geom. d. R., p. 6, 7. Vgl. auch *Clebsch-Lindemann* 2[1], p. 80 f.

386) Vgl. die Anm. 136, 137. — *Tetragonale* Koordinaten bei *R. Baltzer,* Anal. Geom., p. 423.

387) Vgl. Anm. 143, insbes. *W. Fiedler,* a. a. O.

ihnen eine Bedingungsgleichung bestehen. Bezeichnet Δ_i die zu D_i gehörige Unterdeterminante in $\Delta = |A_1 B_2 C_3 D_4|$, so lautet diese Gleichung (vgl. Nr. 5, (8))

$$(2) \qquad \Delta_1 u_1 + \Delta_2 u_2 + \Delta_3 u_3 + \Delta_4 u_4 = \Delta.$$

Sie läßt verschiedene geometrische Deutungen zu[388]. Ist umgekehrt die Gleichung, die zwischen den Koordinaten u_i bestehen soll, gegeben, so bestimmen sich daraus die Konstanten $\sigma_i (= D_i)$, mit denen die Abstände π_i zu multiplizieren sind[389].

Die Ebene ε, deren homogene Koordinaten $\sigma u_i = 1$ sind, heißt nach *W. Fiedler*[390] *Einheitsebene.* Da ihre Abstände ε_i von den Grundpunkten proportional $\frac{1}{\sigma_i}$ sind, so ist

$$(3) \qquad \sigma u_i = \sigma_i \pi_i = \frac{\pi_i}{\varepsilon_i}.$$

Betrachtet man die Abstände ε_i als Längeneinheiten, wodurch die Abstände π_i gemessen werden, so sind die Tetraederkoordinaten einer Ebene π proportional ihren durch die Abstände der Einheitsebene gemessenen Abständen von den Grundpunkten. Die u_i heißen deshalb auch *tetrametrische Ebenenkoordinaten*[391]. Statt als Normalabstände kann man die ε_i und π_i auch als die parallel zu vier festen Richtungen gemessenen Entfernungen der Ebenen ε und π von den Grundpunkten annehmen.

ε darf beliebig, nur durch keinen Grundpunkt gehend, gewählt werden; ihre Wahl ersetzt die der Konstanten σ_i. Das Koordinatentetraeder und die Einheitsebene bilden die Basis der *linearen Ebenenkoordinaten.*

Die *überzähligen Ebenenkoordinaten* werden analog wie die entsprechenden Punktkoordinaten definiert (Nr. 5)[392].

---

388) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 34, 36, 37 (für die Ebene); *L. Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), p. 161; *W. Fiedler*, Darst. Geom. 3 (3. Aufl.), p. 159; *J. Toeplitz*[144]; *R. Heger*, Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 392; 16 (1871), p. 3; 19 (1874), p. 94, 95 (in welchen Arbeiten jedoch die Ebenen- bzw. Linienkoordinaten eine etwas andere Bedeutung haben; vgl. Anm. 384.

389) *J. Plücker*, Anm. 388.

390) S. *Einheitspunkt* in Nr. 5, insbes. Anm. 147.

391) S. Anm. 149. Wegen des Zusammenhanges dieser Koordinaten einer Kristallfläche mit deren Indizes vgl. V 7, *Liebisch, Schoenflies, Mügge,* Nr. 10.

392) *P. Serret,* Géométrie de direction, Paris 1869, p. 30, wo sich vielfache Anwendungen davon finden. — Die von *M. Chasles,* Traité de Géom. sup., Paris 1852, 2ᵉ éd. 1880, p. 303—314, benutzten Teil- oder Doppelverhältnisse sind ebenfalls solche Koordinaten. Die pentasphärischen Kugelkoordinaten (Nr. 24), zur Bestimmung von Ebenen angewandt, geben „coordonnées tangentielles surabondantes" (*G. Darboux,* Classe rem., p. 260).

Die Verhältnisse der Koordinaten u_i lassen sich nach *W. Fiedler*[393]) als Doppelverhältnisse deuten. Werden nämlich die Seitenflächen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ des Koordinatentetraeders in irgend einer Reihenfolge mit $\alpha_i \alpha_k \alpha_l \alpha_m$ bezeichnet, so ist

$$(4) \qquad \frac{u_i}{u_k} = \frac{\pi_i}{\varepsilon_i} : \frac{\pi_k}{\varepsilon_k} = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} : \frac{\pi_k}{\pi_i},$$

also gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, die die Ebenen $\alpha_i, \alpha_k, \varepsilon, \pi$ auf der Kante $[\alpha_l \alpha_m]$ ausschneiden, d. h.

$$(5) \qquad \frac{u_i}{u_k} = (\alpha_l \alpha_m \cdot \alpha_i \alpha_k \varepsilon \pi)\,^{394}).$$

Drei dieser Doppelverhältnisse, z. B.

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{u_4}, \quad \varphi_2 = \frac{u_2}{u_4}, \quad \varphi_3 = \frac{u_3}{u_4},$$

reichen zur Bestimmung einer Ebene hin; sie sind invariant gegenüber projektiven Transformationen des Raumes. Man nennt daher $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *Doppelverhältnis-* oder *Wurfkoordinaten* oder auch *nicht-homogene* (die u_i *homogene*) *lineare projektive Koordinaten*[395]). Da dieses Koordinatensystem invariant (Nr. 1) gegenüber kollinearen Raumtransformationen ist, so ist sein Hauptanwendungsgebiet die projektive Geometrie[396]). Sie lassen sich vollkommen dual wie die entsprechenden Punktkoordinaten auch rein geometrisch und von Maßbegriffen unabhängig definieren (vgl. Nr. 5).

Für die Ebenen durch A_4 nehmen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ unendlichgroße Werte an.

Die Werte

$$p_i = A_i u + B_i v + C_i w + D_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

die drei lineare Funktionen der *Plücker*schen Ebenenkoordinaten für eine Ebene (u, v, w) annehmen, sind mit den Koordinaten φ_i identisch. Die Grundpunkte A_1, A_2, A_3 haben nämlich die Gleichungen $p_i = 0$,

393) Vgl. Anm. 158. Auch *M. Chasles*, Ap. hist., p. 629; *K. G. v. Staudt*, Beiträge, p. 267, und *W. R. Hamilton*[158]) betrachten Doppelverhältniskoordinaten der Ebene; die der letzten beiden sind mit obigen identisch.

394) Bezeichnen A_i die den α_i gegenüberliegenden Ecken des Grundtetraeders und E_{ik}, P_{ik} die Schnittpunkte von $[A_i A_k]$ mit ε bzw. π, so ist auch

$$\frac{u_i}{u_k} = (A_k A_i E_{ik} P_{ik}).$$

395) Vgl. die Anm. 159—162.

396) Vgl. Anm. 163. Die daselbst angeführten Werke und Arbeiten behandeln meist Punkt- und Ebenenkoordinaten gleichzeitig. Die Trennung hier geschah mit Rücksicht auf die historische Entwicklung.

und Punkt A_4 ist der konst. $= 0$ entsprechende Ursprung des zugrunde gelegten rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die p_i sind aber die mit festen Konstanten multiplizierten Quotienten aus den Abständen einer Ebene von den Punkten A_1, A_2, A_3 und aus dem Abstande von A_4.

Wegen weiterer hierher gehöriger Bemerkungen sei auf Nr. 5 verwiesen.

Läßt man, wie üblich, die zur Definition der tetraedrischen Punkt- und Ebenenkoordinaten benutzten Grundtetraeder zusammenfallen, so müssen die Größen A_i, B_i, C_i, D_i in Gl. (1) gleich den durch bestimmte Konstante τ_i dividierten Unterdeterminanten von $\Delta = |a_1 b_2 c_3 d_4|$ aus Nr. 5 sein. Die Gleichung $ux + vy + wz + 1 = 0$ einer Ebene erhält dann in den Koordinaten x_i, u_i die Form[397])

$$\sum_1^4 \tau_i u_i x_i = 0; \tag{6}$$

dabei haben Einheitspunkt und Einheitsebene willkürliche gegenseitige Lage[398]).

Damit die $\tau_i = 1$ werden, ist notwendig und hinreichend, daß die Einheitsebene ε die *Harmonikalebene*[399]) des Einheitspunktes E bezüglich des Grundtetraeders sei; die Verbindungsebene $[EA_iA_k]$ und ε schneiden dann $[A_lA_m]$ in zwei A_l und A_m harmonisch trennenden Punkten. Bei derartiger Wahl von E und ε oder, wie wir kurz sagen wollen, bei *Vereinigung* der Basen für Punkt- und Ebenen-

---

397) S. *Clebsch-Lindemann* 1, p. 65; 2^1, p. 83.

398) *J. Lüroth*, Math. Ann. 8 (1875), p. 213; *W. Fiedler*, Darst. Geom. 3 (3. Aufl.), p. 120. Werden Punkt- und Ebenenkoordinaten rein geometrisch definiert, so muß die Bedingungsgleichung für die vereinigte Lage eines Punktes und einer Ebene aus geometrischen Eigenschaften abgeleitet werden. Siehe *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 162, 171—174; Darst. Geom., 1. Aufl., p. 514 f., 533—537; 2. Aufl., p. 530—532, 547—550, 789 f.; 3. Aufl. 3, p. 117—122 (drei Beweise; vgl. auch die Literaturnachweise dazu p. 643); *R. Sturm*, Math. Ann. 9 (1876), p. 343; *Clebsch-Lindemann* 2^1, p. 460; *K. Th. Vahlen*, Abstrakte Geometrie, Unters. über die Grundlagen der euklidischen u. nicht-euklidischen Geometrie, Leipzig 1905, p. 137.

399) *W. Fiedler* [398]). Zum Begriff *Harmonikalebene* und *Harmonikalpunkt*, die auch Polarebene und Pol in bezug auf ein Tetraeder heißen, sowie die analogen Begriffe in der Ebene s.: *J. Plücker*, Entw. 2, p. 24; Syst. anal. Geom., p. 10, 34; *O. Hermes*, J. f. Math. 56 (1859), p. 204; *O. Staude*, Anal. Geom., § 26, 55 (Nr. 8, 9) sowie den Literaturnachweis p. 435, Anm. 86. — Die unendlichferne Ebene ist die Harmonikalebene des Tetraederschwerpunktes; durch kollineare Transformation folgt daraus der allgemeine Fall.

koordinaten erhält (6) die einfache Form[400])

$$(7) \qquad [ux] \equiv \sum_1^4 u_i x_i = 0.$$

Die tetraedrischen Ebenenkoordinaten sind also die Koeffizienten der Gleichung einer Ebene in tetraedrischen Punktkoordinaten und werden häufig auf diese Weise definiert[401]).

Aus (7) folgt, daß die linearen homogenen Koordinaten einer Ebene (eines Punktes) proportional sind den dreigliedrigen Determinanten der aus den Koordinaten dreier Punkte der Ebene (dreier Ebenen durch den Punkt) gebildeten Matrix[402]).

Werden Punkte und Ebenen auf nicht vereinigte Koordinatenbasen bezogen, so bestimmt die Gleichung $u_i = \varrho x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ eine räumliche *Korrelation* (Reziprozität)[403]). Bei vereinigten Koordinatenbasen geht die Korrelation in die Polarität bezüglich der Fläche 2. Ordnung

$$(8) \qquad \sum_1^4 x_i^2 = 0$$

über, die das Grundtetraeder zum Poltetraeder, Einheitspunkt und Einheitsebene als Pol und Polarebene besitzt[404]).

Auf die analogen Linienkoordinaten in der Ebene und die daraus durch Projektion (Nr. 5) hervorgehenden Ebenenkoordinaten im Bündel sei bloß hingewiesen[405]). Im Gebiete der geraden Linie (allgemeiner im binären Gebiet) erweist sich die Einführung der dualen Koordinaten $u_1 = x_2$, $u_2 = -x_1$ bisweilen als vorteilhaft[406]). Die Bedingung der

400) Vgl. Anm. 397, 398 und die Ableitung von Gl. (7) mittels Koordinatentransformation bei *Heffter-Koehler* 1, p. 134. Das Symbol $[ux]$ in (7) besitzt Produktcharakter.

401) Z. B. *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geom. 2, autogr. Vorl. (Sommers. 1890), ausgearb. von *Fr. Schilling*, Göttingen 1893, p. 4; *Heffter-Koehler* 1, p. 135. — Für den abstrakten R_n (Nr. 8) z. B. bei *E. Bertini*[174]), p. 21.

402) *F. Klein*, a. a. O., p. 7. — Die Werte u_i selbst sind nach *H. Graßmann*[94]), [95]) die Koordinaten eines *Blattes* (Nr. 3).

403) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 74 (für die Ebene); Syst. Geom. d. R., p. 10 (für den Raum).

404) *J. Plücker*, Syst. Geom. d. R., p. 14, 319; *W. Fiedler*, Darst. Geom. 3 (3. Aufl.), p. 115.

405) Z. B. *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 158—160; *P. Muth*, Grundlagen § 7. Weitere Literatur bei *O. Staude*, Anal. Geom., p. 439 Anm. 105.

406) *M. Pasch*, Math. Ann. 23 (1884), p. 419; *Heffter-Koehler* 1, p. 48. Zur Definition der Doppelverhältniskoordinaten in der Geraden und im Strahlbüschel vgl. auch *K. Doehlemann*, Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 265—271.

vereinigten Lage eines Punktes (x_i) mit einem Punkt (u_i) erhält dann die mit (7) analoge Form $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$.

Der Übergang von einem System homogener linearer Ebenenkoordinaten u_i zu einem andern u_i' wird wie für Punktkoordinaten (Nr. 5, Gl. (13)) durch eine lineare Substitution bewirkt. Im Falle die Basen für Punkt- und Ebenenkoordinaten vereinigt sind, zieht die Transformation der Koordinaten x_i die der u_i nach sich, und zwar drücken sich die u_i' durch die u_i vermittelst desselben aber transponierten Koeffizientensystems aus wie die x_i durch die x_i', also

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varrho x_i &= a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_3' + a_{i4}x_4' \\ \sigma u_i' &= a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + a_{3i}u_3 + a_{4i}u_4 \end{aligned}\ {}^{169)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die x_i und u_i sind *kontragrediente* Variable.

22. Besondere Arten linearer Ebenenkoordinaten und Linienkoordinaten in der Ebene. Sämtliche Arten linearer Ebenenkoordinaten gehen aus den allgemeinen (Nr. 21) durch besondere Wahl der Koordinatenbasis hervor. Bleibt man bei der gebräuchlichen Annahme, daß Punkte und Ebenen auf dasselbe Tetraeder bezogen werden und die Einheitsebene die Harmonikalebene des Einheitspunktes ist (Nr. 21), so gehört zu jeder besonderen Art linearer Punktkoordinaten (Nr. 6) auch eine besondere Art linearer Ebenenkoordinaten[407]). Es möge hier jedoch nur auf wenige Fälle hingewiesen werden.

Den baryzentrischen Koordinaten (Nr. 6, a)) gehört jenes lineare Ebenenkoordinatensystem zu, dessen Einheitsebene die unendlichferne Ebene ist[399]); die Koordinaten u_i sind proportional den Abständen der Ebene von den Grundpunkten (*Vierpunktkoordinaten*)[408]).

Vielleicht das einfachste lineare Ebenenkoordinatensystem ist das zum Fall b) in Nr. 6 gehörige, wo der Grundpunkt A_4 im Unendlichen liegt (Fig. 5). Schneiden nämlich die Ebenen ε und π auf den drei parallelen „Achsen" A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 bezüglich die Strecken

---

407) *J. Plücker,* Syst. Geom. d. R., p. 4, nennt zwei solche Koordinatensysteme *befreundet. W. Fiedler,* Darst. Geom. 3 (3. Aufl.), p. 108, bezeichnet sie als *zusammengehörige Punkt- und Ebenenkoordinaten,* ebenso *Heffter-Koehler* 1, p. 140.

408) *W. Fiedler,* Darst. Geom. 3 (3. Aufl.), p. 108. — Das von *M. Chasles,* Traité de géom. sup., Paris 1852, 2ᵉ éd. 1880, p. 316 f., 327 f. eingeführte und von *P. Sondat,* Nouv. Ann. (3) 12 (1893), p. 360—387, 503—519, wiederbehandelte Punkt- und Linienkoordinatensystem in der Ebene gehört hierzu. Die Vierpunktkoordinaten sind invariant gegenüber affinen Transformationen (III A B 4b, *Fano,* Nr. 7).

$A_i E_{i4}$, $A_i P_{i4}$ $(i = 1, 2, 3)$ ab, so ist zufolge Anm. 394:

$$(1) \qquad \varphi_i = \frac{u_i}{u_4} = (A_4 A_i E_{i4} P_{i4}) = \frac{\overline{A_i P_{i4}}}{\overline{A_i E_{i4}}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die Koordinaten φ_i einer Ebene π sind also im allgemeinen die Längenzahlen der von ihr auf den drei Achsen abgeschnittenen Strecken, jede durch eine andre Einheit gemessen. Wählt man noch $\varepsilon \| [A_1 A_2 A_3]$ und die $\overline{A_i E_{i4}}$ gleich lang, so sind die Koordinaten φ_i einer Ebene die Längen der von ihr auf drei parallelen Achsen abgeschnittenen Strecken, während die zugehörigen Punktkoordinaten (Nr. 6, Gl. (1)) sich als negative reziproke Achsenabschnitte darstellen. Diese Koordinaten, deren ebenes Analogon als *Schweringsche Linienkoordinaten* bekannt wurde, sind zu den Cartesischen Punktkoordinaten (vgl. Nr. 6, d)) dual und haben mehrfache Behandlung erfahren[409]).

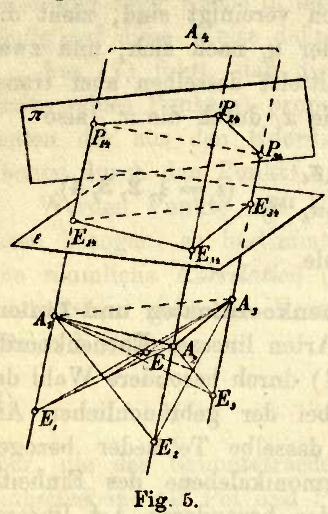


Fig. 5.

Dem Fall d) in Nr. 6 gehören als

409) Auf diese Dualität hat *V. Schlegel*, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 195 f. hingewiesen; sie war jedoch schon *M. Chasles*[369]) bekannt, der diese Koordinaten für die Ebene und den Raum (Ap. hist., p. 630) aufgestellt und benutzt hat. Die Bemerkung von *A. Schoenflies* in *J. Plückers* Ges. Abh. 1, p. 600, daß die *Chasles*schen Ideen in der a. a. O. ausgesprochenen Form eine analytische Verwendung nicht gestattet hätten, d. h. wohl, daß diese Koordinaten nicht linear wären, beruht offenbar auf einem Versehen. — Das ebene Koordinatensystem obiger Art, das auch bei *Salmon-Fiedler*, Höhere ebene Kurven, Leipzig 1873, p. 9, erwähnt wird, behandeln: *W. Unverzagt,* Über ein einfaches Koordinatensystem der Geraden, Progr. Wiesbaden 1871, dessen Inhalt *F. Rudio,* Zeitschr. Math. Phys. 44 Suppl. (1899), p. 383—397 wiedergibt. *K. Schwering,* Jhrsb. d. Westphäl. Provinzialver. 1874, p. 149; Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 278—286; Die Parallelkurve der Ellipse als Kurve vom Range Eins unter Anwendung eines neuen Linienkoordinatensystems, Progr. Brilon 1878; Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten, Leipzig 1884. *F. Casorati,* Rend. Ist. Lomb. (2) 10 (1877), p 11—19, 40—45 = Nouv. Ann. (2) 17 (1878), p. 5—20. *F. Franklin,* Amer. J. math. 1 (1878), p. 148—173. *M. d'Ocagne,* Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 410—423, usw.; in Ann. Ponts Chaussées (6) 8 (1884), p. 531, wendet er sie zur graphischen Lösung trinomischer Gleichungen an, worüber mehr in I F, *Mehmke,* Nr. 46; Coordonnées parallèles et axiales, Paris 1885, p. 3 f., 75 f.; Bull. Soc. math. France 18 (1890), p. 108—118; Nouv. Ann. (3) 11 (1892), p. 70—75; (4) 5 (1905), p. 160—163. *M. J. van Uven,* Period. mensile mat. p. appl. 2 (1902), p. 145—154. *W. Krimphoff*, Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 253—256. *K. Nitz,* Anw. der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel u. Lineal,

Ebenenkoordinaten die *Plücker*schen (Nr. 19) zu, wobei aber die Abstände auf den drei (im allgemeinen schiefwinkligen) Koordinatenachsen auch durch drei verschiedene Längeneinheiten gemessen werden dürfen[410]).

Wählt man in der Ebene die Werte zweier konjugiert komplexen linearen Funktionen der rechtwinklig-gleichschenkligen *Plücker*schen Koordinaten u, v als *komplexe (imaginäre) Linienkoordinaten*[411]), so besitzt das Grunddreieck zwei konjugiert komplexe Punkte (einer reellen Geraden) und den Ursprung des zugrunde gelegten rechtwinkligen Achsenkreuzes zu Ecken (Nr. 21). Setzt man insbesondere

$$(2) \qquad \chi = u + iv, \quad \psi = u - iv,$$

so fallen die komplexen Grundpunkte in die absoluten Punkte der Ebene; es sollen daher χ und ψ die *Minimalkoordinaten der Geraden* (u, v) heißen. Eine reelle Gerade ist durch ihre χ- oder ψ-Koordinate allein bestimmt. Man gelangt damit zu einer Darstellung komplexer Zahlen durch reelle gerade Linien, die der *Gauß*schen (Nr. 7) dual gegenübersteht[412]). Der Zahl 0 entspricht die unendlichferne Gerade, der Zahl ∞ der Ursprung, den man hier vorteilhaft als Gerade auffassen wird. Nach einem p. 700 erwähnten Satz ist die eine komplexe Zahl darstellende Gerade p die Polare des dieselbe Zahl nach *Gauß* darstellenden Punktes bezüglich des nullteiligen Kreises vom Halbmesser $\sqrt{-1}$ um den Ursprung[412]). Daraus erkennt man, wie sich die zu den übrigen in Nr. 7 erwähnten Punktkoordinaten analogen Strahlkoordinaten gestalten[413]).

Diss. Königsberg i. Pr. 1905, p. 21 ff. — Das Ebenenkoordinatensystem behandeln noch *H. Heddaeus,* Anm. 188, und *V. Schlegel,* Bull. Soc. math. France 23 (1895), p. 216—219.

410) *J. Plücker,* Syst. anal. Geom., p. 38, Nr. 54. Vgl. hierzu für die Ebene auch *Heffter-Koehler* 1, Nr. 86.

411) *J. Plücker*, Syst. anal. Geom., p. 38. Wählt man in Nr. 21, Gl. (1) die A_i, B_i, C_i, D_i als komplexe Zahlen, dann hat das Grundtetraeder im allgemeinen komplexe Ecken und einer reellen Ebene entsprechen im allgemeinen komplexe Koordinaten.

412) Sie benutzt *J. Brill,* The Messenger Math. 17 (1887—88), p. 80—93, zur Ableitung geometrischer Sätze auf ähnliche Weise, wie die *Gauß*sche Darstellung verwendet wird. Ebenda 20 (1890—91), p. 166—171 wird auch der im Text erwähnte Zusammenhang mit letzterer Darstellung dargelegt (ohne des allgemeinen Prinzips zu gedenken) und auf die Statik angewandt.

413) Es sei noch folgende Bemerkung gestattet. Die durch eine analytische Funktion f bewirkte Strahltransformation

$$U + iV = f(u + iv)$$

zwischen zwei Ebenen besitzt die Eigenschaft, daß entsprechende Punkte zweier

23. Sonstige Ebenenkoordinaten und Linienkoordinaten in der Ebene. Die Definition nichtlinearer projektiver Ebenenkoordinaten ergibt sich durch duale Übertragung aus Nr. 8.

Mehrfach untersucht sind die sogenannten *polaren Linienkoordinaten* in der Ebene. Ist

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \tag{1}$$

die auf gleichschenklig-rechtwinklige Achsen bezogene Gleichung einer Geraden (*Hesse*sche Normalform, Nr. 2), so versteht man darunter die Zahlen α und p[414]). Die Gerade wird dabei als orientiert vorausgesetzt (Nr. 2). α und p sind zugleich die Polarkoordinaten (Nr. 9, a) des Fußpunktes des aus dem Ursprung auf die Gerade gefällten Lotes[415]). Stellt man die Minimalkoordinate $\chi = u + iv$ der Geraden (Nr. 22) in der Form

$$u + iv = -\frac{1}{p}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = -\frac{e^{i\alpha}}{p} \tag{2}$$

dar, so sind α, p die polaren Koordinaten der Geraden[416]). Eine wichtige Rolle spielen diese Koordinaten bei der Aufstellung aller *äquidistanten* (oder *äquilongen*) *Berührungstransformationen* der Ebene[417]).

Wählt man eine (orientierte) Polarachse und auf ihr den Pol O, so ist eine orientierte Gerade bestimmt durch ihren Neigungswinkel θ gegen die Polarachse und durch die Strecke λ, die sie auf der Achse von O aus abschneidet. λ und θ nennt *M. d'Ocagne*[418]) die *axialen*

---

entsprechenden Strahlen aus den Koordinatenanfangspunkten durch kongruente Strahlbüschel projiziert werden.

414) *J. Ph. Weinmeister,* Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 301—324, nach dem diese Koordinaten auch öfter benannt werden. Es haben sie jedoch schon: *H. I. Purkiss*, The Oxf. Camb. Dublin Mess. 3 (1866), p. 83—88, unter dem Namen „pedal coordinates" (bereits erwähnt ebenda 2 (1864), p. 97) und *L. Painvin,* Bull. sc. math. (astr.) 3 (1872), p. 176, unter dem Namen „coordonnées polaires tangentielles" angewandt. Auch von *L. Aoust* sollen sie vorgeschlagen worden sein; vgl. Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 545 Fußn. *F. Balitrand,* Nouv. Ann. (3) 12 (1893), p. 256—286, leitet damit Sätze über Krümmungsradien algebraischer Kurven, über Fußpunktkurven und Spiralen ab; *R. A. Roberts,* The Quart. J. p. appl. math. 36 (1905), p. 162—170, verwendet sie zur Untersuchung konfokaler Systeme von Kurven dritter und vierter Klasse. *G. Scheffers*, Math. Ann. 60 (1905), p. 519, nennt sie *Normalkoordinaten.*

415) Eine Gleichung $\varphi(\alpha, p) = 0$ stellt also, je nachdem man α, p als polare Punkt- oder Linienkoordinaten betrachtet, zwei Kurven dar, von denen die erstere die Fußpunktkurve der letzteren für den Ursprung als Pol ist (*H. I. Purkiss,* a. a. O., p. 21).

416) *J. Brill,* The Messenger Math. 17 (1887—88), p. 83.

417) Vgl. III A B 4b, *Fano,* Nr. 24.

418) Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 410—423, 456—470, 516—522, 545—561;

Koordinaten der Geraden; sie sind von den vorhergehenden nicht wesentlich verschieden, verdienen aber mehr Beachtung, weil sie zu den polaren Punktkoordinaten *dual* sind[419]).

Die aus der *Hesse*schen Normalform der Gleichung einer Ebene (Nr. 3) hervorgehenden *polaren Ebenenkoordinaten* scheinen nicht verwendet worden zu sein.

Die durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \pi_i = \frac{a_i u + b_i v + c_i w + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gegebenen Abstände der orientierten Ebene $\pi(u, v, w)$ von den drei Polen $o_i(\pi_i = 0)$ sind im Sinne von Nr. 20 nichtlineare Koordinaten von π, die man als *tripolare Ebenenkoordinaten*[420]) bezeichnen wird. Jedes Koordinatentripel bestimmt ein zur Ebene $[o_1 o_2 o_3]$ symmetrisches Ebenenpaar, jede Gleichung $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ daher eine zu $[o_1 o_2 o_3]$

---

(3) 4 (1885), p. 110—130; Coordonnées parallèles et axiales, Paris 1885, p. 36 f. Gleichzeitig verwendet diese Koordinaten *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 4 (1885), p. 256—264. Vgl. ferner *V. Schlegel*, Franc. Ass. (Congr. de Grenoble) 1885 (nach Jahrb. Fortschr. Math. 17, p. 675 f.).

419) Diese Dualität tritt erst bei Zugrundelegung einer *Cayley*schen Maßbestimmung völlig hervor; vgl. *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 4 (1885), p. 257.

Die Gleichung der Traktrix lautet in diesen Koordinaten $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\frac{\lambda}{l}}$, stimmt also formal mit der der logarithmischen Spirale in polaren Punktkoordinaten überein. Jede Gleichung $F(\theta, \theta') = 0$ definiert eine axiale Transformation (Sonderfall der von *E. Habich*[126]), p. 138 untersuchten Transformation). $\theta' = \theta + \omega$ (*E. Cesàro*, a. a. O., p. 259) definiert die zu den *konchoidalen* dualen Transformationen, worunter die „transf. orthotangentielle" *M. d'Ocagne*s $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$ ausgezeichnet ist. $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} =$ konst. definiert die der Transformation durch reziproke Radien analoge „transf. par directions réciproques" von *E. Laguerre* (vgl. III AB 4b, *Fano*, Nr. 14).

Betrachtet man mit *M. d'Ocagne*, Nouv. Ann. (4) 1 (1901), p. 433 f., $\mu = \operatorname{tg}\theta$ und den obigen Wert λ als Koordinaten einer Geraden (sie hängen mit den *Plücker*schen durch die Gleichungen $u = -\frac{1}{\lambda}$, $v = \frac{1}{\lambda\mu}$ zusammen), so stellen $f(\lambda, \mu) = 0$ und $f\left(\lambda, -\frac{1}{\mu}\right) = 0$ zwei durch orthotangentielle Transformation auseinander hervorgehende Kurven dar.

420) *Bipolare Linienkoordinaten* in der Ebene verwendet *K. Nitz*, Anw. d. Theorie d. Fehler in d. Ebene usw., Diss. Königsberg i. Pr. 1905, p. 18—21; Zeitschr. Math. Phys. 53 (1906), p. 14 f. Sie bilden einen Sonderfall der Anm. 357 erwähnten *d'Ocagne*schen Linienkoordinaten, verdienen aber selbständige Behandlung.

symmetrische Fläche, jede lineare Gleichung insbesondere eine solche Kugel.

H. Beck[421]) führt in Anlehnung an *E. Study* (Nr. 29) vier überzählige homogene Koordinaten einer Geraden (*Strahlenkoordinaten*) X_1, X_2, X_{11}, X_{22} ein, zwischen denen die Bedingungsgleichung

$$X_1 X_{11} + X_2 X_{22} = 0 \tag{4}$$

besteht. Die Gesamtheit der eigentlichen reellen Strahlen wird dann durch unendlich viele uneigentliche Strahlen zu einem geschlossenen Kontinuum ergänzt.

24. Pentasphärische Kugelkoordinaten und ihre Analoga. Nach den Ebenenkoordinaten sind die Kugelkoordinaten die häufigst auftretenden Flächenkoordinaten (Nr. 18), weil verschiedene Untersuchungen zur Schaffung einer *Kugelgeometrie*[422]) führten, in der als Raumelement die Kugel betrachtet wird (III A B 4b, *Fano*, Nr. **11**—**14**). Am naheliegendsten erscheint die Bestimmung einer Kugel durch die rechtwinkligen Koordinaten ihres Mittelpunktes und durch ihren Radius[422a]); trotzdem fanden diese Koordinaten nur seltenere Verwendung[423]). Für die Ebene hat mittels der analogen Kreiskoordinaten *N. Druckenmüller*[424]) (1842) die Grundzüge einer Kreisgeometrie dargelegt.

---

421) Zeitschr. math. naturw. Unterr. 40 (1909), p. 132.

Vgl. auch die *Speerkoordinaten* in der Ebene bei *W. Blaschke*, Monatsh. Math. Phys. 21 (1910), p. 5, 49, 16 f.; an letzterer Stelle wird jeder Speer durch eine duale Zahl (Nr. **29**) so dargestellt, daß den linearen Transformationen mit dualen Koeffizienten *Laguerre*sche Transformationen entsprechen.

422) Dieser Name wird zum erstenmal von *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 187. gebraucht; vgl. *G. Darboux*, Classe rem., p. XII.

422a) *Th. Reye*, Geom. d. Kugeln, p. 76, benutzt statt des Radius die Potenz der Kugel im Koordinatenursprung.

423) Vgl. jedoch *S. Lie*, a. a. O., p. 170 ff.; 185 Fußn.; *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 590; *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 274—283 (insbes. p. 274 Fußn.).

424) Übertragungsprinzipien, IV. Kap. Zwei Gleichungen zwischen diesen Koordinaten bestimmen eine Kreisschar und damit deren Hüllkurve. Die Elimination des Kreisradius r zwischen diesen Gleichungen liefert den Ort der Kreismittelpunkte, die „Achse" der Kreisschar. Wird diese Kurve als gegeben vorausgesetzt und bezeichnet s ihre Bogenlänge, so kann die Kreisschar auch durch eine Gleichung $f(r, s) = 0$ dargestellt werden. Die Gleichungen ersten und zweiten Grades erfahren eine nähere Untersuchung. — Kurze Erwähnung finden diese Kreiskoordinaten bei *S. Lie*, a. a. O., p. 185 Fußn., und ein Sonderfall bei *Finck*, Nouv. Ann. (1) 3 (1884), p. 152 f. — Deutet man r als rechtwinklige z-Koordinate eines Raumpunktes, so hat man die von *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 24 (1879), p. 221—226; 25 (1880), p. 217—256, 403—409; Cyklographie, Leipzig

In Übereinstimmung mit Nr. **18** wären als Koordinaten einer Kugel die Koeffizienten ihres Gleichungspolynoms (vgl. III C 2, *Staude*, Nr. **149**) oder allgemeiner jene Zahlen anzusehen, durch die dieses Polynom aus fünf vorgegebenen und voneinander unabhängigen solchen Polynomen ableitbar ist (Nr. **18, 10**)[425]). Gewöhnlich bezeichnet man mit *G. Darboux*[426]) als *pentasphärische Koordinaten einer Kugel K* die Koeffizienten q_i ihrer Gleichung in orthogonalen pentasphärischen Punktkoordinaten (s. Nr. **10**, Gl. (13)). Diese Koordinaten q_i sind proportional den Potenzen von K in den fünf Grundkugeln K_i, dividiert durch deren Radien r_i. Je fünf Zahlen q_i (die nicht sämtlich verschwinden, und von denen für eine reelle Kugel eine imaginär sein muß) können immer als pentasphärische Koordinaten einer Kugel angesehen werden; je nachdem sie der Gleichung

---

1882; Acta math. 5 (1884), p. 331—408, verwertete Abbildung der reellen Kreise der Ebene auf die reellen Punkte des Raumes, deren Grundgedanke schon *B. E. Cousinery*, Géométrie perspective, Paris 1828, p. 55 f., zur Lösung des *Apollonischen* Problems verwendet hat. $z = ir$ gesetzt, gibt hingegen die von *M. Chasles*, Traité de Géom. sup., Paris 1852, chap. 33; *A. F. Möbius*, Ber. Ges. Leipzig (math.-phys.) 9 (1857), p. 38—48; 10 (1858), p. 1—17 = Ges. W. 2, p. 317—347; *A. Cayley*, Ann. mat. p. appl. (2) 1 (1867—68), p. 134; *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 343—349, 369—383; *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransf. 1, Leipzig 1896, p. 428 f., verwertete Abbildung der reellen Kreise der Ebene auf imaginäre Punkte des Raumes.

425) Die Keime für diese Kreis- und Kugelkoordinaten liegen schon in *J. Plückers* Methode der abgekürzten Bezeichnung (Anm. 117). In anderer Form finden sich Ansätze bei *H. Graßmann*, Geom. Analyse, Preisschrift, Leipzig 1847 = Ges. W. 1¹, p. 321—399 (in den Paragraphen über „Kugelgrößen"), und insbesondere Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 405—409 = Ges. W. 1², p. 274—280; weiter verfolgt wurden diese von: *R. Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 257—269; Anm. 261; *H. Cox*[261]) und *E. Müller*[261]). Hier seien von Arbeiten über Kreis- und Kugelkoordinaten noch erwähnt: *G. v. Gyurkovich*, Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 494—504; 12 (1867), p. 264—275; *P. H. Schoute*, Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien 94 (1886), p. 786—793; *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 19 (1886), p. 355—361, 416—424, 449—458; *F. J. van den Berg*, Nieuw Arch. Wisk. Gen. Amsterdam (2) 1 (1894), p. 11—44; *G. Galucci*, Nouv. Ann. (3) 19 (1900), p. 145—169.

426) Classe rem., Note X, bes. p. 258; Leçons 1, p. 227; vgl. hierzu Anm. 257. Da diese Kugelkoordinaten meist gleichzeitig mit pentasphärischen Punktkoordinaten behandelt werden, so kann bezüglich der Literatur auch auf Nr. **10** verwiesen werden. Hervorgehoben sei jedoch *G. Loria*, Mem. Acc. Torino (2) 36 (1884), p. 205 f.; The Quart. J. p. appl. math. 22 (1886), p. 44 f., der wie *H. Graßmann*[260]) die Kugelkoordinaten als die Ableitzahlen von K aus beliebigen fünf Grundkugeln definiert (s. Nr. **10**, Gl. (5)). Für orthogonale Grundkugeln stimmt diese Definition mit obiger überein (vgl. z. B. *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 40).

$$\sum q_i^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \sum \frac{q_i}{r_i} = 0$$

genügen, bestimmen sie eine Nullkugel oder eine Ebene (Nr. **10**, Gl. (14a), (15)). Verschwindet die Koordinate q_i, so ist K zur Grundkugel K_i orthogonal (Nr. **10**)[427].

Die Grundkugeln lassen sich verschiedenartig speziell wählen. Wählt man die drei rechtwinkligen Koordinatenebenen als K_1, K_2, K_3 und die um den Ursprung mit den Radien i und $+1$ geschlagenen Kugeln als K_4 und K_5, so haben die pentasphärischen Koordinaten der Kugel

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0$$

die Werte[428]):

$$\varrho q_1 = b, \quad \varrho q_2 = c, \quad \varrho q_3 = d, \quad \varrho q_4 = \frac{i}{2}(a + e), \quad \varrho q_5 = \tfrac{1}{2}(a - e).$$

Sämtliche Kugeln des Raumes bilden einen R_4, die Nullkugeln eine darin enthaltene M_3^2 (Nr. **3**). Die Koordinaten einer veränderlichen Kugel sollen in der Folge mit $x_i (i = 1, 2, .., 5)$ bezeichnet werden[429]). Durch eine, zwei oder drei homogene Gleichungen zwischen den x_i werden drei-, zwei- oder eindimensionale Kugelmannigfaltigkeiten definiert, die man bzw. *Komplexe*, *Kongruenzen* oder *Scharen*[430]) von Kugeln nennt. Der durch die lineare Gleichung

$$(1) \qquad \sum_1^5 q_i x_i = 0$$

definierte Komplex besteht nach Nr. **10** aus allen die Kugel (q_i)

---

427) Alle zu einer Kugel orthogonalen Kugeln sind aus vier von ihnen K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ableitbar. Die Ableitzahlen einer Kugel K dieses „Gebüsches" sind Volumkoordinaten (Nr. 6, a)) des Mittelpunktes von K in bezug auf das von den Mitten der Kugeln K_i gebildete Tetraeder; *J. Casey*, Phil. Trans. R. Soc. London 161 (1871), p. 585, Art. 3, p. 586, 2. Fußn. (1872); allgemein bei *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 381, Nr. 13.

428) *G. Darboux*, Leçons 1, p. 213 f.; die Verallgemeinerung für den R_n bei *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 11 (1898), p. 196.

429) Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z ihres Mittelpunktes sind durch die ersten drei Gleichungen in Anm. 269 gegeben; ihr Halbmesser ist

$$r = \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{\sum \frac{x_i}{r_i}};$$

vgl. *G. Darboux*, Classe rem., p. 259, 306.

430) Die ersten beiden Namen gebraucht *Th. Reye*, Geom. d. Kugeln, p. 77; Chelini Coll. math. Mailand 1881, p. 242; sie wurden in allgemeiner Bedeutung von *S. Lie*, Anm. 457, aus der Liniengeometrie (vgl. Nr. 27) herübergenommen.

(Orthogonalkugel) orthogonal schneidenden Kugeln, wird daher auch *Orthogonalkomplex* oder *Kugelgebüsch*[431]) genannt. Auch die Ebenen des Raumes, deren Koordinaten x_i ja der Gleichung

$$(2) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i}{r_i} = 0$$

genügen, bilden einen solchen Komplex; seine Orthogonalkugel ist die unendlichferne Nullkugel U (Nr. **10**)[432]).

Die durch zwei oder drei lineare Gleichungen zwischen den x_i definierten Kongruenzen und Scharen werden auch *Kugelbündel* und *Kugelbüschel* genannt[433]). Sämtliche Kugeln eines reellen Bündels gehen durch zwei (getrennte oder vereinigte) reelle oder konjugiert imaginäre Punkte, sämtliche Kugeln eines reellen Büschels durch einen reellen ein- oder nullteiligen Kreis[434]).

Jede homogene algebraische Gleichung n^{ten} Grades in den x_i bestimmt einen *Kugelkomplex* n^{ter} *Ordnung*, weil von ihm in jedem Kugelbüschel $x_i + \lambda y_i$ n Kugeln liegen. Die Gesamtheit aller Nullkugeln, deren Koordinaten nach Obigem der Gleichung

$$(3) \qquad \sum x_i^2 = 0$$

genügen, bilden einen besondern nicht singulären quadratischen Komplex[435]). Je zwei orthogonale Kugeln (x_i), (x_i') sind bezüglich dieses Komplexes konjugiert[436]). Allgemeiner ist die bilineare Form $\sum x_i x_i'$

---

431) *Th. Reye*, Geom. d. Kugeln, p. 5. — Da die Orthogonalkugel eines reellen Kugelgebüsches auch nullteilig sein kann, so ist es vorteilhaft, jede Kugel durch ein Gebüsch zu definieren. Diese Auffassung verwertet für die Ebene *E. Study*, Math. Ann. 49 (1897), p. 501. — Ersetzt man die nullteilige Orthogonalkugel eines reellen Gebüsches durch eine konzentrische Kugel von gleichgroßem reellen Radius, so wird sie von den Kugeln des Komplexes in Großkreisen geschnitten. Umgekehrt bilden alle eine reelle Kugel nach Großkreisen schneidenden Kugeln ein Gebüsch. Für die Ebene findet sich diese geometrisch wichtige Bemerkung bei *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 399 = Ges. Abh. 1², p. 269; vgl. übrigens auch Geom. Analyse, § 22 = Ges. Abh. 1¹, p. 393.

432) *G. Loria*, Mem. Acc. Torino (2) 36 (1884), p. 224 f.

433) *Th. Reye*, a. a. O., p. 5, 19, 22.

434) Letzterer liegt in reeller Ebene, hat reelle Mitte, jedoch rein imaginären Halbmesser; er kann auch in zwei konjugiert imaginäre Gerade zerfallen.

435) In allgemeinen (d. h. nicht orthogonalen) pentasphärischen Koordinaten ist $\Omega = 0$ (Nr. **10**) die Gleichung dieses Komplexes. Vgl. *G. Darboux*, Classe rem., p. 274; *G. Loria*, a. a. O., p. 209. Allgemeiner bilden alle Kugeln mit demselben Radius einen quadratischen Komplex, wie aus Anm. 429 folgt (vgl. *Th. Reye*, a. a. O., p. 77).

436) Vgl. Nr. **10**, Gl. (17).

mit dem Neigungswinkel φ der beiden Kugeln durch die Gleichung

$$(4)\qquad \sum_1^5 x_i x_i' = \sqrt{\sum_1^5 x_i^2}\sqrt{\sum_1^5 x_i'^2}\cdot\cos\varphi$$

verknüpft[437]). Die Nullkugeln eines Komplexes n^{ter} Ordnung (Kongruenz $2n^{\text{ter}}$ Ordnung) gehören im allgemeinen einer Fläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung an, die im Sinne der projektiven Geometrie den absoluten Kegelschnitt zur n-fachen Kurve hat[437a]). Jeder Kreis schneidet die Fläche in $2n$ Punkten. Eine *Zyklide* (Nr. **10**) ist auf diese Weise einem Büschel quadratischer Kugelkomplexe zugeordnet, unter denen sich der Komplex der Nullkugeln befindet[438]).

Zu den Kugelkoordinaten x_i dual (kontragredient, s. Nr. **21**) sind hier die *Koordinaten des Kugelgebüsches,* d. h. die Koeffizienten seines Gleichungspolynoms (1) oder die Koordinaten seiner Orthogonalkugel[439]). Jede Kugel ist daher doppelt zu denken, einmal als Element, das andere Mal als Orthogonalkugel des durch sie bestimmten Gebüsches[440]). Bezeichnen u_i diese Gebüschkoordinaten, so stellt jede homogene Gleichung in den u_i wieder einen Kugelkomplex dar, aber als Hüllgebilde von Kugelgebüschen betrachtet. $\sum u_i^2 = 0$ ist die Gleichung des Nullkugelkomplexes.

Das System der pentasphärischen Kugelkoordinaten ist gegenüber der Gruppe der Inversionen des Raumes invariant (Nr. **1**)[441]). Es bildet das natürliche Koordinatensystem für die analytische Behandlung der *niederen Kugelgeometrie*[442]).

---

437) Folgt aus Nr. **10**, Gl. (8) und den Anm. 271, 429; vgl. auch *G. Loria,* a. a. O., p. 218.

437a) *G. Loria,* a. a. O., p. 251 Fußn.

438) *Th. Reye,* Chelini Coll. math., Mailand 1881, p. 241—258 (insbes. Nr. 19); J. f. Math. 99 (1886), p. 206. Diese Auffassung verwertet *G. Loria,* a. a. O., p. 251 ff.

439) Solche Koordinaten verwendet *Th. Reye,* Chelini Coll. math., Nr. 21 f.

440) Mit *E. Study,* Geom. d. Dynamen, p. 237, würde man von Kugeln „erster und zweiter Schicht“ sprechen. Vgl. auch Nr. **28**, Anm. 527.

441) *G. Darboux,* Classe rem., p. 265; *G. Loria,* a. a. O., p. 206. Die Transformationen dieser Gruppe werden analytisch durch jene linearen homogenen Substitutionen der x_i dargestellt, die $\sum x_i^2$ nur um einen Faktor ändern (*G. Loria,* a. a. O., p. 209—211).

442) *F. Klein,* Höhere Geom. 2, p. 38. Vgl. Anm. 273 und III AB 4b, *Fano,* Nr. **11**. Da die Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen sich aus Inversionen zusammensetzen lassen, braucht man diese „Hauptgruppe“ nicht mehr besonders zu erwähnen. Sieht man die x_i als lineare homogene Punktkoordinaten in einem R_4 (Nr. **3**) an, so erkennt man, daß diese Kugelgeometrie identisch ist mit der

Analoge Koordinatensysteme lassen sich in allen R_n definieren[443]), zumal auch in der Ebene (*tetrazyklische Kreiskoordinaten*[444])) und in der Geraden (*Punktepaarkoordinaten*)[445]). Ferner kann man statt der gewöhnlichen Maßbestimmung eine allgemeine *Cayley*sche zugrunde legen[446]); die Kugeln des R_3 z. B. sind dann die der absoluten Fläche umschriebenen Flächen zweiter Ordnung.

Analog wie in Nr. 4 und Nr. 20 wird man hier *allgemeine homogene Kugelkoordinaten* als die Werte definieren, welche fünf gegebene homogene analytische Funktionen der pentasphärischen Koordinaten x_i für irgend eine Kugel annehmen. Die Verhältnisse von vier dieser Funktionen zur fünften sind dann nichthomogene Kugelkoordinaten. Solche lassen sich auch analog, wie eingangs Nr. 11 für Punktkoordinaten erwähnt, definieren. Hierher gehören die von *G. Darboux*[447]) eingeführten und verwendeten *zyklidischen Kugelkoordinaten*; es sind

---

projektiven Geometrie dieses R_4 unter Auszeichnung einer nicht singulären M_3^2; *F. Klein,* Vergl. Betr., § 6; Math. Ann. 43 (1893), p. 78.

Welchen Nutzen die mathematische Physik aus der Verwendung pentasphärischer Koordinaten ziehen kann, zeigt *M. Bôcher,* Reihenentw.; einige Beispiele hierfür hatte schon *G. Darboux,* Paris C. R. 83 (1876), p. 1037, 1099, gegeben. Neben der Untersuchung der Zykliden bringen weitere geometrische Anwendungen: *G. Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 390—392. *G. Loria,* Anm. 432, p. 212 ff.; Atti Acc. Torino 20 (1885), p. 505—526; *R. Lachlan,* London Phil. Trans. 177 (1886), p. 481—625; Proc. London Math. Soc. 27 (1896), p. 71—85; *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 395—402.

443) *S. Lie,* Nachr. Ges. Gött. (1871), p. 191—209, 535—557; *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 257—277; *A. del Re,* Rend. Circ. mat. Palermo 2 (1888), p. 124—127; *G. Schlumberger,* Über n-dimensionale lineare u. quadrat. Kugelsysteme, Diss. Zürich 1896.

444) Vgl. außer den in Anm. 278 und 425 angeführten Arbeiten etwa noch *G. Loria,* The Quart. J. p. appl. math. 22 (1886), p. 44—73; *W. K. Clifford,* Math. pap., p. 546—555; *E. Study,* Math. Ann. 49 (1897), p. 499 ff.

445) Einige darauf bezügliche Bemerkungen finden sich in den nachgelassenen Schriften von *W. K. Clifford,* Math. pap., p. 555 f. („Theory of Powers"). Ausführlicher handelt davon *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 6—14 und Anm. 279. „Orthogonale" Punktepaare sind harmonisch; eine lineare Gleichung zwischen den Koordinaten eines Punktepaares stellt eine quadratische Involution dar. In der Geraden ist die Inversionsgruppe identisch mit der projektiven (*F. Klein,* Vergl. Betr., p. 21 Fußn.). *O. Hesses* Übertragungsprinzip (J. f. Math. 66 (1866), p. 15—21 = Ges. W., p. 531—538) besteht darin, die Koordinaten eines Punktepaares als Dreieckskoordinaten eines Punktes der Ebene zu betrachten.

446) *H. Andoyer,* Leçons 1, Nr. 384 f. (für die Ebene); Vorarbeiten hierzu bei *J. Casey,* Ann. mat. p. appl. (2) 2 (1868), p. 203—318; London Phil. Trans. 161 (1871), p. 587—592.

447) Bull. sc. math. (astr.) 3 (1872), p. 122—128; Classe rem., Note XIII, XIV.

dies die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der Gleichung

$$(5) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0,$$

wo die a_i Konstante bezeichnen[448]).

25. Hexasphärische Kugelkoordinaten und ihre Analoga; Komplexkoordinaten. Durch die (orthogonalen) pentasphärischen Koordinaten x_i einer Kugel (Nr. 24) ist ihr Halbmesser[429])

$$(1) \qquad r = \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{\sum \frac{x_i}{r_i}}$$

nur dem absoluten Wert, nicht auch dem Vorzeichen nach bestimmt. Dieses hängt von dem Vorzeichen ab, das man der Wurzel im Zähler erteilt. Wir wollen uns vorstellen, daß (ähnlich wie bei der Ebene in Nr. 3) die *positiven Normalen* (also die Radien) einer reellen einteiligen Kugel von der Mitte aus gegen die Oberfläche hin oder von der Oberfläche gegen die Mitte hin gerichtet seien, je nachdem der Halbmesser positiv oder negativ angenommen wird[449]). Eine solche mit bestimmter Radienrichtung versehene Kugel, deren Tangentialebenen damit orientiert sind, soll eine *orientierte Kugel*[450]) heißen.

448) Wird eine Schar von Kugelkomplexen n^{ter} Ordnung von ∞^2 Kugelgebüschen umhüllt, die auch den Nullkugelkomplex berühren (deren Orthogonalkugeln also Nullkugeln sind), so nennt man sie *konfokal* (*Th. Reye,* Chelini Coll. math., Nr. 3). Gl. (5) stellt eine Schar konfokaler Komplexe zweiter Ordnung dar, von denen durch jede Kugel des Raumes vier zueinander orthogonale Komplexe der Schar gehen (ebenda Nr. 15). Die Nullkugeln der Komplexe erfüllen die in Nr. **16** erwähnten konfokalen Zykliden.

449) *G. Frobenius,* J. f. Math. 79 (1875), p. 226, wählt die Richtung gegen die Mitte als die positive. — Denkt man sich das zugrunde liegende rechtwinklige Achsenkreuz so verlegt, daß der Ursprung in einen Kugelpunkt und die positive z-Achse in die positive Normalenrichtung der Kugel fällt, so gibt der positive Drehsinn der xy-Ebene den positiven Drehsinn in dem betreffenden Punkt der Kugelfläche an. Die Orientierung einer Kugel ist daher gleichbedeutend mit der Festlegung des positiven Drehsinnes auf ihr oder, was damit gleichbedeutend ist, mit der Auszeichnung einer der beiden Scharen von Minimalerzeugenden; vgl. *C. Stephanos,* Paris C. R. 92 (1881), p. 1195. — Man kann auch nach *A. Schoenflies* (vgl. *V. Snyder,* Über d. linearen Komplexe der *Lie*schen Kugelgeom., Diss. Göttingen 1895, p. 3) die orientierte Kugel durch den von ihr begrenzten Innen- oder Außenraum definiert denken und sie demgemäß als *Innen-* oder *Außenkugel* bezeichnen.

450) Die Orientierung von Kurven und Flächen wurde von 1880 an von *E. Laguerre* ausdrücklich eingeführt und verwendet (s. III AB 4b, *Fano,* Nr. **14**, insbes. Anm. 88). Orientierte Ebenen, Kugeln und Flächen nannte er *semi-plans,*

Eine nichtorientierte Kugel muß jetzt als Überdeckung zweier entgegengesetzt orientierter Kugeln vorgestellt werden. Der Winkel zweier orientierten Kugeln in einem reellen gemeinsamen Punkt ist bis auf Vielfache von 2π bestimmt und gleich dem Winkel der orientierten Radien durch diesen Punkt. Nur wenn dieser Winkel null (nicht wenn er π) ist, soll gesagt werden, die beiden orientierten Kugeln berühren sich; die Radien der beiden Kugeln, mithin auch deren Tangentialebenen, haben dann im Berührungspunkt gleiche Orientierung[451]). Nach Nr. 24, Gl. (4) ist die Bedingungsgleichung für die Berührung der Kugeln (x_i), (x_i')

$$(2) \qquad \sum_1^5 x_i x_i' - \sqrt{\sum_1^5 x_i^2}\sqrt{\sum_1^5 x_i'^2} = 0.$$

Zur Bestimmung einer orientierten Kugel ist die Einführung einer neuen Koordinate notwendig, die geeignet ist, das Vorzeichen

---

semi-sphères und *semi-surfaces*, orientierte Kreise und Gerade der Ebene *cycles* und *directions*. *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 337, 590, gebraucht den Ausdruck *sphère orientée*. Von einer „semi-surfaces" (oder „courbe de direction") kann nach *E. Laguerre* nur gesprochen werden, wenn sich die Richtungskosinus ihrer Normalen als rationale Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten des zugehörigen Flächenpunktes darstellen lassen, weil dann die beiden Seiten der Fläche analytisch trennbar sind. Nach *C. Stephanos*, Paris C. R. 92 (1881), p. 1195, lassen sich die Minimalkurven solcher Flächen in zwei verschiedene Systeme trennen. Die Gleichung einer solchen Fläche in *Plücker*schen Ebenenkoordinaten (Nr. 19) lautet $(u^2+v^2+w^2)\,\varphi^2(u,v,w) - \psi^2(u,v,w) = 0$, unter φ und ψ ganze rationale Funktionen verstanden. Vgl. *E. Laguerre*, Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, Nouv. Ann. (3) 2 (1883), p. 28 = Oeuvres 2, p. 646 (für ebene Kurven); *G. Darboux*, Leçons 1, Nr. 231; vgl. hierzu sowie über Anwendung der Orientierung bei ebenen algebraischen Kurven III C 4, *Berzolari*, Nr. 21, und *H. Wieleitner*, Spez. ebene Kurven, Leipzig 1908, p. 117. Die in Anm. 372 erwähnte Darstellung einer Kugel in *Plücker*schen Ebenenkoordinaten leitet sofort zu ihrer Orientierung und damit zu einer „niederen Geometrie orientierter Kugeln". Siehe *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 269—301, und die hieran anknüpfenden Arbeiten von *P. F. Smith*, Ann. of math. (2) 1 (1900), p. 153—172; Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 371—390. Auf die Wichtigkeit des Orientierungsbegriffs in der Geometrie der Berührungstransformationen wies *E. Study*, Gött. gel. Anz. (1897), p. 441 (vgl. auch Anm. 100) hin. *H. Andoyer*, Leçons 1, p. 398 und Nr. 384, behandelt die Orientierung bei *Cayley*scher Maßbestimmung.

451) Gleichorientierte Kugeln können sich nur von innen, ungleichorientierte nur von außen berühren. *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 313, sagt von zwei orientierten Flächen, die in einem gemeinsamen Punkt dieselbe Tangentialebene, aber entgegengesetzte Orientierung besitzen, sie *berühren sich uneigentlich*. *H. Andoyer*, a. a. O., p. 418, nennt solche Flächen *quasi-tangentes*. *W. Blaschke*, Monatsh. Math. Phys. 21 (1910), p. 12, spricht von *gleich-* oder *gegensinniger Berührung*.

der Quadratwurzel in (1) zu kennzeichnen. Hierzu kann die sechste homogene Koordinate[452])

$$(3) \qquad x_6 = \sqrt{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)}$$

dienen, wenn man festsetzt, daß das Vorzeichen dieser Wurzel mit dem der Wurzel in (1) stets übereinstimmen soll. Zwischen diesen sechs Koordinaten einer Kugel besteht dann die Gleichung

$$(4) \qquad \Phi \equiv \sum_1^6 x_i^2 = 0,$$

worin für eine reelle Kugel x_6 und eine der übrigen Koordinaten imaginär sind (Nr. 24)[453]). Je sechs der Gl. (4) genügende Zahlen können immer als *hexasphärische Koordinaten*[454]) *einer orientierten Kugel* betrachtet werden. Eine homogene Gleichung zwischen diesen Koordinaten bestimmt zusammen mit $\Phi = 0$ einen Kugelkomplex. Die algebraischen Komplexe n^{ter} Ordnung in diesen Koordinaten[455]) sind im allgemeinen algebraische Komplexe $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in pentasphärischen Koordinaten (Nr. 24).

Da der Schnittwinkel φ zweier Kugeln mit den hexasphärischen

---

452) *G. Darboux,* Leçons 1, p. 227; *F. Klein,* Höhere Geom. 1, p. 471; ebenda p. 208 f., 469 f., werden diese Koordinaten direkt, von der Gleichung der Kugel in rechtwinkligen Punktkoordinaten ausgehend, eingeführt.

453) *F. Klein,* Höhere Geom. 1, p. 209.

454) Dieser Name, den *F. Klein,* a. a. O., p. 474, in dem Sinne gebraucht, daß $x_1, x_2, \ldots, x_6$ sich auch als homogene Koordinaten eines Punktes im R_4 in bezug auf sechs zueinander orthogonale Kugelräume auffassen lassen (vgl. Nr. 10), hat sich für obige Koordinaten eingebürgert. Vgl. *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 312; *P. F. Smith*[456]); III A B 4b, *Fano,* Nr. 13.

Die von *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 170 f., als Koordinaten einer orientierten Kugel benutzten rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z ihrer Mitte und der Radius H hängen mit speziellen hexasphärischen Koordinaten durch die Gleichungen

$$X = \frac{x_1}{x_4 + ix_5}, \quad Y = \frac{x_2}{x_4 + ix_5}, \quad Z = \frac{x_3}{x_4 + ix_5}, \quad H = \frac{ix_6}{x_4 + ix_5}$$

zusammen. Die Potenz der Kugel im Ursprung ist $-\frac{x_4 - ix_5}{x_4 + ix_5}$. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ stellen die drei rechtwinkligen Koordinatenebenen und $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ zwei um den Ursprung mit den Halbmessern 1 und i beschrieben gedachte Kugeln oder genauer die durch sie bestimmten Kugelgebüsche dar.

455) Sie werden zu differentialgeometrischen Untersuchungen benutzt von *A. V. Bäcklund,* Ett bidrag till Kub-komplexernas, Arsskr. Univ. Lund 9 (1873) (Jahrb. Fortschr. Math. 5, p. 417); *V. Snyder,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 4 (1898), p. 144—154; Amer. J. math. 22 (1900), p. 97—100.

Koordinaten (x_i), (x_i') nach Nr. 24, Gl. (4) aus der Gleichung

$$(5) \qquad x_6 x_6' \cos\varphi = -\sum_1^5 x_i x_i'$$

folgt[456]), so besteht der durch die Gleichung

$$(6) \qquad \sum_1^6 a_i x_i = 0$$

definierte *lineare Kugelkomplex* nach *S. Lie*[457]) aus allen Kugeln, die mit der durch die Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_5, \sqrt{-(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_5^2)}$ bestimmten orientierten Kugel (der *Isogonalkugel*[458]) des Komplexes) den durch

$$(7) \qquad \cos\varphi \sqrt{-(a_1^2 + \cdots + a_5^2)} = a_6$$

bestimmten Winkel φ einschließen. Für $a_6 = 0$ stellt (6) ein Kugelgebüsch (Nr. 24) dar, in dem die Orientierung der Kugeln bedeu-

---

456) Bezeichnet t die Tangentialentfernung der beiden Kugeln, so ist

$$t^2 = \frac{\sum_1^6 (x_i - x_i')^2}{\sum_1^5 \frac{x_i}{r_i} \sum_1^5 \frac{x_i'}{r_i}}$$

und die Berührungsbedingung benachbarter Kugeln

$$\sum_1^6 dx_i^2 = 0.$$

Vgl. *G. Darboux,* Leçons 1, p. 228—230.

457) Math. Ann. 5 (1872), p. 173; vgl. auch Paris C. R. 71 (1870), p. 582; Nachr. Ges. Gött. (1871), p. 208. Die Orientierung wird jedoch von *Lie* nicht betont. *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 302, hat für dieses Gebilde den Namen *sphärischer Kugelkomplex* vorgeschlagen, weil es im Kugelraum dieselbe Rolle spielt wie die Kugel im Punktraum. *H. Andoyer,* Leçons 1, p. 400, nennt das analoge aus Kreisen der Ebene bestehende Gebilde *hypercercle* (*Müller*, a. a. O., p. 315, *zyklisches Kreissystem*).

458) *V. Snyder*[449]), p. 15, nennt sie *Grundkugel.* Sie ist der Ort der Nullkugeln des Komplexes. Dessen Ebenen umhüllen eine mit der Isogonalkugel konzentrische orientierte Kugel, von der alle Komplexkugeln mit endlichem Radius dieselbe Tangentialentfernung besitzen. *E. Müller*, a. a. O., p. 303, nennt sie deshalb die *Mittelkugel* des Komplexes. Sind X_0, Y_0, Z_0, H_0 ihre *Lie*schen Koordinaten, so ist

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 + (iH - iH_0)^2 = \text{konst.}$$

die Gleichung des Komplexes (*S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 173).

tungslos ist. Genügen die Koeffizienten von Gl. (6) der Bedingung

$$\sum_1^6 a_i^2 = 0, \tag{8}$$

so besteht der Komplex aus allen die orientierte Kugel (a_i) berührenden Kugeln und soll *Nullkomplex*[459]) heißen. Die Gesamtheit aller Kugeln von gegebenem Radius, insbesondere alle Nullkugeln, bilden jetzt einen linearen Komplex.

Die voneinander unabhängigen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_6$ in Gl. (6) betrachten wir als *homogene Koordinaten eines linearen Kugelkomplexes.* Diese Komplexe bilden einen R_5 (Nr. 3), die Nullkomplexe zufolge (8) eine darin enthaltene nichtsinguläre M_4^2. Zwei lineare Komplexe (a_i), (a_i') heißen *normal* zueinander, wenn sie bezüglich dieser M_4^2 konjugiert sind, wenn also

$$\sum_1^6 a_i a_i' = 0 \tag{9}$$

ist[460]). Die Kugeln eines linearen Komplexes $\mathfrak{K}$ bestimmen die zu $\mathfrak{K}$ normalen Nullkomplexe. Zwei Nullkomplexe sind normal zueinander, wenn ihre Isogonalkugeln sich berühren.

Von den die Basis unseres Koordinatensystems bildenden sechs, paarweise normalen Komplexen $x_1 = 0, \ldots, x_6 = 0$ sind die ersten fünf Kugelgebüsche, der letzte ist der Nullkugelkomplex (vgl. (3)). Allgemeiner lassen sich irgend sechs, paarweise normale Komplexe

$$\mathfrak{K}_i \equiv \sum_{k=1,\ldots,6} a_{ik} x_k = 0 \tag{10}$$

zugrunde legen und als Koordinaten des Komplexes (x_i) die Werte von $\mathfrak{K}_i$ annehmen. Wählt man, was immer möglich ist, die Ausdrücke $\mathfrak{K}_i$ in solcher Form, daß die Bedingungsgleichung für einen Nullkomplex die Form

$$\sum_1^6 \mathfrak{K}_i^2 = 0 \tag{11}$$

erhält, so ersieht man, daß die Koordinaten eines Nullkomplexes iden-

459) *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 303.

460) Ebenda p. 305; *P. F. Smith,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 375. Sind φ und φ' die Winkel, unter denen die Isogonalkugeln K und K' der beiden Komplexe von deren Kugeln geschnitten werden, so besteht im Fall der Normalität der Komplexe die Beziehung $\cos \widehat{KK'} = \cos\varphi \cos\varphi'$.

tisch sind mit den hexasphärischen Koordinaten eines Punktes in einem R_4[461]).

Jene linearen Transformationen des Komplexraumes, die die M_4^2 der Nullkomplexe invariant lassen, bilden jene Gruppe von Berührungstransformationen[462]), die orientierte Kugeln wieder in solche überführen. Diese Gruppe definiert die sogenannte *höhere* oder *Liesche Kugelgeometrie*[463]) (III AB 4 b, *Fano*, Nr. **13**).

Die der Gleichung

$$(12) \qquad \sum_1^5 \frac{a_i}{r_i} = 0$$

genügenden *ebenen Kugelkomplexe*[464]) (deren Isogonalkugeln Ebenen sind) bilden einen R_4, worin die Nullkomplexe (orientierten Ebenen) eine singuläre M_3^2 (einen zweidimensionalen quadratischen Kegel) erfüllen[465]). Jene linearen Transformationen dieses R_4, die die M_3^2 invariant lassen, führen orientierte Ebenen und Kugeln wieder in solche über und definieren eine *niedere Geometrie orientierter Kugeln* (*Laguerres* „*Géométrie de direction*", III AB 4 b, *Fano*, Nr. **14**), die zur Inversionsgeometrie (Nr. **10**) dual ist[466]).

---

461) *F. Klein*, Höhere Geom. 1, p. 474.

462) Zu beachten ist hierbei, daß nur die *eigentliche* Berührung eine invariante Eigenschaft ist, nicht die *uneigentliche* (Anm. 451); vgl. *E. Müller*, a. a. O., p. 313. Die Transformationen obiger Gruppe setzen sich aus den *Inversionen an linearen Kugelkomplexen zusammen*; ebenda und *P. F. Smith*, a. a. O., p. 376—381. Es sind dies nach *S. Lie* (Math. Ann. 5 (1872), p. 183) die allgemeinsten Berührungstransformationen, die die Krümmungslinien einer Fläche ungeändert lassen; vgl. hierzu *G. Darboux*, Systèmes orth. 1, p. 61—63, und die p. 64—68 folgende Anwendung der hexasphärischen Koordinaten.

463) Letzteren Ausdruck gebraucht *F. Klein*, Vergl. Betr., § 7, wendet aber Höhere Geom. 1, p. 469, ersteren an.

464) *E. Müller*, a. a. O., p. 279; *P. F. Smith*, a. a. O., p. 374.

465) Legt man an die durch $\sum_1^6 a_i^2 = 0$ definierte M_5^2 aller Nullkomplexe in dem (von allen Ebenen gebildeten) Nullkomplex $a_i = \frac{1}{r_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, $a_6 = \sqrt{-\sum_1^5 \frac{1}{r_i^2}} = 0$ den tangierenden R_4, so hat er die Gleichung $\sum_1^5 \frac{a_i}{r_i} = 0$, ist also mit dem Raum der ebenen Komplexe identisch.

466) Die Stellung dieser Geometrie in der *Lie*schen Kugelgeometrie kennzeichnet *C. Stephanos*, Paris C. R. 92 (1881), p. 1197. Vgl. ferner *G. Darboux*, Leçons 1 (1887), p. 253 f.; *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransf. 1, Leipzig 1896, p. 443 Fußn. *E. Müller*, a. a. O., §§ 5, 6, verfolgt diese Dualität ins Einzelne; vgl. auch *P. F. Smith*, Ann. math. (2) 1 (1900), p. 153—172; *P. Epstein*, Die

Wie alle Betrachtungen der Kugelgeometrie lassen sich auch die dieser Nummer auf den R_n ausdehnen[467].

In der Geraden insbesondere werden vier Zahlen $x_1, \ldots, x_4$, zwischen denen die Gleichung

$$\sum_1^4 x_i^2 = 0 \tag{13}$$

besteht, als homogene *Koordinaten eines orientierten Punktepaares*[468]) auftreten. Die Orientierung läßt sich geometrisch als Festsetzung einer Reihenfolge für die Punkte eines Paares deuten. Dem linearen Kugelkomplex entspricht die Projektivität, den Komplexkoordinaten entsprechen die vier homogenen *Koordinaten einer Projektivität*[469]). Eine lineare Transformation in den x_i, die Gl. (13) invariant läßt[470]), führt die Punktepaare einer Projektivität in die Punktepaare einer anderen über, insbesondere degenerierte Projektivitäten wieder in solche.

26. Koordinaten von algebraischen Flächen, Kurven in der Ebene und Punktgruppen in der Geraden. Die aus den linearen homogenen Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 (Nr. 5) gebildeten Potenzprodukte n^{ten} Grades noch mit den entsprechenden Polynomialkoeffi-

---

dualistische Ergänzung des Potenzbegriffs in der Geometrie des Kreises, Zeitschr. math. naturw. Unterr. 37 (1906), p. 499—520.

467) Vgl. *S. Lie* und *F. Klein*[443]). Mittels der analogen pentazyklischen Koordinaten behandelt die Kreisgeometrie in der Ebene *V. Snyder,* Bull. Amer. math. Soc. (2) 6 (1900), p. 319—322. Vgl. den Hinweis auf diese Koordinaten bei *F. Klein*, Math. Ann. 43 (1893), p. 83 Fußn.

468) *E. Müller,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 127.

469) Ebenda; sieht man diese Koordinaten als Tetraederkoordinaten eines Punktes an, so erhält man die von *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 299—367, behandelte Abbildung der Projektivitäten auf die Punkte des Raumes. Die Deutung dieser Zahlen als tetrazyklische Kreiskoordinaten liefert die von *E. Müller,* a. a. O., p. 128, erwähnte Abbildung der Projektivitäten auf die nichtorientierten Kreise der Ebene. Vgl. auch *E. Meyer,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), p. 138—142.

Die Auffassung der Gesamtheit der Projektivitäten in einer Geraden (einem R_1) als R_3 liegt auch den Arbeiten von *C. Segre,* J. f. Math. 100 (1887), p. 317—330; *C. F. Aschieri,* Rend. Ist. Lomb. (2) 22 (1889), p. 414—428, 484—496, 558—565, 624—646; *F. Amodeo,* Lezioni di Geometria proiettiva, Napoli 1905, Cap. II (Angabe weiterer Arbeiten p. 453 f.) und *H. Graßmann* d. Jüng., Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung, 1, Leipzig 1909, p. 288 ff., zugrunde.

470) Bezeichnet $\mathfrak{P}$ eine Projektivität und ordnet man irgend einem orientierten Punktepaar pq der Geraden ein anderes $p'q'$ derart zu, daß pq' und $p'q$ Punktepaare von $\mathfrak{P}$ sind, so entspricht diese Punktepaartransformation der Inversion an einem Kugelkomplex. Aus solchen *Inversionen an Projektivitäten* setzt sich die obige allgemeine lineare Transformation zusammen.

zienten multipliziert, also die Ausdrücke

$$(1)\qquad \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}\qquad (n_1+n_2+n_3+n_4=n)$$

sollen in einer gewissen Reihenfolge mit $X_i\,(i=1,2,\ldots,N$; vgl. Nr. **18**), die nach Weglassung der Koeffizienten und nach Ersetzung der x_i durch die zugehörigen Ebenenkoordinaten u_i (Nr. **21**) daraus hervorgehenden Ausdrücke mit U_i bezeichnet werden. Dann lassen sich die Gleichungspolynome F, Φ von Flächen n^{ter} Ordnung bzw. n^{ter} Klasse in den Formen

$$(2)\qquad \begin{aligned} F &= f_1X_1+f_2X_2+\cdots+f_NX_N\\ \Phi &= \varphi_1U_1+\varphi_2U_2+\cdots+\varphi_NU_N \end{aligned}$$

schreiben. Die Zahlen f_k und φ_k sind nach Nr. **18** *homogene Koordinaten der Fläche* F bzw. Φ. Homogene Gleichungen zwischen den f_k oder φ_k definieren Systeme algebraischer Flächen n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Klasse[471]).

Für die Anwendung dieser Koordinaten ist der von *Th. Reye*[472]) eingeführte allgemeine Begriff der *Apolarität* von Wichtigkeit. Der Wert der bilinearen Form

$$(3)\qquad [F\Phi]=\sum_1^N f_k\varphi_k$$

heißt das n^{te} *Moment*[473]) der Fläche F in bezug auf Φ oder umgekehrt; verschwindet dieses Moment, so sind die beiden Flächen zueinander *apolar*. Betrachtet man die f_k und φ_k als homogene lineare Koordinaten eines Punktes bzw. eines R_{N-2} in einem R_{N-1} (Nr. **3**), so ist die Apolaritätsbedingung identisch mit der Bedingung für das Ineinanderliegen von Punkt und R_{N-2}[474]). Zu $N-1$ linear

471) Bezüglich des ersten Auftretens allgemeiner Flächenkoordinaten vgl. Anm. 363, 366, bezüglich der Systeme von Flächen zweiten Grades III C 2, *Staude,* Nr. **146—148**; allgemeinere Systeme behandelt *Th. Reye,* J. f. Math. 82 (1877), p. 1—21, 173—206.

472) J. f. Math. 72 (1870), p. 293—326; 78 (1874), p. 97—113; 79 (1875), p. 159—175; *H. Graßmann,* J. f. Math. 84 (1877), p. 273—283 = Ges. W. 2¹, p. 283—294. *J. Rosanes,* Math. Ann. 6 (1873), p. 265, nennt apolare Kegelschnitte *konjugiert*; vgl. auch J. f. Math. 76 (1873), p. 312—330. Weitere Literatur über Apolarität I B 2, *Meyer,* Nr. **24**.

473) J. f. Math. 72 (1870), p. 293—326; über Trägheitsmomente, Zeitschr. Math. Phys. 10 (1865), p. 433—455. Das Symbol $[F\Phi]$ besitzt Produktcharakter (Nr. **10**).

474) Für die Kurven zweiter Ordnung in der Ebene vgl. *E. Study,* Math. Ann. 27 (1886), p. 58—101 (auch Habilitationsschrift 1885); 40 (1892), p. 551—558, wo sich auch weitere Literatur über deren Auffassung als R_5 findet; *W. Wirtinger,*

unabhängigen Flächen n^{ter} Ordnung F_i (n^{ter} Klasse Φ_i) gibt es eine einzige zu allen apolare Fläche n^{ter} Klasse (n^{ter} Ordnung); ihre Koordinaten sind proportional den Determinanten der Matrix

$$(4) \qquad \|f_{ik}\| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ k = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}.$$

X_i ist apolar zu allen U_k, für welche $k \neq i$ ist.

Benutzt man statt der Produkte X_i allgemeiner N voneinander linear unabhängige Formen n^{ter} Ordnung $F_1, F_2, \ldots, F_N$ und statt der U_i die zu je $N-1$ der Formen F_i apolaren Formen n^{ter} Klasse Φ_i[475]), so wird

$$(5) \qquad F = \sum_1^N m_i F_i, \qquad \Phi = \sum_1^N \mu_i \Phi_i$$

sein (Nr. 18). Die Ableitzahlen m_i und μ_i sind die homogenen Koordinaten der Fläche $F = 0$ bzw. $\Phi = 0$ in bezug auf die Fundamentalflächen F_i und Φ_i; sie gehen aus den f_k und φ_k durch kontragrediente lineare Transformationen hervor. Wegen

$$(6) \qquad [F\Phi] = |f_{ik}| \sum_1^N m_i \mu_i$$

sind die Koordinaten $m_i(\mu_i)$ einer Fläche n^{ter} Ordnung (Klasse) proportional ihren Momenten $[F\Phi_i]$ ($[\Phi F_i]$) in bezug auf die Fundamentalflächen n^{ter} Klasse (Ordnung). Aus (Nr. 21, Gl. (7))

$$[ux] = \sum_1^4 u_i x_i$$

folgt

$$(7) \qquad [ux]^n = \sum_1^N U_i X_i$$ [476]).

Math. Ann. 40 (1892), p. 273 ff. (samt Anwendungen zum Studium der ebenen C_4); *E. Bertini*, Introd. alla geometria proiettiva degli iperspazi etc., Pisa 1907, p. 327—352.

475) Genauer: $\Phi_i = \sum \varphi_{ik} U_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, wo die φ_{ik} die zu den f_{ik} gehörigen Unterdeterminanten in $|f_{ik}|$ bezeichnen.

476) Allgemeiner ist

$$\sum_1^N F_i \Phi_i = |f_{ik}| [ux]^n.$$

Die Φ_i (bzw. F_i) sind also die homogenen Koordinaten der n-fachen Ebene (u_i) (des n-fachen Punktes (x_i)) in bezug auf die Fundamentalflächen F_i (bzw. Φ_i). Die n-fachen Ebenen bilden in dem R_{N-1} der Flächen n^{ter} Ordnung eine rationale $M_3^{n^3}$. Wegen geometrischer Anwendungen dieser Betrachtungsweise vgl. III A B 4b, *Fano*, Nr. 29.

Die Gleichung (2) einer Fläche n^{ter} Ordnung sagt daher aus, daß sie (wegen $[U_i X_i] = 1$) zu ihren als Flächen n^{ter} Klasse betrachteten Punkten apolar ist[477]).

Analoges gilt für jeden linearen Raum. Im binären Gebiet, wo $N = n + 1$ ist, führt man ebenfalls die zu x_1, x_2 dualen Koordinaten u_1, u_2 ein (Nr. **21**). r lineare Gleichungen zwischen den f_k oder φ_k definieren eine Involution n^{ten} Grades, $(n - r)^{\text{ter}}$ Stufe[478]). Die zu einer Form F (vom n^{ten} Grade in x_1, x_2) apolaren n-fachen Punkte (u_1, u_2) decken sich mit den durch $F = 0$ dargestellten Punkten[479]).

---

477) *Th. Reye*, J. f. Math. 78 (1874), p. 105. Zwischen den n^{ten} Potenzen Π_i^n von N Punkten $\Pi_i = 0$ einer Fläche n^{ter} Ordnung besteht immer eine Gleichung

$$\sum_1^N a_i \Pi_i^n = 0.$$

Auf ähnlichen Beziehungen beruhen die so ergebnisreichen Untersuchungen von *P. Serret*, Géométrie de direction, Paris 1859; vgl. auch Paris C. R. 86 (1878), p. 39—42. Φ ist aus N voneinander unabhängigen Größen Π_i^n ableitbar, etwa

$$\Phi = \sum_1^N \mu_i \Pi_i^n.$$

Denkt man sich insbesondere Π_i in der Form

$$\Pi_i = \frac{a_i u + b_i v + c_i w + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

gegeben, wo u, v, w *Plücker*sche Ebenenkoordinaten (Nr. **19**) bezeichnen, so ist Π_i^n die n^{te} Potenz des Abstandes des Punktes $\Pi_i = 0$ von der Ebene (u, v, w). Betrachtet man μ_i als Masse des Punktes $\Pi_i = 0$, so ist Φ gleich dem n^{ten} Momente eines Massensystems in bezug auf die Ebene (u, v, w). $\Phi = 0$ stellt also den Ort der Ebenen dar, bezüglich derer das n^{te} Moment des gegebenen Massensystems verschwindet (n^{te} *Nullfläche* nach *Reye* oder, für $n = 2$, das *imaginäre Bild* des Massensystems nach *Hesse*). Vgl. *Th. Reye*[473]); *O. Hesse*, Vorles. Raum, 2. Aufl. (1869), 3. Aufl. (1876), 25. Vorl.; insbes. IV **4**, *Jung*, Nr. **11**, **26**.

478) Solche Involutionen wurden in zahlreichen Abhandlungen, wenn auch nicht auf rechnerischem Wege, von *Em. Weyr* untersucht, z. B. „Beiträge zur Kurvenlehre", Wien 1880, p. 35—44; vgl. auch *E. de Jonquières*, Ann. mat. p. appl. 2 (1859), p. 86 ff.

479) *J. Rosanes*, J. f. Math. 76 (1873), p. 312—330. — Betrachtet man die f_k als homogene lineare Koordinaten eines Punktes im R_n, so entsprechen den n-fachen Punkten (u_i) die Punkte einer rationalen M_1^n, der *Normkurve* (Nr. **11**) des R_n (vgl. Anm. 476), den n-fachen Punkten (x_i) die Schmieg-R_{n-1} dieser Kurve. Die f_k sind die Koordinaten des Punktes bezüglich der M_1^n (Nr. **11**). Verwertungen dieser Abbildung für die Theorie der binären Formen finden sich bei *F. Meyer*, Apolarität (mit zahlreicher Literatur); *L. Berzolari*, Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 9—50; Ann. mat. p. appl. (2) 21 (1893), p. 1—24 (hier weitere Literatur); *S. Lie* und *G. Scheffers*, Vorl. üb. kontinuierliche Gruppen mit geom. u. anderen Anwendungen, Leipzig 1893, Kap. 23; *F. Klein*, Katalog

III. Koordinaten von Linien im Raum (allgemein: von M_r^m im R_n, $r < n - 1$).

27. Plückersche Linienkoordinaten. Obgleich Systeme von ∞^2 Geraden schon von *L. Euler* und *G. Monge*, Systeme von ∞^3 Geraden von *E. L. Malus*, *J. Ph. M. Binet*, *G. Giorgini*, *A. F. Möbius*, *W. R. Hamilton*, *E. Kummer*, *A. Transon* u. a.[480]) untersucht worden sind, so faßte doch erst *J. Plücker* den Gedanken, nicht nur in den von *Monge* eingeführten Gleichungen einer Geraden (Nr. 3, Anm. 86)

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= rz + \varrho \\ y &= sz + \sigma \end{aligned}$$

die Koeffizienten als Koordinaten der Geraden aufzufassen[481]), sondern auch die durch Gleichungen zwischen diesen Koordinaten definierten Liniengebilde zu untersuchen[482]). *H. Graßmann*[483]) hat den Begriff der Linienkoordinaten, ja der Koordinaten aller in einem linearen

---

math. Modelle usw., herausg. v. *W. Dyck*, München 1894, p. 4; *E. Waelsch*, Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 161—284, 375—389; *L. Brusotti*, Ann. mat. p. appl. (3) 9 (1904), p. 311—352.

480) Vgl. wegen näherer Angaben: *A. Clebsch*, Zum Gedächtnis an *Julius Plücker*, Abh. Ges. Gött. 16 (1872), p. 26—31 = Ges. Abh. 1, p. XXX—XXXIV; *G. Koenigs*, Ann. éc. norm. (2) 11 (1882), p. 219—223; *S. Lie* und *G. Scheffers*, Geom. d. Berührungstransf. 1, Leipzig 1896, p. 268—275; *K. Zindler*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 185 ff.; *L. Berwald*, Krümmungseigenschaften der Brennflächen usw., Diss. München 1909, p. 49 ff. Daß *Monge* schon vor *Malus* die allgemeinen Linienkongruenzen untersucht hat, weist *C. Segre*, Bibl. math. (3) 8 (1908), p. 321—324, nach. — Vgl. auch III C 10, Liniengeometrie, *Timerding*.

481) *Monge* (z. B. in Application de l'analyse, Anm. 86) sowohl als andere Mathematiker vor *Plücker* (z. B. *J. Bouquet*, J. math. p. appl. (1) 11 (1846), p. 125—128) definieren häufig Regelflächen, indem sie diese Koeffizienten als Funktionen eines Parameters wählen.

482) *J. Plücker*, Syst. Geom. d. R. (1846), p. 322. Er weist darauf hin, daß die gerade Linie hierdurch zur geometrischen Interpretation von analytischen Beziehungen zwischen vier Variabeln dienen könne; eine Gleichung zwischen ihnen bestimme „noch keinen geometrischen Ort für die gerade Linie, sondern nur ein Gesetz, nach welchem der unendliche Raum aus geraden Linien besteht". Auch eine ausführliche Bearbeitung dieses Gegenstandes wird schon in Aussicht gestellt.

483) Ausdehnungsl. v. 1844, p. 167, 170 = Ges. W. 1^1, p. 192, 195. Die Fußnote an letzterer Stelle soll sich jedenfalls auf J. f. Math. 25 (1843), p. 62—66, beziehen, wo *Graßmann* die eine feste Gerade schneidenden Tangenten einer Fläche oder Sekanten einer Raumkurve (nicht aber eines allgemeinen Strahlkomplexes) betrachtet und als Koordinaten dieser Strahlen vier Zahlen benutzt, zwischen denen eine quadratische Beziehung besteht. Vgl. auch die Anmerkungen zu dieser Abhandlung in Ges. W. 2^1, p. 367—370.

Raum enthaltenen linearen Mannigfaltigkeiten, in seiner Weise vollkommen klar hingestellt und auch Anwendungen auf die Statik gemacht, sich jedoch nicht mit der Untersuchung der durch Gleichungen zwischen diesen Koordinaten dargestellten Gebilde beschäftigt. Auch *A. Cayley*[484]) benutzte 1860 und 1862 gelegentlich homogene Linienkoordinaten, ohne auf ihre Bedeutung als solche besonderes Gewicht zu legen.

J. Plücker hat seine Ideen über Liniengeometrie ziemlich ausführlich im Jahre 1865[485]) mitgeteilt und sie in dem Werke „Neue Geometrie des Raumes" 1868—69 zusammenfassend systematisch dargestellt. Den Koeffizienten r, s, ϱ, σ der Gl. (1) als *Strahlenkoordinaten*, die die Gerade als Träger einer Punktreihe bestimmen, stellt er die Koeffizienten $p, q, \pi, \varkappa$ in den Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} u &= pw + \pi \\ v &= qw + \varkappa \end{aligned}$$

der Geraden in Ebenenkoordinaten u, v, w (Nr. **19**) als *Achsenkoordinaten*[486]) gegenüber, die die Gerade als Träger eines Ebenenbüschels bestimmen.

Eine Gleichung zwischen den Strahlen- oder Achsenkoordinaten scheidet aus den ∞^4 Geraden des Raumes ∞^3 aus, die einen *Komplex* bilden. Zwei voneinander unabhängige Gleichungen definieren eine *Kongruenz*, drei solche Gleichungen eine *Regel-*, *Strahlen-* oder *Linienfläche*[487]) (genauer eine *Geradenschar*)[488]) und vier Gleichungen

---

484) The Quart. J. p. appl. math. 3 (1860, geschr. 1859), p. 225—236; 5 (1862), p. 81 = Math. pap. 4, p. 446, 490. Diese „new coordinates" werden zur Darstellung einer Raumkurve mittels des aus einem beliebigen Punkt durch sie gelegten Kegels benutzt. Als *Linienkoordinaten* behandelt er sie erst in dem Aufsatz: On the six coordinates of a line, Cambridge Phil. Trans. 11, part 2 (1869), p. 290—323 = Math. pap. 7, p. 66—98.

485) Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 53—58; London Phil. Trans. 155 (1865), p. 725—791 (franz. Übers. J. math. p. appl. (2) 11 (1866), p. 337—404); 156 (1866), p. 361—380. Vgl. ferner die kurze Note in Les Mondes 13 (1867), p. 79 —84, und Théorie générale des surfaces reglées, leur classification et leur construction, Ann. mat. p. appl. (2) 1 (1867), p. 160—169. Sämtliche Aufsätze auch in den Ges. Abh. 1, p. 462—585.

Die Grundzüge der *Plücker*schen Liniengeometrie behandelt *Dronke*, Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 46—52; 12 (1867), p. 481—494; *G. Janni*, G. mat. 8 (1870), p. 302—326.

486) Sie finden sich schon Syst. Geom. d. R., p. 322. Die Gl. (2) stellen die Spurpunkte der Geraden in der xz- und yz-Ebene dar.

487) Diese Benennungen finden sich bei *J. Plücker*, Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 53—58, und Neue Geom. d. R., p. 18—21; statt Kongruenz ge-

eine Gruppe von Strahlen. Die ersten drei Gebilde lassen sich auch dadurch definieren, daß man die Koordinaten der Geraden als Funktionen von drei, zwei oder einem Parameter wählt[489]).

Die Linienkoordinaten r, s, ϱ, σ oder $p, q, \pi, \varkappa$ leiden an dem Übelstande, daß sie sich bei einer Raumkollineation nicht linear ändern, der Gleichungsgrad eines algebraischen Strahlkomplexes z. B. schon beim Übergang zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem ein anderer wird[490]). *J. Plücker* führte deshalb (1865) eine fünfte, überzählige Koordinate

$$(3) \qquad \eta = r\sigma - s\varrho \quad \text{bzw.} \quad \omega = p\varkappa - q\pi$$

ein[491]); der Grad einer algebraischen Gleichung in diesen fünf Strahl- oder Achsenkoordinaten ändert sich nun bei projektiven Transformationen des Raumes nicht[492]).

Die Koordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ einer durch die Punkte $P'(x', y', z')$ und $P''(x'', y'', z'')$ gehenden Geraden drücken sich durch die sechs Zahlen

$$(4) \qquad \begin{aligned} p_{12} &= x'y'' - y'x'', & p_{23} &= y'z'' - z'y'', & p_{31} &= z'x'' - x'z'', \\ p_{34} &= z' - z'', & p_{14} &= x' - x'', & p_{24} &= y' - y'' \end{aligned}$$

---

brauchte man vorher den Ausdruck *Strahlensystem* (vgl. *E. E. Kummer,* J. f. Math. 57 (1860), p. 189).

488) *G. Koenigs,* Géom. réglée, p. 14, gebraucht den Ausdruck „série réglée", da die Tangenten einer ebenen Kurve keine Regelfläche und die beiden Erzeugendenscharen einer Regelfläche zweiter Ordnung dieselbe Regelfläche bilden.

489) Die Parameterdarstellung einer Strahlkongruenz verwendet z. B. *E. E. Kummer,* a. a. O., p. 190 f., indem er seine sechs Bestimmungsstücke einer Geraden (die rechtwinkligen Koordinaten eines ihrer Punkte und ihre Richtungskosinus) als Funktionen zweier Veränderlichen u, v annimmt; die Parameterdarstellung einer Regelfläche benutzt *J. Lüroth,* J. f. Math. 67 (1867), p. 133 f. Aus jeder Parameterdarstellung eines Komplexes entspringt eine Abbildung seiner Strahlen auf die Punkte oder Ebenen des Raumes (*M. Nöther,* Nachr. Ges. Gött. 1869, p. 305; *P. del Pezzo,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1884—87), p. 157—164). Solche Darstellungen finden besonders in der Infinitesimalgeometrie Verwendung; vgl. *G. Koenigs,* Géom. réglée, chap. IV. Bei *K. Zindler,* Liniengeom. 1 u. 2, bildet die Parameterdarstellung der liniengeometrischen Grundgebilde ein Hauptuntersuchungsmittel (vgl. 1, § 60 u. insbes. 2).

490) Dies zeigt sich schon, wenn man $x = y'$, $y = z'$, $z = x'$ setzt; vgl. etwa *Lie-Scheffers,* Geom. d. Berührungstransf. 1, Leipzig 1896, p. 276.

491) Ges. Abh., p. 478 f.; η tritt in der Gleichung des Normalrisses der Geraden auf die xy-Ebene, ω in der Gleichung des Spurpunktes der Geraden in dieser Ebene auf. *A. Schoenflies,* Plückers Ges. Abh. 1, p. 620, sieht in dieser Einführung die Hauptleistung, die *Plücker* über den Standpunkt von 1846 hinausführte.

492) *J. Plücker,* Ges. Abh. 1, p. 489 f., für die Bewegungen; *F. Klein,* Diss. Bonn 1868 = Math. Ann. 23 (1884), p. 546 f., allgemein.

wie folgt aus:

(5) $$r = \frac{p_{14}}{p_{34}}, \quad s = \frac{p_{24}}{p_{34}}, \quad \varrho = \frac{p_{31}}{p_{34}}, \quad \sigma = -\frac{p_{23}}{p_{34}}, \quad \eta = \frac{p_{12}}{p_{34}}.$$

Man kann daher die p_{ik} ($p_{ik} = -p_{ki}$) als *rechtwinklige homogene Strahlkoordinaten* betrachten, zwischen denen die Gleichung

(6) $$p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0$$

besteht. Analoges gilt für die Achsenkoordinaten. Durch Einführung homogener rechtwinkliger Koordinaten (Nr. 3) gestalten sich die Ausdrücke p_{ik} symmetrischer[493]).

Wählt man für P' und P'' den Punkt (x, y, z) und einen benachbarten, so ist

(7) $$\begin{aligned} p_{12} &= x\,dy - y\,dx, & p_{23} &= y\,dz - z\,dy, & p_{31} &= z\,dx - x\,dz, \\ p_{34} &= -dz & p_{14} &= -dx, & p_{24} &= -dy \end{aligned}$$ [494]).

Bezeichnen y_i und z_i Tetraederkoordinaten zweier Punkte (y) und (z), so hat schon *H. Graßmann*[495]) 1844 als Koordinaten der Ver-

---

493) *J. Plücker*, London Phil. Trans. 155 (1865), p. 725—791, Add. Note Nr. 2 = Ges. Abh. 1, p. 526 f., wo aber für diese „sechs Koordinaten einer Geraden" keine eigenen Zeichen (vgl. Anm. 495) eingeführt werden. *Plücker* gibt jedoch a. a. O., Nr. 4 eine geometrische Deutung dieser Koordinaten. Bezeichnen nämlich α, β, γ die Achsenneigungen der Geraden $P'P''$, λ, μ, ν die der positiven Normalenrichtung von $[OP'P'']$ und d den Normalabstand der Geraden von O, so bestehen die Proportionen

$$p_{14} : p_{24} : p_{34} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : d\cos\lambda : d\cos\mu : d\cos\nu.$$

Vgl. auch Neue Geom. d. R., p. 2 f.; *C. A. v. Drach*, Math. Ann. 2 (1869), p. 128 f.; *A. Thaer*, Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 315—318; *K. Zindler*, Liniengeom. 1, § 33. Für $\overline{P'P''} = 1$ nennt letzterer die p_{ik} die *Normalzeiger* der Geraden. Diese Koordinaten erwähnt auch *E. E. Kummer*, Math. Abh. Ak. Berlin, aus d. J. 1866 (1867), p. 5, ohne sie weiter zu verwerten, und *A. Cayley*, Math. pap. 7, p. 89. Nach *R. W. H. T. Hudson*, The Messenger Math. 31 (1901—02), p. 151—157, lassen sie die kinematische Deutung zu, einen auf der Einheitskugel sich bewegenden Punkt und seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung zu bestimmen. Vgl. auch *C. M. Jessop*, Line complex, p. 347. Im allgemeinen Fall ($\overline{P'P''} \neq 1$) deutet *Plücker*, a. a. O., Nr. 7 und 25, p_{14}, p_{24}, p_{34} als die zu den Koordinatenachsen parallelen Komponenten einer Kraft, deren Drehmomente in bezug auf jene Achsen p_{23}, p_{31}, p_{12} sind. Sechs der Gl. (6) genügende Zahlen können als *Koordinaten einer an einem starren Körper angreifenden Kraft* betrachtet werden; s. jedoch Anm. 506. Vgl. auch die Einführung obiger Koordinaten bei *G. Darboux*, Leçons 1, p. 194 f.

494) Diese von *J. Plücker*[493]), Add. Note, Nr. 6 = Ges. Abh. 1, p. 528, samt den analogen Achsenkoordinaten erwähnten Formen hat *S. Lie* bei seinen Untersuchungen über *Monge*sche Differentialgleichungen verwertet. Vgl. *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransf. 1, Leipzig 1896, p. 284.

495) Vgl. Anm. 483; die Koordinaten („Zeiger") der Geraden sind bei ihm

bindungsgeraden die aus der Matrix

$$(8)\qquad \left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix} \right\|$$

entnehmbaren sechs Determinanten

$$(9)\qquad p_{ik} = \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} = -p_{ki}$$

definiert[496]). Sie ändern sich proportional, wenn man (y) und (z) durch zwei andere Punkte der Geraden ersetzt, und sind Koordinaten der vier Verbindungsebenen der Geraden mit den Ecken des Koordinatentetraeders[497]). Die Beziehung

$$(10)\qquad P \equiv p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0$$ [498]),

---

die Zahlen, mittels welcher das äußere Produkt zweier Punkte (oder Ebenen) aus den sechs äußeren Produkten zweiter Stufe der ursprünglichen Einheiten abgeleitet wird. Sie sind also ursprünglich Koordinaten eines *Stabes* (Nr. 2) im Raum und damit homogene Koordinaten einer Geraden. Solche tetraedrische Strahlkoordinaten benutzten auch *G. Battaglini,* Rend. Acc. sc. fis. mat. Napoli 3 (1866) = G. mat. 6 (1868), p. 24—36, 239—258; *J. Lüroth,* J. f. Math. 67 (1867), p. 130; *P. Gordan,* Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 59; *F. Klein,* Üb. d. Transf. d. allg. Gleichung usw., Diss. Bonn 1868 = Math. Ann. 23 (1884), p. 539—578. *A. Cayley*[505]). Die Bezeichnung der Koordinaten mit p_{ik} findet sich bei *Gordan,* während *Lüroth* und *Klein* $p_{12} = p_1$, $p_{13} = p_2$, $p_{14} = p_3$, $p_{34} = p_4$, $p_{42} = p_5$, $p_{23} = p_6$ setzen. In letzterer, oft bequemeren Bezeichnung lautet Gl. (10)

$$\sum p_k p_{k+3} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

496) Im Sinne *Graßmanns* sind die p_{ik} R_1-Koordinaten in einem beliebigen R_3 (Nr. 3). Bezeichnen z. B. y_i und z_i tetrazyklische Koordinaten zweier Kreise der Ebene (Nr. 24), so sind die p_{ik} die homogenen Koordinaten des durch sie bestimmten Büschels oder ihres *Schnittpunktepaares.* Der Zusammenhang der *Plücker*schen Liniengeometrie und der mit Hilfe dieser Koordinaten entwickelbaren Geometrie der Punktepaare in der Ebene läßt sich herstellen, indem man die Schnittpunktepaare einer festen Kugel mit den Geraden des Raumes stereographisch projiziert. Vgl. *R. Mehmke,* Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 266—268; *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 7 (1896), p. 79.

497) *W. Fiedler,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 181; Darst. Geom., Leipzig 1871, p. 547 f. Das Verhältnis zweier p_{ik} mit einem gemeinsamen Index läßt sich daher als Doppelverhältnis deuten.

498) P wird auch oft in der Form geschrieben, daß die übrigen Glieder aus dem ersten hervorgehen, indem man den Index 1 festhält und die übrigen zyklisch vertauscht. P ist ein Sonderfall der von *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 2 (1827), p. 355, untersuchten *Pfaff*schen Ausdrücke; vgl. etwa G. *Kowalewski,* Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, p 140.

Die Bedingungsgleichung (10) wird gewöhnlich *A. Cayley,* The Quart. J. p. appl. math. 3 (1860, geschr. 1859), p. 225 = Math. pap. 4, p. 446, zugeschrieben, obwohl sie schon *H. Graßmann* bekannt war; denn die in Ausdehnungsl. v. 1844, § 124 angegebene Bedingungsgleichung $S \cdot S = 0$ für eine Gerade ist mit (10)

die unmittelbar aus

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

folgt, spricht die Bedingung dafür aus, daß jene vier Ebenen eine Gerade gemeinsam haben[499]). $P = 0$ ist daher auch die hinreichende Bedingung dafür, daß sechs beliebige, nicht sämtlich verschwindende reelle Zahlen p_{ik} als Linienkoordinaten betrachtet werden können[500]). Dabei ist die Erweiterung des Begriffs der geraden Linie durch die unendlichfernen Geraden schon vorausgesetzt[501]).

Bezeichnen v_i und w_i die zu den vorhergehenden Punktkoordinaten gehörigen (Nr. 22) Koordinaten zweier Ebenen (v) und (w), so sind

$$(12)\qquad q_{ik} = \begin{vmatrix} v_i & v_k \\ w_i & w_k \end{vmatrix} = -q_{ki}$$

die *tetraedrischen Achsenkoordinaten*[502]) ihrer Schnittlinie, die sich wieder nur proportional ändern, wenn man (v) und (w) durch zwei andere Ebenen des Büschels ersetzt. Die q_{ik} sind Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit den Flächen des Grundtetraeders[503]). Zwischen den Koordinaten p_{ik} und q_{ik} einer Geraden bestehen die

---

identisch. Als Beziehung zwischen den Tetraedervolumen, die eine Strecke mit den Kanten eines Tetraeders bestimmt, findet sich diese Gleichung übrigens schon bei *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul, § 170, Gl. I = Ges. Werke 1, p. 204. Eine nichthomogene Relation zwischen diesen Volumkoordinaten (*Zeuthen*sche Koordinaten) stellt *E. d' Ovidio,* G. mat. 10 (1872), p. 33, auf.

499) *W. Fiedler*[497]).

500) *J. Lüroth,* J. f. Math. 67 (1867), p. 130; *F. Klein,* Diss. Bonn 1868 = Math. Ann. 23 (1884), p. 542; Nachr. Ges. Gött. 1869, p. 258.

501) Erst durch diese Erweiterung wird erreicht, daß die Gesamtheit aller Geraden ein abgeschlossenes Kontinuum bildet, daß also jede beliebige unendliche Menge von Geraden wohldefinierte Häufungsstellen erhält. Vgl. *E. Study,* Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 97 f.

502) *J. Plücker*[493]), Add. Note Nr. 2 = Ges. Abh. 1, p. 527; die Fußnote zu Nr. 1 beweist, daß *Plücker* hier allgemeine lineare Ebenenkoordinaten vor Augen hatte. Bei *H. Graßmann*[483]) sind die Achsenkoordinaten mitverstanden. *G. Koenigs,* Géom. réglée, p. 5 f., bezeichnet mit p_{ik} die Achsen-, mit q_{ik} die Strahlkoordinaten. *K. Zindler,* Liniengeom. 1, insbes. p. 86 Fußn., folgt ihm darin, nur verwendet er (wie *W. Fiedler*) statt q_{ik} die Zeichen π_{ik} und gebraucht nicht wie *Koenigs* für beide die gemeinschaftliche Bezeichnung r_{ik}, die auch *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 200, verwendet, wenn eine Unterscheidung zwischen p_{ik} und q_{ik} unnötig ist.

503) *W. Fiedler*[497]).

Beziehungen[504])

$$\text{(13)} \qquad \frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{23}}{q_{14}} = \frac{p_{31}}{q_{24}} = \frac{p_{14}}{q_{23}} = \frac{p_{24}}{q_{31}} = \frac{p_{34}}{q_{12}} = \varrho,$$

die sich in

$$\text{(13a)} \qquad \varrho q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}$$

zusammenfassen lassen.

Wie die rechtwinkligen (Anm. 493) lassen auch die tetraedrischen Strahlkoordinaten verschiedene geometrische und mechanische Deutungen zu. Wählt man in der Geraden eine beliebige Strecke, so sind die p_{ik} proportional den Volumen der Tetraeder, die diese Strecke mit den Kanten $A_i A_k$ des Grundtetraeders bestimmt (*Volumkoordinaten*)[505]). Denkt man sich in der Geraden $[A_i A_k]$ eine Kraft wirken, die durch den p_{ik}-fachen Vektor $A_i A_k$ dargestellt wird, so haben diese sechs Kräfte, wofern $P = 0$ ist, eine Resultierende. Die p_{ik} bestimmen also eine *Kraft* oder einen *Stab* (Nr. 2)[506]). Wird das sechsfache Volumen

504) *J. Lüroth,* J. f. Math. 67 (1867), p. 131. Diese Gleichungen bilden nur einen Sonderfall eines allgemeinen Determinantensatzes, den *A. Brill,* Math. Ann. 4 (1871), p. 530, bewiesen hat, der sich aber in anderer Form schon bei *H. Graßmann,* Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 112 = Ges. W. 1², p. 82 f. findet. S. auch *M. Pasch,* J. f. Math. 75 (1873), p. 108 f.; *W. F. Meyer,* Apolarität, § 1. — Vgl. noch die Ableitung von (13) bei *W. Fiedler,* Darst. Geom., 2. Aufl., p. 560.

505) Diese Deutung ist bei *H. Graßmann* selbstverständlich, ferner bei *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 1 (1869), p. 436, und *A. Cayley,* Cambridge Phil. Soc. 11/2 (1869, geschr. 1867), p. 290—323 = Math. pap. 7, p. 97, erwähnt. — Bezeichnet man als *Moment zweier Geraden* das Produkt aus ihrem kürzesten Abstand und dem Sinus ihres Neigungswinkels (*F. Brioschi,* J. f. Math. 50 (1855), p. 236 = Opere mat. 5, p. 264, ohne den Namen „Moment"; *A. Cayley,* a. a. O., Nr. 58; *H. G. Zeuthen,* a. a. O., p. 433 f.; vgl. noch IV 2, *Timerding,* Nr. 9, insbes. Anm. 22), so sind die p_{ik} auch gleich den mit festen Konstanten multiplizierten Momenten der Geraden in bezug auf die Kanten des Grundtetraeders. Vgl. auch *C. A. v. Drach,* Math. Ann. 2 (1869), p. 134.

506) *H. Graßmann,* Ausdehnungsl. v. 1844, § 115, 121 = Ges. W. 1¹ p. 191, 199 f. (vgl. auch Anm. 483); *J. Plücker*[493]), Add. Note IV = Ges. Abh. 1, p. 539—541; Neue Geom. d. R., p. 23 f.; *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 1 (1870), p. 433. Unter dem Namen „coordonnées tétraédriques des segments" werden diese Stabkoordinaten auch von *G. Koenigs,* Leçons de Cinématique, Paris 1897, p. 419—422, kurz behandelt. Liegt der Stab im Unendlichen, so sind seine Koordinaten die eines *Feldes* (Nr. 3). — An ein dem baryzentrischen Kalkül ähnliches Rechnen mit Stäben dachte (wahrscheinlich um 1843) auch *C. F. Gauß;* vgl. Werke 8, p. 298.

Durch eine nichthomogene Gleichung zwischen den Stabkoordinaten p_{ik} wird nach *K. Zindler,* Liniengeom. 1, p. 118 f., ein *Stabwald* definiert. Das Gebilde selbst erwähnt schon *J. Plücker,* a. a. O. = Ges. Abh. 1, p. 540; Neue Geom. d. R., p. 23, als „Kräftekomplex" und führt auch seine Haupteigenschaften an. Einige Untersuchungen über Stabmannigfaltigkeiten, besonders über die durch

des Grundtetraeders als Einheit gewählt, so sind die p_{ik} (oder q_{ik}) die statischen Momente der Kraft bezüglich der Kanten des Grundtetraeders. Auf diese Art lassen sich die Linienkoordinaten ohne Benutzung von Punkt- oder Ebenenkoordinaten definieren[507]).

Die Bedingung für das Schneiden (die Inzidenz) zweier Geraden (p_{ik}) und (p'_{ik}) lautet

(14) $$p'_{12}p_{34} + p'_{23}p_{14} + p'_{31}p_{24} + p'_{34}p_{12} + p'_{14}p_{23} + p'_{24}p_{31} = 0$$

oder

(14a) $$\sum p'_{ik}\frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0\ ^{508)},$$

wofür kurz $[p'p] = 0$ geschrieben werden soll.[509]).

Bedeuten die p'_{ik} die Koordinaten einer festen Geraden, so definiert Gl. (14) einen *speziellen linearen Strahlkomplex*[510]) (ein *Strahlgebüsch*[511])), von dem (p'_{ik}) die Achse ist. Bezeichnen hingegen a_{ik} beliebige (nicht $P = 0$ genügende) sechs Zahlen, so ist

(15) $$[ap] = 0$$

---

lineare Gleichung zwischen den p_{ik} definierten, rühren von *K. Zindler*, Liniengeom. 1, § 43, 45, 48, 82, 83; *Boltzmann*-Festschrift, Leipzig 1904, p. 34—37, her, liegen aber auch Betrachtungen von *R. St. Ball*, Theory of screws, und *E. Study*, Geom. d. Dynamen, zugrunde.

Genügen die p_{ik} nicht der Gleichung $P = 0$, so bestimmen sie ein Kräftesystem (eine *Kräftesumme* nach *Graßmann*, a. a. O.) oder nach *J. Plücker*, London Phil. Trans. 156 (1866), p. 361—380 = Ges. Abh. 1, p. 548, eine *Dyname* oder auch eine unendlichkleine Verschiebung. Näheres darüber in IV 2, *Timerding*, Nr. 5, 7 und bei *F. Klein*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 240 f. Wegen der historischen Entwicklung der „Schraubentheorie" vgl. auch *H. E. Timerding*, Geom. d. Kr., p. 147 Fußn.

507) *H. G. Zeuthen*, a. a. O., p. 435. Die *Graßmann-Zeuthen*sche Definition der Linienkoordinaten dehnt auf mehrdimensionale Räume aus: *W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. 29 (1898), p. 478—487. Schon *J. Plücker*[493]), Add. Note III = Ges. Abh. 1, p. 537—539, hat ein Linienkoordinatensystem aufzustellen gesucht, bei dem von Punkt- oder Ebenenkoordinaten kein Gebrauch gemacht wird. Er betrachtet zu diesem Zweck vier feste Grade des Raumes als Achsen linearer Strahlkomplexe, die durch die zu bestimmende Gerade gehen, und wählt die Parameter dieser Komplexe als Koordinaten der Geraden. Sie bestimmen jedoch im allgemeinen ein Geradenpaar.

508) *J. Lüroth*[506]), p. 131; *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 200. Man kann Gl. (14) auch in den Formen $\sum p'_{ik}q_{ik} = 0$ oder $\sum p_{ik}q'_{ik} = 0$ schreiben.

509) *A. Voß*, Math. Ann. 8 (1875), p. 57; *C. M. Jessop*, Line complex, p. 20. Gl. (10) kann man nun auch in der Form $[p^2] = 0$ schreiben.

510) *P. Gordan*, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 59; *F. Klein*[508]), p. 201. *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 280, nennt ihn *Nullkomplex*. Diese Gleichung einer Geraden in Linienkoordinaten findet sich inhaltlich schon bei *A. Cayley*, The Quart. J. p. appl. math. 3 (1860), p. 225—236 = Math. pap. 4, p. 449.

511) *R. Sturm*, Liniengeometrie 1, Leipzig 1892, p. 3.

die Gleichung eines *allgemeinen linearen Strahlkomplexes*[512]) (eines *Strahlgewindes*[513])).

Zwei Gewinde $[ap] = 0$, $[bp] = 0$ liegen nach *F. Klein*[514]) *involutorisch* (*in Involution*), wenn ihre bilineare Invariante $[ab] = 0$ ist. Einer um einen gemeinschaftlichen Gewindestrahl sich drehenden Ebene gehören dann als Nullpunkte in den beiden Gewinden die Punktepaare einer Involution zu[515]). Die Strahlen eines Gewindes sind die Achsen jener Strahlgebüsche, die mit dem Gewinde involutorisch liegen. Ein Strahlgebüsch liegt mit sich selbst in Involution.

Sind die $p_{ik} = p'_{ik} + p''_{ik}\sqrt{-1}$ gemeine komplexe Zahlen, die der Gl. (10) genügen, so sagt man, sie bestimmen eine *imaginäre* (*komplexe*) *Gerade zweiter* oder *erster Art*[516]), je nachdem $[p'^2] \neq 0$ oder $[p'^2] = 0$ ist. Alle die Inzidenzbedingung $[pr] = 0$ erfüllenden reellen Geraden (r_{ik}) gehören einem elliptischen oder parabolischen *Strahlnetz* an[517]).

512) *J. Plücker*, Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 53—58 = Ges. Abh. 1, p. 464; Anm. 493 = Ges. Abh. 1, p. 479; Neue Geom. d. R., p. 26, in den Koordinaten r, s, ϱ, σ, η.

513) *R. Sturm*, a. a. O., p. 62. — Das Strahlgebilde selbst war schon vor *Plücker* bekannt. Bezüglich seiner Geschichte und Eigenschaften vgl. III C 10, *Timerding*, und III D 9, *Zindler*.

514) Nachr. Ges. Gött. 1869, p. 260; Math. Ann. 2 (1870), p. 201 f. Die Invariante $[ab]$ ist bis auf Faktoren, die bloß von jedem der Komplexe allein abhängen, identisch mit dem von *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 368, definierten *Moment der beiden Komplexe*; *H. E. Timerding*, Geom. d. Kr., p. 138, nennt $[ab]$ die *Konkurrenz* der entsprechenden Dynamen. *G. Battaglini*, Atti Acc. fis. mat. Napoli 4 (1869), Nr. 14, bezeichnet zwei involutorische Komplexe (eigentlich Dynamen) als in *harmonischer Lage* befindlich; *R. St. Ball*[506]) als *reziprok*; *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 280, als *normal*; *G. Koenigs*, Géom. réglée, p. 41, als *orthogonal*. — Unter Zugrundelegung einer beliebigen Fläche zweiten Grades als absoluter Fläche definiert *E. d'Ovidio*, Ann. mat. p. appl. (2) 7 (1875—76), p. 30 f., die Begriffe *Moment*, *Distanz* und *Winkel* zweier Komplexe und stellt dafür die Formeln auf.

515) Die beiden Komplexe liegen bezüglich der beiden speziellen Komplexe ihres Büschels harmonisch. Durch solche Komplexe werden die Punkte und Ebenen des Raumes involutorisch gepaart (*windschiefe Involution*); s. *F. Klein*, Nachr. Ges. Gött. 1869, p. 261; Math. Ann. 2 (1870), p. 202; 4 (1871), p. 414. Jeder der beiden Komplexe wird durch das Nullsystem des anderen in sich transformiert.

516) Erstere enthält keinen reellen Punkt und liegt in keiner reellen Ebene, letztere enthält einen reellen Punkt und liegt in einer reellen Ebene. Die Namen stammen von *K. G. Chr. v. Staudt*, Beitr. z. Geom. d. Lage, 1. Heft, Nürnberg, 1856, p. 76 f.; *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie, autogr. Vorles. 2, Göttingen 1890, p. 41, gebraucht dafür *hoch-imaginär* und *nieder-imaginär*, *K. Zindler*, Liniengeom. 1, p. 211, *allgemeine* und *spezielle imaginäre* Gerade.

517) *F. Klein*, Diss. Bonn 1868 = Math. Ann. 23 (1884), p. 545; *O. Stolz*,

Da umgekehrt jedem solchen Strahlnetz sechs komplexe Zahlen p_{ik} oder deren konjugierte zugeordnet werden können[518]), so ist jede imaginäre Gerade durch ein Strahlnetz definierbar. Die Trennung der beiden konjugiert imaginären Geraden geschieht nach *K. G. Chr. v. Staudt*[519]) durch Unterscheidung des Sinnes (Orientierung) im Netz. Die Aufgabe, einen gegebenen Ausdruck in Linienkoordinaten durch Änderung der Koordinatenbasis auf eine kanonische Form zu bringen, führt oft auf Grundtetraeder, deren Kanten imaginär sind[520]).

Die Koordinaten p_{ik} (oder q_{ik}) werden bei einer kollinearen Transformation des Raumes linear und homogen transformiert[521]); der Grad eines algebraischen Strahlkomplexes wird hierdurch nicht geändert. Nach *F. Klein*[522]) sind die allgemeinen linearen homogenen Transformationen der p_{ik}, die den Ausdruck P in ein Vielfaches seiner selbst überführen, mit den kollinearen und korrelativen Transformationen des Raumes identisch[523]). Gegenüber der Gesamtheit dieser Transformationen bilden die Punkte oder Ebenen keinen Körper, wohl aber die Strahlen (vgl. III AB 4b, *Fano,* Nr. 5).

Math. Ann. 4 (1871), p. 440 f.; *K. Zindler,* a. a. O., 5. Abschn., wo die imaginären Elemente eingehend behandelt sind. Zur Geschichte der imaginären Geraden vgl. *A. Ramorino*[17]).

518) *K. Zindler,* a. a. O., p. 206, 210.

519) S. Anm. 516; *O. Stolz,* a. a. O., p. 440 f.; *K. Zindler,* a. a. O., p. 215.

520) *F. Klein,* Diss. Bonn 1868 = Math. Ann. 23 (1884), p. 551 f.; *K. Zindler,* a. a. O., § 69.

521) Sind

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

die Transformationsgleichungen für die Punkte des Raumes, so lauten die für die Strahlenkoordinaten p_{ik}

$$p_{ik}' = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots 4}(a_{i\mu}a_{k\nu} - a_{i\nu}a_{k\mu})p_{\mu\nu} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3, 4),$$

wo die Koeffizienten der $p_{\mu\nu}$ die Koordinaten der Kanten des alten Tetraeders bezüglich des neuen bedeuten. *F. Klein,* a. a. O., p. 547. Vgl. ferner *A. Cayley,* Cambridge Phil. Trans. 11/2 (1868), Art. 76, 77; *G. Battaglini,* G. mat. 6 (1868), p. 240; *J. J. Hemming,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 16 (1871), p. 47 f.; *W. Fiedler,* Darst. Geom., 2. Aufl., p. 609.

522) A. a. O., p. 546 f., vgl. auch Math. Ann. 4 (1871), p. 356; 5 (1872), p. 262; *A. Voß,* Math. Ann. 13 (1878), p. 354 f.

523) Z. B. sind ein ebenes Strahlfeld und ein Strahlbündel im Sinne der Liniengeometrie nicht unterscheidbar; *G. Koenigs,* Géom. réglée, p. 13, gebraucht daher für sie gemeinsam den Namen *hyperfaisceau.* Durch eine oder mehrere allgemeine Gleichungen zwischen Linienkoordinaten werden immer nur solche geometrische Gebilde dargestellt, die in sich dual sind; vgl. *J. Plücker,* Neue Geom. d. R., p. 199; *A. Voß,* Math. Ann. 8 (1875), p. 58

28. Gewindekoordinaten, Kleinsche Linienkoordinaten. Bezeichnet man die sechs in Nr. 27 auftretenden Indizeskombinationen (ik) in irgend einer Reihenfolge mit $1, 2, \ldots, 6$, so kann die Gleichung eines Gewindes (Nr. 27, Gl. (15)) in den Formen

$$(1) \quad [aq] \equiv \sum a_i q_i = 0 \quad \text{oder} \quad [\alpha p] \equiv \sum \alpha_i p_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

geschrieben werden. Die Koeffizienten a_i und α_i sollen die homogenen *Strahl-* bzw. *Achsenkoordinaten des Gewindes*[524]) heißen. Die Gesamtheit der Gewinde bildet einen doppelt überdeckt zu denkenden R_5 (Gewinde erster und zweiter Schicht[525])); zwei Gewinde gehören der gleichen Schicht an, wenn die Koordinaten beider Strahl- oder Achsenkoordinaten sind.

Bezeichnen p_i und q_i von nun an auch Strahl- bzw. Achsenkoordinaten eines veränderlichen Gewindes, so liegen alle durch die lineare Gleichung

$$(2) \quad \sum \alpha_i p_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

definierten Gewinde zu dem Gewinde (α_i) der andern Schicht involutorisch (Nr. 27). Diese Gewinde bilden einen R_4[526]), und die α_i können auch als Koordinaten dieses Gewinde-R_4 betrachtet werden. Das gleiche gilt für die Gewinde der andern Schicht[527]). Die speziellen Komplexe (Strahlgebüsche) des Raumes bilden die Elemente bzw. Tangential-R_4 einer nichtsingulären M_4^2. Zwei involutorische Gewinde derselben Schicht sind zwei hinsichtlich der M_4^2 konjugierte Elemente des Gewinde-R_5. Die *Plücker*sche oder projektive Liniengeometrie[528]) ist identisch mit der projektiven Geometrie eines R_5 unter Auszeichnung einer nichtsingulären M_4^2 [529]).

---

524) Gewindekoordinaten betrachtet zuerst *F. Klein*, Diss. Bonn 1868, p. 20 = Math. Ann. 23 (1884), p. 554 Fußn.; Math. Ann. 2 (1870), p. 368 (vgl. auch *M. Pasch*, J. f. Math. 75 (1873), p. 110), obgleich sich die *Koordinaten einer Dyname* schon bei *H. Graßmann* und *J. Plücker* finden (vgl. Anm. 506); bezüglich letzterer, die auch *Schraubenkoordinaten* heißen, s. IV 2, *Timerding*, Nr. 14. Obige Benennungen der Gewindekoordinaten bei *K. Zindler*, Liniengeom. 1, p. 149.

525) Diese Ausdrucksweise gebraucht *E. Study*, Geom. d. Dynamen, p. 237.

526) *R. Sturm*, Liniengeom. 1, Leipzig 1892, p. 197, gebraucht dafür den *Reye*schen Ausdruck (J. f. Math. 95 (1883), p. 334) „Gewebe".

527) Die doppelte Auffassung eines jeden Gewindes, einmal als Element, das andere Mal als Vertreter der ∞^4 zu ihm involutorischen Gewinde findet sich schon bei *A. Cayley*, Cambridge Phil. Trans. 11/2 (1868), Art. 35, näher erörtert bei *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 369; vgl. auch *M. Pasch*, J. f. Math. 75 (1872), p. 126.

528) Wegen anderer Arten von Liniengeometrien vgl. Nr. 29.

529) *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 366; 5 (1872), p. 258, 262 f.; Vergl. Betr., p. 18; *C. M. Jessop*, Line complex, chap. XIII. Behandlungen der Linien-

Zu allgemeineren Gewindekoordinaten x_r' gelangt man durch Ausübung der linearen Transformation[530])

(3) $$x_r = \sum_{i=1,\ldots,6} \alpha_{ri} p_i \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6;\ \Delta = |\alpha_{ri}| \neq 0).$$

Die x_r sind die mit festen Konstanten multiplizierten Momente des Gewindes (p_i)[514]) in bezug auf die sechs durch die Gleichungen $x_r = 0$ definierten Gewinde X_r. Damit diese *allgemeinen Gewinde-(Komplex-)Koordinaten* ein Strahlgebüsch und damit eine Gerade bestimmen[531]), müssen sie einer quadratischen Bedingungsgleichung $X = 0$ genügen, deren Koeffizienten die Invarianten und bilinearen Simultan-Invarianten der Grundgewinde (*Fundamentalkomplexe*) sind; aus der Form von X kann auf die Art und gegenseitige Lage der Grundkomplexe geschlossen werden[532]).

Neben die Gewindekoordinaten x_r stellen sich sofort die Koordinaten[533])

(4) $$u_r = \frac{\partial X}{\partial x_r},$$

die wieder proportional den mit passenden Konstanten multiplizierten Momenten des Komplexes (x_r) in bezug auf sechs neue Komplexe U_r $(u_r = 0)$ sind. Die quadratische Gleichung $U = 0$, der die u-Koordinaten einer Geraden (eines Strahlgebüsches) genügen, ist mit $X = 0$ identisch.

Sind x_i, u_i und x_i', u_i' die Koordinaten zweier Gewinde, so lautet die Involutionsbedingung

(5) $$\sum x_i u_i' = 0 \quad \text{oder} \quad \sum x_i' u_i = 0.$$

---

geometrie in diesem Sinn gaben *Th. Reye,* J. f. Math. 95 (1883), p. 330—348; *C. Segre,* Mem. Acc. Torino (2) 36 (1885, geschr. 1883), p. 91 f.; Atti Acc. Torino 19 (1883—84), p. 159—186; *G. Fano,* Ann. mat. p. appl. (2) 21 (1893), p. 141—192, mit Literaturangaben. S. auch III AB 4b, *Fano,* Nr. 10.

Nach dem in Nr. 27 erwähnten *Klein*schen Satz ist die Gesamtheit der linearen Punkt- und Ebenentransformationen des Raumes identisch mit jenen linearen Transformationen des Gewinde-R_5, die die M_4^2 in sich selbst transformieren. Vgl. hierzu *A. Voß,* Math. Ann. 13 (1878), p. 354 f.; *Clebsch-Lindemann* 2[1], p. 401—414; *A. Loewy,* Nova Acta 65 (1895), p. 30—39.

530) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p 202.

531) Daß in diesem Fall die x_r proportional seien den mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Momenten der Geraden in bezug auf die ihr in den sechs Gewinden X_r zugeordneten Geraden, wie *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 202, Nr. 4, und p. 367 angegeben, wurde von ihm (Math. Ann. 28 (1887). p. 560 Fußn.) auf Grund einer Mitteilung *Bertinis* zurückgenommen.

532) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 203, 367.

533) Ebenda, p. 367; vgl. auch *K. Zindler,* Liniengeom. 1, § 81.

Daraus folgt, daß jedes Gewinde U_r mit allen Gewinden X_i außer X_r involutorisch liegt und umgekehrt[534]).

Wählt man die sechs Grundgewinde X_r derart, daß sie gegenseitig involutorisch liegen[535]) und ihre Invarianten den Wert eins erhalten (was sich durch die lineare Transformation (3) stets erreichen läßt), so nimmt die Gleichung $X = 0$ die symmetrische Gestalt

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0 \tag{6}$$

an. Die Gewinde U_r und X_r fallen nun zusammen, die Koordinaten u_i und x_i werden gleich und heißen gewöhnlich *Kleinsche Komplex-* bzw. *Linienkoordinaten*[536]). Dieses Koordinatensystem ist invariant gegenüber orthogonalen Transformationen der sechs Größen x_i. Es ist besonders für die Untersuchung der quadratischen Strahlkomplexe von Wichtigkeit[537]). Die Bedingung für das Schneiden zweier benachbarten Geraden lautet $\sum dx_i^2 = 0$ [538]).

---

534) *F. Klein*, a. a. O., p. 369.

535) *R. St. Ball*, Theory of screws, nennt solche sechs Gewinde *korreziprok* und gibt in Nr. 41 an, daß man ein solches System z. B. schon erhält, wenn man jede Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes zur Achse zweier Gewinde mit entgegengesetzt gleichen Parametern wählt.

536) *F. Klein*, Nachr. Ges. Gött. (1869), p. 262; Math. Ann. 2 (1870), p. 203 f. Sollen die Komplexe X_i sämtlich reell sein, so müssen nach dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen die x_i zur Hälfte reell, zur Hälfte rein imaginär sein. Die Gewinde der einen Gruppe sind dann rechts, die der anderen links gewunden. Man gelangt z. B. zu solchen Koordinaten, wenn man

$$p_1 + p_4 = x_1, \quad p_1 - p_4 = x_4\sqrt{-1},$$
$$p_2 + p_5 = x_2, \quad p_2 - p_5 = x_5\sqrt{-1},$$
$$p_3 + p_6 = x_3, \quad p_3 - p_6 = x_6\sqrt{-1}$$

setzt. Vgl. *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 205; *G. Koenigs*, Géom. réglée, Nr. 75. — *R. de Paolis*, Mem. Acc. Lincei (fis. mat. nat.) (4) 1 (1885), p. 205—231, leitet für den Gewinderaum R_5 auf synthetischem Wege (vgl. Nr. 5) Doppelverhältniskoordinaten eines Gewindes in bezug auf sechs Grundgewinde und ein „Einheitsgewinde“ ab und gelangt für involutorische Grundgewinde in § 13 zu einer neuen Deutung der *Klein*schen Koordinaten. Mittels der *Graßmann*schen Methoden behandelt den Gewinderaum *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 272—290, mittels einer eigenen Symbolik *R. Weitzenböck*, Anm. 576. Bezüglich der verschiedenen durch die sechs involutorischen Grundgewinde bestimmten Konfigurationen vgl. III C 10, *Timerding*.

537) *F. Klein*, Nachr. Ges. Gött. (1869), p. 266 f. Diese Koordinaten werden fast ausschließlich in dem Werke: *C. M. Jessop*, Line complex, verwendet.

Deutet man die x_i als Koordinaten eines linearen Kugelkomplexes (Nr. 25), so gelangt man zur Abbildung des Strahlraumes auf den Raum der orientierten Kugeln, die *S. Lie*, Paris C. R. 71 (1870), p. 679—583; Math. Ann. 5 (1872), p. 170 f., entdeckt hat. Vgl. *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys 9 (1898), p. 314;

Gleichungen zwischen den Koordinaten x_i definieren Gewindesysteme[539]).

29. Sonstige Linienkoordinaten. Bezeichnen $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ voneinander unabhängige homogene analytische Funktionen 0ter Dimension der *Klein*schen Koordinaten x_i (Nr. 28), so werden die Werte λ_i, die diese Funktionen für eine bestimmte Gerade des Raumes annehmen, *allgemeine Linienkoordinaten* sein[540]). Von diesen sind bisher wohl nur die den elliptischen Punktkoordinaten (Nr. **12**, bzw. zyklidischen Kugelkoordinaten, Nr. 24) analogen behandelt worden.

Bezeichnen k_i Konstante und λ einen veränderlichen Parameter, so stellen die Gleichungen

$$(1) \qquad \sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0, \quad \sum_1^6 x_i^2 = 0$$

zwischen den *Klein*schen Koordinaten eine Schar von Strahlkomplexen zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche[541]) dar. Die vier Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von λ, die irgend einer Geraden des Raumes (einem Wertesystem x_i) entsprechen (vgl. Nr. **12**, **16**), nennt *F. Klein*[542]) die *elliptischen Koordinaten einer Geraden*[543]) und ver-

---

C. M. Jessop, Line complex, chap. XII, insbes. p. 243. *E. Duporcq,* Bull. Soc. math. France 27 (1899), p. 146 f., verallgemeinert diese Abbildung in der Richtung, daß statt der Kugeln die einer festen Fläche zweiter Ordnung umschriebenen Flächen zweiter Ordnung auftreten; vgl. auch *R. Bricard,* Nouv. Ann. (4) 5 (1905), p. 221—225.

538) *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 293.

539) *Th. Reye,* J. f. Math. 95 (1883), p. 333—348.

540) Die meisten Bemerkungen in Nr. 4 lassen sinngemäße Übertragung zu; statt der drei Flächenscharen treten hier vier Scharen von Strahlkomplexen auf, der Orthogonalität entspricht hier die involutorische Lage (Anm. 542).

541) *F. Klein,* Nachr. Ges. Gött. (1869), p. 276; Math. Ann. 2 (1870), p. 224; 5 (1872), p. 273. *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 245, nennt solche Komplexe *konfokal, R. Sturm,* Liniengeom., 3, Leipzig 1896, p. 34, *kosingulär.* Vgl. auch *Th. Reye*[539]).

542) Nachr. Ges. Gött. (1871), p. 44—49; Math. Ann. 5 (1872), p. 293f.; 28 (1887), p. 554f. Die Parameterwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ bestimmen die vier durch die Gerade gehenden Komplexe der Schar, von denen je zwei involutorisch liegen (vgl. *C. M. Jessop,* a. a. O., Nr. 127). Solche *Involutionssysteme* von Komplexen sind den dreifach orthogonalen Flächensystemen analog (*F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 260, 272).

Von den elliptischen Linienkoordinaten ausgehend, führte *F. Klein,* Math. Ann. 27 (1886), p. 144 ff., *transzendente Linienkoordinaten* ein, die den eingangs Nr. **17** erwähnten Punktkoordinaten analog sind.

wendet sie zum Studium der *Kummer*schen Fläche. Die Beziehungen zwischen den λ_i und x_i stimmen mit den analogen in Nr. **16** überein. Über die Sonderfälle dieser Koordinaten scheinen Untersuchungen zu fehlen.

Faßt man nach *E. Study*[544]) die sechs rechtwinkligen Koordinaten p_{ik} (Nr. 27) eines reellen Gewindes mittels der Einheiten 1 und ε, für welch letztere $\varepsilon^2 = 0$ sein soll (vgl. I A 4, *Study*, Nr. 9), zu den drei reellen *dualen* Zahlen

$$(2) \qquad X_1 = p_{14} + p_{23}\varepsilon, \quad X_2 = p_{24} + p_{31}\varepsilon, \quad X_3 = p_{34} + p_{12}\varepsilon$$

zusammen und multipliziert diese mit einer beliebigen reellen dualen Zahl $\varrho = \sigma + \tau\varepsilon$ $(\sigma \neq 0)$, so stellen die Bestandteile der neuen Größen die Koordinaten eines koaxialen Gewindes oder Liniengebüsches dar. Sieht man also die dualen Zahlen X_1, X_2, X_3 als Verhältnisgrößen in dem Sinne an, daß eine gleichzeitige Multiplikation dieser Zahlen mit einer dualen Zahl ϱ gestattet wird, so können sie als ein System von Strahlkoordinaten[545]) aufgefaßt werden, indem sie das ganze Büschel koaxialer Gewinde, mithin auch dessen *Achse* bestimmen. Unter Verwendung dieser *dualen Strahlkoordinaten* findet eine weitgehende Analogie zwischen der Geometrie im Bündel und der Liniengeometrie statt[546]). Jede lineare Transformation

$$(3) \qquad X_i' = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

---

543) *E. Study*, Geom. d. Dynamen, § 38, führt „elliptische Koordinaten" ganz anderer Art für die Strahlen gewisser Kongruenzen ein.

544) a. a. O., p. 200f.; Ber. Ges. Leipzig 51 (1899), p. 31. Ähnliche Untersuchungen stellten an: *A. P. Kotjelnikoff*, Schraubenrechnung u. einige Anw. derselben auf Geom. u. Mechanik, Kasan 1895—96; Nachr. phys.-math. Ges. Kasan (2) 8 (1899), Nr. 2, 3, 4; 9 (1899), Nr. 1, 2 (beides russisch; Inhaltsang. s. Jahrb. Fortschr. Math.); *D. N. Seiliger*, Kasan Univ. (1897), p. 93—108; *R. de Saussure*, Amer. J. math. 18 (1896), p. 304—346; 19 (1897), p. 329—370 [vgl. hierin insbesondere die p. 341—349 besprochenen Koordinatensysteme im Strahlraum, die solchen auf der Kugel analog sind]; Paris C. R. 123 (1896), p. 734—737; Bull. Amer. math. Soc. 3 (1897), p. 81—86; *J. Petersen*, Overs. Selsk. Forh. Kjöbenh. (1898), p. 283—349. — Vgl. auch *R. W. H. T. Hudson*, The Messenger Math. 31 (1901/2), p. 157; 32 (1902/3), p. 31—36.

545) *E. Study* nennt das durch $X_1 : X_2 : X_3$ bestimmte Gebilde *Strahl* zum Unterschied von der geraden Linie, weil im imaginären Gebiet diese Koordinaten zu andern Erweiterungen des Begriffes führen als die *Plücker*schen Linienkoordinaten. Aber auch die Vorstellung des reellen eigentlichen „Strahles" als Träger eines Normalennetzes weicht von der der geraden Linie in der projektiven Geometrie ab.

546) *E. Study*, Geom d. Dynamen, § 23. Vgl. auch *E. Müller*, Arch. Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 104—118.

z. B., deren duale Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ik}$ die Bedingungsgleichungen für eine orthogonale Transformation im Bündel (Nr. **37**) erfüllen, stellt die allgemeinste räumliche Bewegung dar[547]). Die durch die Gruppe der Transformationen (3) mit beliebigen dualen Koeffizienten definierte *Geometrie der dualen Projektivitäten* (vgl. III AB 4b, *Fano*, Nr. **17**—**19**) ist von der projektiven Liniengeometrie gänzlich verschieden[548]).

Bestimmt man einen eigentlichen Strahl (in *Study*scher Bedeutung) durch die Koordinaten p_{ik} und definiert dessen stetige Änderung durch die stetige Änderung der p_{ik}, so erhält man kein *reguläres Kontinuum* im *Study*schen Sinne, nämlich keines, das sich umkehrbar eindeutig und stetig auf ein abgeschlossenes, im projektiven Punktkontinuum verlaufendes Punktkontinuum abbilden läßt[549]). Um ein solches zu erhalten, führt *E. Study*[550]) als eine zweite Art von Strahlkoordinaten die sechs Größen

$$\mathfrak{X}_1 = p_{12}, \quad \mathfrak{X}_2 = p_{13}, \quad \mathfrak{X}_3 = p_{14},$$

$$\mathfrak{X}_{11} = \begin{vmatrix} p_{13} & p_{42} \\ p_{14} & p_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{X}_{22} = \begin{vmatrix} p_{14} & p_{23} \\ p_{12} & p_{34} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{X}_{33} = \begin{vmatrix} p_{12} & p_{34} \\ p_{13} & p_{42} \end{vmatrix} \tag{4}$$

ein, zwischen denen die Identität

$$\sum_{1}^{3} \mathfrak{X}_k \mathfrak{X}_{kk} = 0 \tag{5}$$

besteht und die mit den Größen $\varrho \mathfrak{X}_k$ und $\varrho^2 \mathfrak{X}_{kk}$ als äquivalent anzusehen sind. Die uneigentlichen Elemente dieses Kontinuums, die *Punktstrahlen*, können den unendlichfernen Punkten gleichgesetzt werden[551]).

---

547) *E. Study*, a. a. O., p. 219f.

548) Durch diese Transformation wird z. B. das Normalennetz eines eigentlichen Strahls immer wieder in ein solches übergeführt. Zur Orientierung über diese Disziplin sowie über die Möglichkeit anderer Erweiterungen der gewöhnlichen Liniengeometrie vgl. *E. Study*, Jahresber. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 97—123, 313—340, ferner das ausführliche Referat von *E. Müller*, Arch. Math. Phys. (3) 9 (1905), p. 81—90.

549) Geom. d. Dynamen, p. 260 Fußn.

550) a. a. O., p. 558. Dieser Vorgang dürfte vorbildlich für die Untersuchung andrer Elementmannigfaltigkeiten, besonders für die Definition der uneigentlichen Elemente einer solchen werden. — Wegen einer weiteren Art von Strahlkoordinaten, durch die ein zweites natürliches Strahlkontinuum erklärt wird, s. ebenda, p. 267 f. Vgl. auch III AB 4b, *Fano*, Nr. 18.

551) a. a. O., p. 261.

An *E. Studys* Untersuchungen schließen die Arbeiten an: *E. Davis*, Die geom. Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie, Diss. Greifswald 1904; *J. Coolidge*, Die dual-projektive Geometrie im elliptischen u. sphärischen Raume, Diss. Bonn (Greifswald 1904); *H. Beck*, Die Strahlenketten im hyperbolischen

Vier homogene duale Zahlen bestimmen eindeutig die Lage eines starren Körpers (eines *Soma*) im R_3. Diese *Somenkoordinaten* bilden ein neues, Erfolg versprechendes Mittel zu kinematischen Untersuchungen[552].

Andere Koordinaten von Geraden verwenden oder erwähnen gelegentlich *E. Waelsch*[553], *E. v. Weber*[554], *K. Zindler*[555], *J. Grünwald*[554].

30. R_s-Koordinaten im R_n. Koordinaten von Kreisen und Punktepaaren im R_3. Schon 1844 hat *H. Graßmann*[556] die Linienkoordinaten nur als einen Sonderfall der Koordinaten linearer Gebilde in einem mehrdimensionalen Raum aufgefaßt. Sind $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ r nicht demselben R_{r-2} angehörige Punkte eines R_{n-1}, $x_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ deren lineare homogene Koordinaten, so nennt er die $(n)_r$ Deter-

---

Raum, Diss. Bonn (Hannover 1905). — Betreffs der Liniengeometrie in nichteuklidischen Räumen vgl. auch *F. Lindemann*, Math. Ann. 7 (1874), p. 56—144.

552) *E. Study*, a. a. O., p. 556 f.; III AB 4b, *Fano*, Nr. 20.

553) Sitzungsb. Ak. (math. nat.) Wien 112²ᵃ (1903), p. 1539; vgl. auch Anm. 294.

554) Ber. Ges. Leipzig 55 (1903), p. 385; Ber. Ak. München 34 (1904), p. 447; Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 217. Ist $Ux + Vy + Wz + T = 0$, mit $U^2 + V^2 + W^2 = 0$, die Gleichung einer Minimalebene (Nr. 3), so kann man ihr einen *Speer*, nämlich die reelle orientierte Trägergerade der Ebene eindeutig zuweisen. U, V, W, T können dann als homogene Koordinaten dieses Speeres gedeutet werden. *J. Grünwald*, Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 105 f., stellt jede Minimalebene und damit jeden Speer des euklidischen Raumes durch eine komplexe duale Zahl $w = u + \varepsilon v$ dar, indem er

$$T : U : V : W = -v : \frac{u^2 - 1}{2}\sqrt{-1} : \frac{u^2 + 1}{2} : u\sqrt{-1}$$

setzt. — Die Anwendung der Quaternionentheorie auf Liniengeometrie, zumal zur Behandlung der Strahlgewinde, zeigt *A. Buchheim*, The Messenger Math. 12 (1882/3), p. 129—133; 13 (1883/4), p. 120—124.

555) Liniengeom. 2, p. 67 f.; Jahresber. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 190 f. Auf einer orientierten Geraden S_0 werde der Ursprung O und durch sie die feste Ebene ξ gewählt. Als *natürliche Zeiger* eines Strahles S dienen der Winkel $\omega = \widehat{S_0 S}$, die Länge a des Gemeinlotes zwischen S_0 und S, der Neigungswinkel α dieses Lotes gegen ξ und der Abstand z des Lotfußpunktes auf S_0 von O. Alle Regelflächen, die sich längs S_0 berühren, bestimmen eine *Fortschreitungsrichtung* im Linienraum. Werden z, a, α, ω als Funktionen eines Parameters t gewählt, wobei S_0 dem Werte $t = 0$ entspricht, so ist $P = \lim \frac{a}{\omega}$ (für $t = 0$) der *Verteilungsparameter* der Regelfläche in S_0. z, α, P sind die *Zeiger einer Fortschreitungsrichtung.* Denselben Dienst wie diese leisten die Koordinaten der Korrelationen, welche die durch S_0 gelegten Regelflächen auf S_0 bestimmen; vgl. *G. Koenigs*[669].

556) Ausdehnungsl. § 88, 116 = Ges. W. 1¹, p. 152, 191 f.

minanten $p_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ der Matrix

(1) $$\left\| x_i^{(k)} \right\|_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ k=1,2,\ldots,r}}$$

die Koordinaten (Zeiger) des durch die r Punkte legbaren R_{r-1}.[557]) Die $(n)_r - 1 - r(n-r)$ unabhängigen Gleichungen, die zwischen $(n)_r$ Zahlen bestehen müssen, damit sie als Koordinaten eines R_{r-1} in einem R_{n-1} (eines Gebietes r^{ter} Stufe in einem Gebiete n^{ter} Stufe) betrachtet werden dürfen, hat *Graßmann*, angeregt durch einen Aufsatz *Th. Reyes*[558]), erst 1878 aufzusuchen gelehrt[559]).

Das erste mehrfach verwendete Beispiel für diese Verallgemeinerung der *Plücker*schen Linienkoordinaten bilden die *Koordinaten von Kreisen im Raume*[560]). Bezeichnen x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ die pentasphärischen Koordinaten (Nr. 24) der Kugeln x bzw. y, so führte *C. Stephanos*[561]) 1881 die zehn Determinanten p_{ik} der Matrix

(2) $$\left\| \begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix} \right\|_{i=1,2,\ldots,5}$$

als *homogene Koordinaten* des durch x und y bestimmten Kugelbüschels

---

557) Vgl. auch *A. Clebsch*, Gött. gel. Anz. (1869), p. 1575; Abh. Ges. Gött. 17 (1872), math. Cl., p. 5f.; Math. Ann. 5 (1872), p. 428f.

558) J. f. Math. 82 (1877), p. 9.

559) J. f. Math. 84 (1878), p. 281f. = Ges. W. 2^1, p. 291f. Auf anderem Wege leitete diese Gleichungen *K. Th. Vahlen*, J. f. Math. 112 (1893), p. 306—310, ab. — *E. Study*, Nachträge zu 1^2 d. ges. Werke von *H. Graßmann*, Leipzig 1898, p. 510f., und *E. Pascal*, Ann. mat. p. appl. (2) 24 (1896), p. 241—253, zeigten auf verschiedenen Wegen, daß sich diese Gleichungen immer auf quadratische zurückführen lassen; diese quadratischen Relationen wurden übrigens schon von *E. d'Ovidio*, Atti Acc. Torino 12 (1876), p. 349, und für den Sonderfall $n = 6$, $r = 3$ von *A. Cayley*, The Quart. J. p. appl. math. 15 (1878), p. 55—57, aufgestellt. Vgl. auch *E. Pascal*, Die Determinanten, deutsch von *H. Leitzmann*, p. 121f.

560) Wegen Untersuchungen über Systeme von ∞^1 Kreisen (*zyklische Flächen*) vgl. III D 5, *v. Lilienthal*, Nr. 4. Besonders sei auf *G. Demartres*, Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 123—182; 4 (1887), p. 145—158, u. *E. Cosserat*, Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace, Thèse, Paris 1889, hingewiesen. Bezüglich der Systeme von ∞^2 Kreisen (*Kreiskongruenzen*) s. *G. Darboux*, Leçons 2, p. 314—345; Systèmes orth. 1, p. 181; *L. Bianchi*, Vorl. üb. Differentialgeometrie, deutsch von *M. Lukat*, Leipzig 1899, Kap. 13; mit ihrer Untersuchung hat sich insbesondere *A. Ribaucour* in mehreren Arbeiten beschäftigt; vgl. Paris C. R. 76 (1873), p. 478, 830; 92 (1881), p. 233; 113 (1891), p. 304, 324. Systeme von ∞^{n-1} Kreisen im R_n, die von ∞^1 M_{n-1} orthogonal geschnitten werden, untersucht *U. Sbrana*, Rend. Circ. mat. Palermo 19 (1905), p. 258—290. Als Koordinaten eines Kreises verwendet er die rechtwinkligen Koordinaten des Mittelpunktes, den Radius und die Richtungskosinus zweier normalen Halbstrahlen in der Kreisebene.

561) Paris C. R. 93 (1881), p. 578, 633.

oder ihres *Schnittkreises* ein[562]), betrachtet also den Kreis als R_1 in einem R_4[563]). Zwischen diesen Koordinaten bestehen fünf Gleichungen der Form

$$(3) \qquad \Omega_\alpha \equiv p_{\beta\gamma} p_{\delta\varepsilon} + p_{\gamma\delta} p_{\beta\varepsilon} + p_{\delta\beta} p_{\gamma\varepsilon} = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die Zahlen $1, 2, \ldots, 5$ in irgend einer Anordnung bezeichnen. Von diesen Gleichungen sind nur drei voneinander unabhängig[564]).

Es gibt fünf Kreise, deren Koordinaten sechs voneinander unabhängen linearen Gleichungen genügen. Daraus folgt, daß zu vier gegebenen Kreisen immer ein fünfter gehört, dessen Koordinaten sich linear durch die der gegebenen ausdrücken lassen. Solche fünf Kreise nennt *C. Stephanos*[561]) einen *Pentazyklus* („pentacycle") und teilt die Konstruktion des fünften aus vier gegebenen mit. Seine Sätze wurden von *G. Koenigs*[565]) und *O. Landsberg*[566]) bewiesen und die Untersuchung nach verschiedenen Richtungen weitergeführt[567]). *Koenigs* studiert insbesondere das Kreissystem A_5, das eine lineare Gleichung

$$(4) \qquad \sum a_{ik} p_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 5;\ i \neq k)$$

---

562) *E. v. Weber*, Arch. Math. Phys. (3) 7 (1904), p. 288f., benutzt diese Koordinaten zur Untersuchung der gegenüber den konformen Punkttransformationen des Raumes invarianten Eigenschaften der Figur zweier Kreise; er führt auch p. 293 die *Koordinaten eines Zyklus* (orientierten Kreises) ein. — Wegen Koordinaten linearer Kugelgebilde vgl. auch *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 19 (1886), p. 614—619, 698—703.

Die Kugeln eines Gebüsches lassen sich durch vier homogene Koordinaten (Nr. **24**), dessen Kreise daher durch sechs den *Plücker*schen Linienkoordinaten völlig analoge Koordinaten p_{ik} festlegen. Die Sätze der Liniengeometrie sind daher auf die Kreisgeometrie im Gebüsch übertragbar; vgl. *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 7 (1896), p. 78. *G. Darboux* (vgl. etwa Leçons 3, Nr. 846, 847) hat für diesen Übergang eine geometrische Transformation angegeben.

563) *W. Spottiswoode*, Paris C. R. 76 (1873), p. 1191, hat die mit obigen Kreiskoordinaten formal übereinstimmenden Koordinaten von Geraden und Ebenen im R_4 definiert und die Bedingungsgleichungen (3) aufgestellt.

564) *W. H. Young*, Atti Acc. Torino 34 (1899), p. 596—599, untersucht die Syzygien der verschiedenen Arten, die zwischen den Ω_α bestehen.

565) Ann. Fac. sc. Toulouse 2 (1888), p. F1—F19.

566) Untersuchung über die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit. Diss. Breslau 1889, p. 17—22.

567) Auch die Ergebnisse der fast gleichzeitigen Untersuchungen von *C. Segre* über den R_4 (vgl. etwa Rend. Circ. mat. Palermo 2 (1888), p. 45—52) wären hier zu erwähnen, da sie sich auf das in Rede stehende Gebiet unmittelbar übertragen lassen, indem man „Gerade" und „Ebene" durch „Kreis" bzw. „Punktepaar" ersetzt. S. auch *E. Müller,* Sitzungsb. Ak. (math. nat.) Wien 118^{2a} (1909), p. 1059—68.

definiert[568]). Die in gerade Linien ausartenden Kreise dieses Systems bilden ein Strahlgewinde (Nr. 27). Wie *E. Cosserat*[569]) bemerkt hat, besteht Λ_5 aus allen Kreisen, die durch die Schnittpunktepaare der Strahlen eines Gewindes mit einer bestimmten Kugel (*Zentralkugel*) gehen. Derselbe Verfasser hat auch die durch 2, 3, 4 und 5 lineare Gleichungen zwischen den p_{ik} definierten Kreissysteme Λ_4, Λ_3, Λ_2, Λ_1 näher untersucht[570]).

Gleichberechtigt neben den Koordinaten eines Kreises treten die des Punktepaares (Kugelbündels) auf, als des dualen Gebildes im Kugelraum. Bezeichnen u_i, v_i die pentasphärischen Koordinaten zweier Kugelgebüsche u und v (Nr. 24), so sind die zehn Determinanten $\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$ die homogenen Koordinaten des u und v gemeinsamen Kugelbündels oder dessen Schnittpunktepaares. Obige Bemerkungen über die Koordinaten p_{ik} lassen sich unmittelbar auf die π_{ik} übertragen. Eine lineare Gleichung zwischen den π_{ik} definiert ein Punktepaarsystem, bestehend aus allen Punktepaaren, die auf den Kreisen eines linearen Kreiskomplexes liegen, der einem bestimmten Kugelgebüsch, dem *Hauptgebüsch*, angehört[571]).

Die Gleichung

$$\sum \pi_{ik} p_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 5)$$

stellt ein lineares Kreissystem oder ein lineares Punktepaarsystem dar, je nachdem die π_{ik} oder p_{ik} als beliebige Konstante betrachtet werden. Die Koeffizienten π_{ik} bzw. p_{ik}, für die nicht $\pi_{ik} = -\pi_{ki}$ oder $p_{ik} = -p_{ki}$ zu sein braucht, heißen die *Koordinaten dieser Systeme*. Der Kreis erscheint als Vertreter eines *speziellen Punktepaarsystems*, dessen Punktepaare mit dem Kreis auf Kugeln liegen, und das Punktepaar als Vertreter eines *speziellen Kreissystems*, dessen Kreise mit dem Punktepaar auf Kugeln liegen. Besteht zwischen einem linearen Kreissystem (π_{ik}) und einem linearen Punktepaarsystem (p_{ik}) die Gleichung $\sum \pi_{ik} p_{ik} = 0$, so heißen sie *apolar*[572]). Zu neun voneinander unabhängigen solchen Kreissystemen gibt es ein einziges apolares Punktepaarsystem.

568) Seine Haupteigenschaft besteht darin, daß alle auf einer beliebigen Kugel k liegenden Kreise des Systems zu einer Kugel k' (der zu k *konjugierten*) orthogonal sind. Die Beziehung zwischen k und k' ist jedoch nicht umkehrbar, vielmehr stehen alle Kugeln k' zu einer Kugel, der *Zentral-* oder *Hauptkugel* des Systems Λ_5, senkrecht, deren pentasphärische Koordinaten die aus den a_{ik} gebildeten Größen Ω_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, 5$) sind.

569) Paris C. R. 106 (1888), p. 1467—70; Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace, Thèse, Paris 1889, insbes. p. 56 f., = Ann. Fac. sc. Toulouse 3 (1889), p. E1—E81.

570) Vgl. auch *Mesuret*, Paris C. R. 136 (1903), p. 1126, 1302.

571) *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 7 (1896), p. 84.

Die Gesamtheit der linearen Kreissysteme bildet einen R_9, worin die R_3 als die Punktepaarsysteme zu betrachten sind. In jedem R_3 solcher Kreissysteme gibt es immer *fünf spezielle Systeme (Kreise).* Die Kreisgeometrie des Raumes ist bei dieser Auffassung identisch mit der projektiven Geometrie eines R_9 unter Auszeichnung einer M_6^5.[573])

Die p_{ik} und π_{ik} lassen sich nach *E. Müller*[574]) in der Nr. 25 erwähnten niederen Geometrie orientierter Kugeln auch als Koordinaten *orientierter Drehkegel* und *orientierter Ebenenpaare* deuten. Man gelangt dadurch zu einem dualen Gegenstück der obigen Geometrie.

In einem R_5 sind die 15 R_1-Koordinaten p_{ik} (mit sechs Bedingungsgleichungen), die 20 R_2-Koordinaten p_{ijk} (mit zehn Bedingungsgleichungen) und ihre dualen Koordinaten zu betrachten[575]). Ein wichtiges Anwendungsgebiet hierfür bildet der Raum der Strahlgewinde (Nr. 28), in dem sich die p_{ik} und p_{ijk} als Koordinaten eines Strahlnetzes bzw. einer Regelschar deuten lassen[576]). Als andere Anwendungsgebiete wären die R_5 der linearen Kugelkomplexe (Nr. 25) und der Kegelschnitte einer Ebene (Nr. 26) zu erwähnen[577]). Eingehendere Untersuchungen darüber fehlen.

Auch die Koordinaten der linearen Mannigfaltigkeiten algebraischer Flächen n^{ter} Ordnung, also z. B. die Koordinaten der Schnittkurve zweier und der Schnittpunktgruppe dreier Flächen gleicher Ordnung als Determinanten der Matrix aus den Koordinaten zweier oder dreier Flächen, sowie die analogen Begriffe in der Ebene und Geraden haben bisher wenig Beachtung gefunden[578]).

---

572) *E. Müller*, a. a. O., p. 87.

573) *G. Koenigs*, a. a. O., p. F3; *E. Müller*, a. a. O., § 5.

574) Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 298—301.

575) *O. Landsberg*, a. a. O., p. 22—67. Die beiden Hauptsätze für den R_5 lauten: 1) 8 lin. R_1-Systeme haben 14 R_1 gemeinsam; 2) 9 lin. R_2-Systeme haben 42 R_2 gemeinsam. Diese Zahlen hat auch *H. Schubert*, Acta math. 8 (1886), p. 97—118, gefunden.

576) *M. Pasch*, J. f. Math. 75 (1872), p. 129, 139; *O. Landsberg*, a. a. O., p. 75—81; *K. Zindler*, Liniengeom. 1, § 86. *R. Weitzenböck*, Komplex-Symbolik. Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume. Leipzig 1908, p. 43, 48, 178—181. Beachtenswerte Anfänge zu einer Geometrie der Strahlnetze finden sich bei *E. d'Ovidio*, Ann. mat. p. appl. (2) 7 (1875/6), p. 38—51.

577) Bezüglich des letzteren vgl. *O. Landsberg*, a. a. O., p. 70—74. Wegen Analogien mit der Liniengeometrie des R_3 vgl. *E. Beltrami*, G. mat. 9 (1871), p. 344 = Opere mat. 2, p. 186 f.; *L. Cremona*, G. mat. 10 (1872), p. 47 f. Vgl. auch Anm. 474. — Das System der Kegelschnitte im Raum betrachtet *M. Chasles*, Paris C. R., 61 (1865), p. 389; *G. Halphen*, Bull. Soc. math. France 2 (1873/4), p. 11 f.; wegen deren Koordinaten vgl. *W. Spottiswoode*, Proc. London math. Soc. 10 (1879), p. 185—196 (samt Bemerkung von *A. Cayley*), und wegen Koordinaten ebener algebraischer Kurven im Raume *H. W. L. Tanner*, ebenda 13 (1882), p. 125—148.

Wird, wie es in der Infinitesimalgeometrie häufig geschieht, ein System von ∞^n Raumkurven durch zwei, n Parameter $p_1, p_2, \ldots, p_n$ enthaltende Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten

$$(5) \quad f_1(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad f_2(x, y, z, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0$$

definiert, so dienen die Werte dieser Parameter als Koordinaten der einzelnen Kurven[579]). Für $n = 3$ bilden die Kurven einen *Komplex*[580]), für $n = 2$ eine *Kongruenz*[581]). Sind die Gleichungen (5) in x, y, z linear, so stellen die p_i Strahlkoordinaten dar[582]).

IV. Koordinaten von Gebilden auf einer Kurve oder Fläche (in einer nichtlinearen Mannigfaltigkeit).

31. Allgemeines. Sind die homogenen linearen Koordinaten x_i eines Punktes der Ebene oder des Raumes als Funktionen eines Parameters t gegeben (Nr. 2, 3), so gehören die den verschiedenen Werten von t entsprechenden Punkte einer ebenen oder räumlichen Kurve an, und t kann als *Koordinate eines Punktes* (oder einer Punktgruppe) *dieser Kurve* gelten[583]).

Für eine rationale Kurve, d. h. wenn die x_i als ganze rationale Funktionen eines Parameters λ gegeben sind, läßt sich stets ein neuer Parameter t so einführen, daß die Kurvenpunkte und die Werte von t einander eineindeutig entsprechen[584]). Die Untersuchung der Punkt-

578) *Th. Reye,* J. f. Math. 82 (1877), p. 9f.

579) *G. Koenigs*, Paris C. R. 104 (1887), p. 842—844; Acta math. 10 (1887), p. 313—338; *E. Cosserat,* Paris C. R. 107 (1888), p. 653; Thèse, Anm. 560, p. 13f.

580) *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 151f. — Betrachtet man p_1, p_2, p_3 als rechtwinklige Punktkoordinaten X, Y, Z eines zweiten Raumes, so bestimmen die Gleichungen (5) eine Berührungstransformation der beiden Räume, durch die den Punkten des einen Raumes die Kurven eines Komplexes des andern Raumes entsprechen (ebenda p. 155).

581) *G. Darboux,* Leçons 2, livre IV; *L. Bianchi*[560]), p. 339; *L. P. Eisenhart*[117a]).

582) *S. Lie*, a. a. O., p. 164f. — Die speziellen Gleichungen

$$x + Zz - (X + iY) = 0, \quad y - (X - iY)z - Z = 0$$

(vgl. Anm. 580) stellen die *Lie*sche Transformation von Geraden in Kugeln (Anm. 537) dar (ebenda p. 167).

583) t läßt natürlich sehr häufig mannigfaltige geometrische Deutungen zu. — Der Kurvenbegriff ist durch den allgemeineren Begriff einer *Element*-M_1 ersetzbar; vgl. *W. K. Clifford*, On the classification of loci, Phil. Trans. R. Soc. London 169 (1878), p. 663—681 = Math. pap., p. 305—331; *C. Segre*, Introd. alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, Ann. mat. p. appl. (2) 22 (1894), p. 41.

584) *J. Lüroth*, Math. Ann. 9 (1875), p. 163—165; *C. Segre*, a. a. O., Nr. 5, 24; *P. Appell* u. *É. Goursat,* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales,

gruppen und Korrespondenzen auf diesen Kurven mittels der Koordinate t oder der homogenen Koordinaten t_1, t_2 wird identisch mit der Geometrie auf der geraden Linie[585]), für welche verschiedene Koordinatensysteme im vorhergehenden erwähnt wurden. Die einfachsten Beispiele bilden die Kegelschnitte, die Raumkurven dritter Ordnung, allgemein die Normkurven der R_n[586]).

Wegen der Koordinaten (und Geometrie) auf beliebigen algebraischen Kurven (bzw. M_1 im R_n[587])) vgl. II B 2, *Wirtinger*, Nr. **26**; III AB 4a, *Fano*, Nr. **32**; III C 4, *Berzolari*, Abschnitt IV; III C 8, *Rohn*.

Sind die homogenen linearen Koordinaten x_i eines Raumpunktes als Funktionen zweier Parameter u, v gegeben, so gehören die den Wertepaaren u, v entsprechenden Punkte einer Fläche an (Nr. **3**), und es können u, v als (*Gauß*sche) *Koordinaten eines Punktes* (oder einer *Punktgruppe*) *auf der Fläche* gelten[588]). $f(u, v) = 0$ definiert eine Kurve auf der Fläche. Bezüglich der zahlreichen zur analytischen Behandlung der Geometrie auf beliebigen krummen Flächen verwendeten Koordinatensysteme sei auf die betreffenden Artikel[588]) verwiesen.

Lassen sich die x_i als ganze rationale Funktionen von u und v darstellen, so heißt die Fläche *rational*; sie ist eineindeutig auf die Ebene abbildbar[589]). Den verschiedenen Koordinatensystemen in der Ebene entsprechen solche auf den rationalen Flächen. Die einfachsten Beispiele hierfür bilden die Flächen zweiter Ordnung (Nr. **33**), insbesondere die Kugel (Nr. **32**).

Paris 1895, p. 288f.; *F. Enriques*, Rend. Circ. mat. Palermo 10 (1896), p 30—35; *H. Weber*, Lehrb. der Algebra 2, Braunschweig 1896, p. 404f.; *E. Bertini*, Introd. alla geom. proiettiva degli iperspazi etc., Pisa 1907, p. 270f.

585) *F. Klein*, Vergl. Betr., p. 14. Mit den rationalen Kurven, deren erste Untersuchung auf *Möbius* zurückgeht, beschäftigt sich eingehend *W. Fr. Meyer*, Apolarität, wo auch Literatur angegeben.

586) Vgl. Nr. **11**, ferner *W. K. Clifford*[583]). Zur Parameterbestimmung auf Kurven zweiter und dritter Ordnung s. *C. Juel*, Math. Ann. 47 (1896), p. 72—104; III C 5, *Kohn*, Nr. **21**, **36**, **44**.

587) Als M_1 in einem R_5 ist auch eine Regelfläche zu betrachten. Die homogenen Koordinaten x_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ einer Erzeugenden stellen sich als algebraische Funktionen eines Parameters oder als ganze rationale Funktionen zweier Parameter dar, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht. Vgl. *J. Lüroth*, J. f. Math. 67 (1867), p. 138f.

588) Vgl. III AB 2, *v. Mangoldt*, Nr. **12**, insbes. Anm. 61; III AB 4a, *Fano*, Nr. **32**; III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. **34**; III D 3, *v. Lilienthal*, Nr. **4**, **21**f.

589) *G. Castelnuovo*, Math. Ann. 44 (1894), p. 155 (auch Rend. Acc. Lincei Roma (5) II_2 (1893), p. 205—209); *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, ebenda 48 (1897), p. 314; I B 1c, *Landsberg*, Nr. **22**.

Wegen Koordinaten auf andern algebraischen Flächen siehe III C 6, *Castelnuovo* und *Enriques*.

Sind allgemein die linearen homogenen Koordinaten

$$x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

eines Elementes im R_n als Funktionen von r wesentlichen Parametern $t_1, t_2, \ldots, t_r$ gegeben, so gehören die den verschiedenen Parameterwerten entsprechenden Elemente einer M_r an, und $t_1, t_2, \ldots, t_r$ können als Koordinaten eines Elementes dieser M_r gelten[590]). Dies läßt sich z. B. zur Koordinatenbestimmung in Strahlkongruenzen und Strahlkomplexen verwerten[591]).

32. Koordinaten auf der Kugelfläche (Sphärische Koordinaten)[592]). Obgleich solche Koordinaten in der Astronomie zur Bestimmung eines Ortes auf der scheinbaren Himmelskugel schon in alten Zeiten angewandt wurden[593]), dürfte der erste Versuch, Kurven auf der Kugel durch Gleichungen zwischen sphärischen Koordinaten eines Punktes zu definieren, von *J. Skene*[594]) (1796) herrühren. Die hierbei verwendeten Koordinaten entsprechen der geographischen Länge und Breite[595]).

---

590) Ein Beispiel hierzu behandelt schon *N. Druckenmüller*, Übertragungsprinzipien, p. 241 f., der in dem System der r^{ten} Polaren der Punkte einer Ebene bezüglich einer festen algebraischen Kurve als Koordinaten einer Polaren die Parallelkoordinaten ihres Poles wählt.

591) Auf die Geometrie im Strahlnetz weist schon *J. Plücker*, Neue Geom. d. R., p. 83, hin. Bezüglich des Strahlgewindes und Strahlnetzes vgl. *K. Zindler*, Liniengeom. 1, § 55, 60; bezüglich der allgemeinen Strahlkongruenzen und Strahlkomplexe ebenda 2, p. 75 f., 180 f.

592) Wegen Literatur über die Geometrie auf der Kugel s. *R. Baltzer*, Die Elemente der Mathematik 2, 4. Aufl., Leipzig 1874, p. 164—182, 312—333; *Tropfke*, 2, p. 251 f.; *R. Heger*, Anal. Geom. auf der Kugel, Leipzig 1908 (Samml. Schubert, LIV), p. V—VII.

593) *Tropfke* 2, p. 407; *S. Günther*, Geschichte der Mathematik 1, Leipzig 1908, p. 117 f.

594) Er beantwortete in The Gentlemans Diary, London 1796, die im Jahrgang 1795 von *Th. White* gestellte Frage nach der Gleichung einer sphärischen Kurve. Vgl. die historischen Bemerkungen von *Th. St. Davies*, Trans. R. Soc. Edinburg 12 (1834, gel. 1832), Note E, p. 361 f. u. Vorrede p. 259—270.

595) Wählt man auf einem Hauptkreis einen Anfangspunkt A und einen positiven Sinn und fällt aus einem Punkt P der Kugel das sphärische Lot PQ auf jenen Hauptkreis, so nennt man die Bogen $\widehat{AQ} = \vartheta$, $\widehat{QP} = \eta$ die *rechtwinkligen sphärischen Koordinaten* von P; Azimut und Höhe, Rektaszension und Deklination, Länge und Breite eines Gestirns sind solche Koordinaten. Bezeichnet φ den Neigungswinkel des Hauptkreises AP gegen den gegebenen und ist $\varrho = \widehat{AP}$, so heißen ϱ, φ die *sphärischen Polarkoordinaten* des Punktes P. Sie verwendet z. B. *J. Casey*, London Phil. Trans. 161 (1871), p. 602.

Um 1830 herum haben *C. Gudermann* und *Th. St. Davies* unabhängig voneinander die analytische Geometrie auf der Kugel systematisch bearbeitet.

Sind OX, OY zwei unter dem Winkel ω gegeneinander geneigte orientierte Quadranten auf der Kugel (die beiden *Achsen*) und schneiden die durch den Punkt P und die Punkte Y und X gelegten Hauptkreise auf jenen Achsen bzw. die Stücke $\widehat{OM} = x$ und $\widehat{ON} = y$ ab (Fig. 6), so nennt *C. Gudermann*[596]) $a = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{tg} y$ die *Achsenkoordinaten* des Punktes P. Wegen

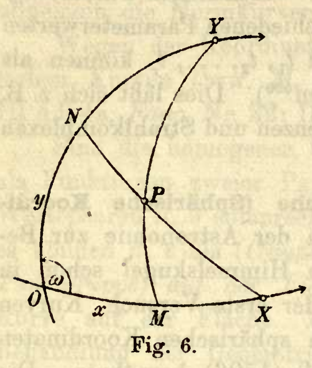


Fig. 6.

$$(1)\quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin \widehat{OM}}{\sin \widehat{MX}}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{\sin \widehat{ON}}{\sin \widehat{NY}}$$

sind diese Koordinaten für das Strahlbündel, das die Punkte der Kugelfläche vom Zentrum aus projiziert[597]), oder für die Kugel selbst Doppelverhältniskoordinaten (Nr. 5); der Einheitspunkt auf der Kugel ist der Schnittpunkt der Hauptkreise, welche die Mitten von $\widehat{OX}$ und $\widehat{OY}$ mit Y bzw. X verbinden.

Projiziert man die Kugel aus ihrer Mitte auf die Tangentialebene des Punktes O, so sind die *Gudermann*schen Achsenkoordinaten eines Kugelpunktes identisch mit den Parallelkoordinaten seiner Projektion in bezug auf das von den Tangenten der sphärischen Achsen in O

---

596) Grundriß der analytischen Sphärik, Köln 1830; J. f. Math. 6 (1830), p. 244—254; 11 (1834), p. 394—398. Dieselben Koordinaten benutzen zu verschiedenen analytischen Untersuchungen auf der Kugel *Vannson*, Nouv. Ann. (1) 17—20 (1858—61); *Heilermann*, Zeitschr. Math. Phys. 6 (1861), p. 153—181. — *Gudermann* verwendet zuweilen auch die sphärischen Polarkoordinaten (Anm. 595) unter dem Namen *Zentralkoordinaten*.

597) Die Übertragung der Bündelkoordinaten auf die Kugel ist *M. Chasles* geläufig; vgl. Ap. hist., p. 553f. Vgl. ferner *C. Graves*, Two geometrical Memoirs on the general properties of cones of the second degree and of the spherical conics by *M. Chasles*, translated from the french, with notes and additions and an appendix on the application of analysis to spherical geometry, Dublin 1841; die erwähnten Abhandlungen *Chasles'* sind in den Nouv. Mém. Ac. Belgique 6 (1830) erschienen. *A. Borgnet*, Essai de géométrie analytique de la sphère, Paris 1847; Paris C. R. 25 (1847), p. 723; Nouv. Ann. 7 (1848), p. 147—150, 174—177, 392—395; dann die Dissertationen über sphärische Kegelschnitte von *L. Geisenheimer*, Jena (Schweidnitz) 1869, u. *H. Vogt*, Breslau 1873. *G. Huber*, Zeitschr. Math. Phys. 45 (1900), p. 86—118, hingegen studiert diese Raumkurven und deren Tangentenflächen, indem er die rechtwinkligen Koordinaten ihrer Punkte als elliptische Funktionen eines oder zweier Parameter darstellt

gebildete Achsenkreuz. Die Gleichung einer sphärischen Kurve in obigen Koordinaten ist demnach identisch mit der Gleichung ihrer Zentralprojektion aus der Kugelmitte in Parallelkoordinaten[598]).

Th. St. Davies[599]) setzt $\omega = 90^0$ voraus und wählt (Fig. 6) $\widehat{OM}$ und $\widehat{MP}$ oder noch häufiger $\widehat{OM} = \widehat{OYM}$ und $\widehat{YP}$ (Poldistanz) als Koordinaten von P.

Gudermann[600]) überträgt auch die ebenen Dreieckskoordinaten (Nr. 5) auf die Kugel, indem er die Sinus der aus einem Punkt auf die Seiten eines sphärischen Dreiecks gefällten sphärischen Lote als *homogene sphärische Koordinaten* eines Punktes betrachtet[601]).

F. A. Möbius[602]) wendet die Methoden seines baryzentrischen

---

598) *N. Druckenmüller,* Übertragungsprinzipien, p. 7, wo sich auch schon die Bemerkung findet, daß hierdurch jedes andere Koordinatensystem der Ebene ebenfalls auf die Kugel übertragbar wird; *Salmon-Fiedler,* Anal. Geom. d. R. 1, Leipzig 1863, p. 311f. Nimmt man $\omega = 90^0$ an und wählt $\sin \widehat{MP}$, $\sin \widehat{NP}$ als sphärische Koordinaten des Punktes P, so stimmt die Gleichung einer sphärischen Kurve in diesen Koordinaten überein mit der Gleichung ihrer Orthogonalprojektion auf eine zur Tangentialebene in O parallele Ebene in rechtwinkligen Koordinaten; ebenda p. 312.

599) Trans. R. Soc. Edinburg 12 (1834), p. 259—362 (gel. 1832), p. 379—428 (gel. 1833). Schon 1831, ebenda p. 77—122, hat er diese Koordinaten zum Studium einer astronomischen Frage verwendet. Die folgenden Abhandlungen sind analytischen Untersuchungen über Kugelkreise, zahlreiche sphärische Kurven (Spiralen, sphärische Kegelschnitte, Loxodromen usw.), Koordinatentransformationen auf der Kugel und Projektionen der Kugel auf die Ebene gewidmet. Über die sphärischen Kurven wird manches Neue geboten; zahlreiche historische Bemerkungen verdienen Beachtung. — *Davies*' Methoden wurden weiteren Kreisen durch die Untersuchungen von *S. S. Greatheed,* Cambr. math. J. 1 (1839), p. 193—204; 2 (1841), p. 37—45, bekannt.

600) Analytische Sphärik, p. 153f. Im Lehrb. d. niederen Sphärik, Münster 1835, Abschn. 10, p. 295ff., legt er ein dreirechtwinkliges sphärisches Dreieck zugrunde und verwendet als „Distanzkoordinaten" die sphärischen Abstände eines Punktes von den Ecken dieses Dreiecks.

601) Mit diesem Koordinatensystem beschäftigen sich auch *A. Cayley,* Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 22—33 = Math. pap. 1, p. 218; *P. Cassani,* G. mat. 6 (1868), p. 81—96; *Fr. Daniëls,* Ann. Soc. scient. Bruxelles 25 A (1901), p. 138—141; Arch. Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 261—273; Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives, Fribourg 1907 (Publ. de l'Université de Fribourg (Suisse). Nouvelle série, fas. VIII); *R. Heger,* J. f. Math. 132 (1907), p. 279; Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 129; Anm. 592, p. 3 [hier werden (p. 5) als homogene rechtwinklige Koordinaten eines Hauptkreises die obigen Koordinaten seines Poles betrachtet].

602) Abh. Jablon. Ges. Leipzig 1846, p. 45—86 = Ges. W. 2, p. 1—54. — Wählt man auf der Kugel drei feste Punkte $A, B, C,$ so kann man ihnen stets solche Gewichte a, b, c beilegen, daß der Schwerpunkt zwischen ihnen und dem mit dem Gewichte $p - a - b - c$ versehenen Kugelzentrum O in einen gegebenen

Kalküls auf sphärische Figuren an, wobei auch Hauptkreise als Elemente betrachtet werden.

All diese Koordinaten lassen sich als Sonderfälle der linearen Koordinaten im Bündel durch das Kugelzentrum betrachten. Die analytische Geometrie auf der Kugel erscheint aus diesem Gesichtspunkte identisch mit der Geometrie im Bündel (Nr. 5)[603]. Die elliptischen Koordinaten in letzterem (Nr. **13**, Fall III) sind dann zugleich *elliptische Koordinaten auf der Kugel*[604]. Auch die den verschiedenen Kugelkoordinaten (Nr. **24, 25, 10, 16**) analogen *Kreis-* und *Punktkoordinaten* auf der Kugel lassen sich auf diese Weise leicht einführen, indem man von den Drehkegeln im Bündel ausgeht[605].

Man kann aber auch die Kreise auf der Kugel als die Schnitte mit deren Orthogonalkugeln betrachten. Wählt man nun die gegebene Kugel $\varkappa$ samt vier zu ihr und untereinander orthogonalen Kugeln als Grundkugeln eines Systems pentasphärischer Kugelkoordinaten

---

Punkt P der Kugelfläche fällt. Bezeichnen φ, χ, ψ die aus P auf die Hauptkreise BC, CA, AB gefällten sphärischen Lote, so sind die homogenen Koordinaten a, b, c proportional mit $\sin \widehat{BC} \sin \varphi$, $\sin \widehat{CA} \sin \chi$, $\sin \widehat{AB} \sin \psi$ und im wesentlichen identisch mit einem von *A. Cayley*[601]) erwähnten System. a, b, c sind auch proportional den Parallelkoordinaten von P in bezug auf das Achsenkreuz OA, OB, OC.

603) Dieser Auffassung entspricht die Behandlung der Sphärik bei *O. Hesse*, Vorles. Raum (1861), p. 33 f.; *W. Fiedler*, Zeitschr. Math. Phys. 8 (1863), p. 392—394 (vgl. auch dessen Charakterisierung der Metrik auf der Kugel in „Die Elemente d. neueren Geom. u. d. Algebra d. binären Formen", Leipzig 1862, p. 234); *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. Raumes 1, Leipzig 1863, p. 312—334. — Vgl. noch *O. Stolz*, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 168—178; *P. Cassani*[601]); *Fr. Daniëls*, L'Enseign. math. 7 (1906), p. 206—221, sowie „Essai de géom. sphérique"[601]).

Die Punkte der Kugel lassen sich nur den Halbstrahlen durch das Zentrum eineindeutig zuordnen. Wegen des Unterschiedes zwischen der Geometrie im Halb- und der im Vollstrahlbündel vgl. *F. Klein*, Nicht-Euklid. Geom. 1 (Autogr. Vorl. Winters. 1889/90), 2. Abdr. Göttingen 1893, p. 11 f., 97—105.

E. Rudert, Grundlagen z. einer Geom. d. Kugel, Progr., Leipzig 1899; Über kleine Kugelkreise, Diss. Leipzig 1900, verwendet die Methoden der *Grassmann*schen Ausdehnungslehre.

Analog gestaltet sich die Untersuchung von Gebilden in der hyperbolischen Ebene bei Verwendung der *Weierstraß*schen Koordinaten (Nr. 9); vgl. *W. Killing*, Die nicht-euklidischen Raumformen, Leipzig 1885, p. 17 f., und die Anm. 247 angeführten Arbeiten.

604) *J. Liouville*, J. math. p. appl. (1) 11 (1846), p. 369—374, verwendet sie zum Studium der Bewegung eines Punktes auf der Kugel.

605) *J. Casey*[595]), p. 607; *G. Frobenius*, J. f. Math. 79 (1875), p. 187; *R. Lachlan*, The Messenger Math. 14 (1884/85), p. 145—152; London Phil. Trans. 177 (1886), p. 545—575 (samt Untersuchungen über sphärische zyklische Kurven vierter Ordnung).

(Nr. **24**), so bilden die vier Koordinaten der zu $\varkappa$ orthogonalen Kugeln ein System *orthogonaler tetrazyklischer Kreiskoordinaten* auf der Kugel[606]). Damit lassen sich aber auch die den hexasphärischen Koordinaten (Nr. **25**) analogen Kreiskoordinaten auf der Kugel definieren.

Wegen anderer aus der Auffassung der Kugel als Regelfläche zweiter Ordnung entspringenden Koordinaten siehe Nr. **33**[607]).

Punktkoordinaten auf einer *Nullkugel* (einem Minimalkegel) führte *G. Darboux*[608]) ein.

33. Koordinaten auf einer Fläche zweiter Ordnung. Sind OX und OY die durch den fest gewählten Punkt O einer windschiefen Regelfläche zweiter Ordnung gehenden Erzeugenden, so schneiden die Erzeugenden irgend eines Flächenpunktes P auf OX und OY die Punkte P_1 bzw. P_2 aus. Die Abstände $\xi = OP_1$, $\eta = OP_2$ benutzen *J. Plücker*[609]) und *M. Chasles*[610]) als Koordinaten des Punktes P (Nr. **31**). $\xi =$ konst., $\eta =$ konst. sind die Gleichungen der beiden Erzeugendenscharen; $\xi = 0$, $\eta = 0$ sind die Koordinaten von O, $\xi = \infty$, $\eta = \infty$ die Koordinaten des zweiten Endpunktes O_1 des durch O gehenden Durchmessers der Fläche.

$$(1) \qquad f(\xi, \eta) = 0$$

ist die Gleichung einer Kurve auf der Fläche. Bezeichnet f eine ganze rationale Funktion, die in ξ bis zum p^{ten}, in η bis zum q^{ten} Grad aufsteigt, so ist die durch die Gleichung dargestellte algebraische Kurve

---

606) *J. Casey*[595]), p. 603; *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 14—28, samt den analogen Koordinaten f. d. Punktepaare eines Kreises, p. 28f. — Wegen Koordinaten von Punktepaaren auf der Kugel vgl. Anm. 496. Die von *E. Cosserat*, Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace, Thèse, Paris 1889, p. 40—42, eingeführten Punktepaarkoordinaten erweisen sich als identisch mit den *Plücker*schen Koordinaten der Verbindungsgeraden in bezug auf ein Poltetraeder der Kugel. Vgl. auch p. 39 die tetrazyklischen Punktkoordinaten.

607) *E. Hutt*, Eine neue Art d. elliptischen Kugelkoordinaten, Progr. Berlin 1872, und *G. Darboux*, Leçons 2 (1889), p. 422, verwenden die halbe Summe und Differenz der sphärischen Abstände eines Punktes der Kugel von zwei festen Punkten als Koordinaten (vgl. Nr. **17**, Anm. 353); die Koordinatenlinien sind dann sphärische Kegelschnitte. *Tripolare Punktkoordinaten* auf der Kugel treten bei *G. Darboux*, Classe rem., p. 42, auf; ein System isometrischer Koordinaten erwähnt *A. Enneper*, Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 256.

608) Bull. sc. math. (2) 29 (1905), p. 34, 39.

609) J. f. Math. 34 (1847), p. 341—356, 360—376 = Ges. Abh. 1, p. 417—433, 437—455 (vgl. hierzu auch die Bemerkung des Herausgebers p. 611). In letzterem Aufsatz nennt er ξ, η *stereographische Koordinaten*.

610) Paris C. R. 53 (1861), p. 985—996, 1077—1086, 1203—1210. Mit diesen Koordinaten hat sich auch *A. Cayley*, Phil. Mag. 22 (1861), p. 35—38 = Math. pap. 5, p. 70 beschäftigt. Die meisten Anwendungen rühren von *Chasles* her.

von der $(p+q)^{\text{ten}}$ Ordnung[611]) und schneidet jede Erzeugende $\eta =$ konst. in p, jede Erzeugende $\xi =$ konst. in q Punkten. Eine bilineare Gleichung zwischen ξ und η definiert einen Kegelschnitt.

Projiziert man die Fläche aus dem Punkt O_1 auf die Ebene OXY *(stereographische Projektion)*[612]), so hat die Projektion P' von P in bezug auf die Achsen OX, OY die Parallelkoordinaten ξ, η. Gl. (1) ist also gleichzeitig die Gleichung der stereographischen Projektion der Flächenkurve aus O_1. Die den bilinearen Gleichungen zwischen ξ, η entsprechenden ebenen Schnitte der Fläche[613]) projizieren sich als Kegelschnitte durch die unendlichfernen Punkte von OX und OY.

Eine projektive Verallgemeinerung dieser Koordinaten ergibt sich durch Einführung projektiver Koordinaten (Nr. 8) in jeder der beiden Regelscharen.[614]) Bringt man die Flächengleichung (in linearen homogenen Koordinaten) auf die Form

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0, \tag{2}$$

so sind $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$ solche Koordinaten.[615]) Die homogenen Koordinaten x_1', x_2', x_3' der Projektion eines Flächenpunktes (x_i) aus dem Berührungspunkt der Ebene $x_1 = 0$ auf die Ebene $x_4 = 0$ sind, wenn die Schnittlinien mit den Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ als Seiten des Grunddreiecks benutzt werden, mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Flächenpunktes proportional.

---

611) Daß die Ordnung einer Kurve auf dem einschaligen Hyperboloid nicht mit dem Grad ihrer Gleichung übereinstimmt, hat *A. Cayley* a. a. O. bemerkt. Ist der Grad der Gl. (1) um r Einheiten kleiner als die Ordnung der Kurve, so hat diese einen r-fachen Punkt in O_1. *E. Kasner*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 450, nennt p und q die *Teilordnungen* („partial orders") der Kurve.

612) Diese Verallgemeinerung der gewöhnlichen stereographischen Projektion gab *M. Chasles*; Näheres darüber bei *Clebsch-Lindemann* 2¹, p. 414—432, Literatur in III C 2, *Staude*, Nr. 88, 125.

613) Damit hängt die von *C. Stephanos* (vgl. Anm. 469) behandelte Abbildung der binären Projektivitäten auf die Punkte des Raumes zusammen.

614) Sie verwendet zur invariantentheoretischen Untersuchung der einer Fläche 2. O. angehörigen Kurven hinsichtlich der Gruppe der kollinearen Transformationen der Fläche in sich *E. Kasner* a. a. O., p. 451 f. In § 36 derselben Arbeit führt er als Koordinaten eines Punktes der Fläche 2. O. zwei Gruppen ternärer homogener Koordinaten ein, für deren jede eine quadratische Bedingungsgleichung besteht. Sind z. B. $L' = 0$, $L'' = 0$, $L''' = 0$, $L = 0$ die Gleichungen von Erzeugenden derselben Schar in Linienkoordinaten (Nr. 27), so besteht eine Identität

$$L \equiv r_1 L' + r_2 L'' + r_3 L'''.$$

$r_1 : r_2 : r_3$ sind dann die erwähnten Koordinaten der Erzeugenden L durch einen Flächenpunkt; für die zweite Erzeugende durch diesen Punkt gilt analoges.

615) *A. Cayley*[610]); *Clebsch-Lindemann* 2¹, p. 422 f.

Für Nichtregelflächen zweiter Ordnung werden die analogen Koordinaten x_i eines reellen Punktes, mithin auch die x_i' komplex.[616]) Für die Einheitskugel um den Ursprung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes

$$(3) \qquad (z-1)(z+1)+(x+iy)(x-iy)=0$$

z. B. sind die Flächenkoordinaten des Punktes x, y, z

$$(4) \qquad \xi = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{x+iy}{1-z}, \quad \eta = \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x-iy}{1-z},$$ [617])

also zugleich Minimalkoordinaten (Nr. 7) der Projektion dieses Punktes aus (0, 0, 1) auf die Ebene $z = -1$. Daraus folgt für die rechtwinkligen Koordinaten x', y' der Projektion auf die xy-Ebene

$$(5) \qquad x' = \frac{x}{1-z}, \quad y' = \frac{y}{1-z},$$ [618])

mithin

$$(6) \qquad \xi = x' + iy', \quad \eta = x' - iy'.$$

Diese auf *B. Riemann*[619]) zurückgehende Darstellung der komplexen Variabeln durch Punkte der Kugel ist für verschiedene Teile der Mathematik von Nutzen gewesen.[620]) Die allgemeinere Darstellung von *L. Wedekind*[621]) ist mit der in der Ebene (Nr. 7) völlig analog.

Projiziert man die Kugel aus ihrer Mitte auf eine Ebene π, so umhüllen die paarweise sich deckenden Projektionen der Erzeugenden einen nullteiligen Kreis K. Sind λ_1, λ_2 Punktkoordinaten in π be-

---

616) *J. Plücker*, J. f. Math. 34 (1847), p. 341—356, Nr. 9 = Ges. Abh. 1, p. 423.

617) *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 264f. (gleich für die M_{n-1}^2 im R_n); Nicht-Euklid. Geom. 2 (Autogr. Vorl. Sommers. 1890, ausgearb. von *Fr. Schilling*), 2. Abdr., Göttingen 1893, p. 86. — Vgl. auch *G. Darboux*, Leçons 1, p. 22, und *G. Koenigs*, Géom. réglée, Nr. 92.

618) Aus (4) ergibt sich $x' = c\frac{x}{1-z}$, $y' = c\frac{y}{1-z}$. Da der Punkt $x = 1$, $y = z = 0$ mit seiner Projektion auf die xy-Ebene zusammenfällt, muß $c = 1$ sein. — Aus (5) und (3) folgen die oft verwendeten Formeln

$$x = \frac{2x'}{x'^2+y'^2+1}, \quad y = \frac{2y'}{x'^2+y'^2+1}, \quad z = \frac{x'^2+y'^2-1}{x'^2+y'^2+1}.$$

619) Zuerst dargelegt von *C. Neumann*, Vorl. üb. Riemanns Theorie d. Abelschen Integrale, Leipzig (1865), 2. Aufl. 1884, p. 52.

620) *F. Klein*, Vergl. Betr., § 6 u. Note VII; Sitzungsber. phys.-med. Soc. Erlangen, Nov. 1873 = Math. Ann. 22 (1883), p. 246—248; Math. Ann. 9 (1875), p. 189; Vorl. üb. d. Ikosaeder usw., Leipzig 1884, p. 29f. Wegen Verwendung der stereographischen Abbildung der M_{n-1}^2 im R_n auf den R_{n-1} vgl. III AB 4b, *Fano*, Nr. 30, 31.

621) Beitr. z. geom. Interpr. binärer Formen. Diss. Erlangen 1875, § 4; Math. Ann. 9 (1876), p. 209f.; Studien im binären Wertgebiet, Habil. Karlsruhe 1876, p. 1f.

züglich K als Normkurve (Nr. **11**) und betrachtet man eine Tangente von K, je nachdem ihr die Koordinate λ_1 oder λ_2 zugeordnet wird, als Projektion einer Erzeugenden der einen oder andern Schar, so entspricht dem Punkte (λ_1, λ_2) in π ein einziger Punkt auf der Kugel. Die Geometrie auf der Kugel wird identisch mit der elliptischen Geometrie in π mit K als absolutem Kegelschnitt.[622])

Da die Punkte auf der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides mittels der Gleichungen

$$x = a \cos u,\quad y = b \sin u \cos v,\quad z = c \sin u \sin v \tag{7}$$

dargestellt werden können[623]), so bilden die Winkel u, v Koordinaten auf dem Ellipsoid (für $a = b = c$ auf der Kugel). Ferner können zwei der Nr. **12**—**15** besprochenen elliptischen Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Punktkoordinaten der durch die dritte bestimmten Fläche zweiter Ordnung dienen[624]); die Parameterlinien sind die Krümmungslinien der Fläche. Die Geometrie auf dem Ellipsoid (insbesondere Sphäroid) ist wegen ihrer Bedeutung für die Erdmessung und Schiffahrt schon von *A. C. Clairaut* und *L. Euler*[625]) behandelt worden.

Wegen der *geodätischen Polarkoordinaten* und der *rechtwinkligen*

---

622) *G. Darboux*, Classe rem., Note III, p. 208f.; *F. Klein*, Vergl. Betr., p. 27; *Clebsch-Lindemann* 2^1, p. 606f. Vgl. auch III A B 4b, *Fano*, Nr. **30a**'').

623) *J. Jvory*, London Phil. Trans. 1809, p. 350; *C. F. Gauß*, Commentat. rec. Soc. Gott. 2 (1813), p. 17 = Werke 5, Göttingen 1877, p. 16 (nach III A B 2, *v. Mangoldt*, Anm. 61). a, u, v lassen sich zufolge (7) als krummlinige räumliche Koordinaten auffassen und heißen (*J. G. Hagen*, Synopsis der höheren Mathematik 2, p. 81) die *elliptischen Polarkoordinaten* des Punktes (x, y, z).

624) Vgl. [299]), [329]); *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 19 (1839), p. 309, drückt sie durch die Winkel u und v aus. S. auch *E. Heine*, Handbuch d. Kugelfunktionen, 2. Aufl., 1, Berlin 1878, p. 352.

Van Geer, Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 304—311, nennt $\lambda_2 - \lambda_1$ und $\lambda_3 - \lambda_1$ die *zentralen* Koordinaten eines Punktes P auf dem Ellipsoid λ_1, weil sie den Quadraten der Achsen des zu P konjugierten Diametralschnittes gleich sind.

625) Die Grundzüge der *sphäroidischen Trigonometrie* haben *A. C. Clairaut*, Mém. Hist. Ac. inscr. Paris 1733, 1739, u. *L. Euler*, Hist. Mém. Ac. Berlin 9 (1753), p. 258ff., geschaffen. Es handelt sich dabei in erster Linie um die Auflösung sphäroidischer Dreiecke, die von zwei von einem Pole ausgehenden Meridianbogen und der geodätischen Verbindungslinie ihrer Endpunkte gebildet wird. Vgl. *B. Oriani*, Mem. (fis. mat.) Ist. Nat. Bologna 1/1 (1806), p. 118—198; 2/1 (1808), p. 1—58; 2/2 (1810), p. 1—58; Mem. Ist. Lomb.-Ven. 4 (1833), p. 325—331. Eine Geschichte dieses Zweiges gibt *Grunert* in *Klügels* Mathem. Wörterbuch 5, Leipzig 1831, p. 332f., eine zusammenfassende Darstellung in „Sphäroidische Trigonometrie", Berlin 1833; vgl. auch Loxodromische Trigonometrie, Leipzig 1849.

geodätischen oder *Soldner*schen *Koordinaten* auf dem Sphäroid vgl. VI 1, 3, *Pizzetti*, Nr. **16, 22**.

34. Natürliche Koordinaten.[626]) Man versteht darunter Bestimmungsarten von Elementen einer nichtlinearen (krummen) Mannigfaltigkeit (Kurve, Fläche usw.), bei denen nicht auf außerhalb der Mannigfaltigkeit befindliche Gebilde Bezug genommen wird, wie es z. B. die Basis eines Koordinatensystems ist.[627]) Bezeichnet z. B. s die von einem festen Punkt aus gemessene und bis zu einem Punkt P reichende Bogenlänge einer ebenen Kurve, φ den Winkel der Tangente in P gegen eine feste Tangente (oder eine andere orientierte Gerade) und ϱ den Krümmungshalbmesser in P, so sind die Zahlen (s, φ) von *K. C. F. Krause*[628]), *A. Peters*[629]), *J. Plücker*[630]), *W. Whewell*[631]) u. a.[632]), die Zahlen (φ, ϱ), für die *E. Wölffing*[633]) den Namen *Entwicklungskoordinaten* vorschlägt, von *L. Euler*[634]), *L. Aoust*[635]) u. a.[636]), die

626) Vgl. auch III A B 4b, *Fano*, Nr. 38b) und III D 4, *Scheffers*, an vielen Stellen.

Wegen des Auftretens und Entstehens dieses Namens sowie der in ähnlichem Sinn gebrauchten Ausdrücke: *coordonnées intrinsèques (esoterische Koordinaten), intrinsic equation, geometria intrinsica* vgl. den eingehenden „Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten" von *E. Wölffing,* Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 142—159, der bei der Abfassung dieser Nummer von großem Werte war.

627) Dem Bestreben, sich von den Koordinatenachsen unabhängig zu machen, entsprang auch *Leibniz*ens „Charakteristik" (vgl. *Leibniz*ens mathem. Schriften, herausgeg. von *Gerhardt,* 2, p. 20f., 27f.; 5, p. 141—178; oder auch *H. Graßmanns* Ges. Werke 1[1], p. 417f.) und *H. Graßmanns* Ausdehnungslehre (vgl. Ausg. v. 1844, p. VIII = Ges. Werke 1[1], p. 9).

628) Novae theoriae linearum curvarum, originariae et vere scientificae, specimina quinque prima. Herausgeg. v. *H. Schröder,* München 1835.

629) Neue Curvenlehre, Dresden 1838.

630) Theorie d. algebr. Kurven, Bonn 1839, p. 201. Vgl. auch d. Fußn. p. 206.

631) Trans. Cambr. Phil. Soc. 8 (1849), p. 659—671; 9 (1851), p. 150f. Eine deutsche Übersetzung dieser Abhandlungen gab *A. Walter,* Progr. d. k. k. ersten Staatsrealsch., Graz 1907.

632) S. *E. Wölffing,* Ber., p. 143f.

633) Ber., p. 144.

634) Nova Acta Ac. Petrop. 1 (1783), p. 75—116.

635) Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris 1873.

636) *E. Wölffing,* Ber., p. 144f. — Ist $f(\varphi, \varrho) = 0$ die Gleichung der Kurve und legt man durch einen festen Punkt O Strecken, die mit den Krümmungsradien gleich und parallel sind, so erfüllen ihre Endpunkte eine Kurve (die *Radiale* der gegebenen), deren Gleichung in Polarkoordinaten φ, ϱ (Nr. 9) wieder obige Form hat, wenn O als Pol und die Polarachse senkrecht zur Anfangstangente gewählt wird. Vgl. auch *H. Wieleitner,* Spez. ebene Kurven, Leipzig 1908, § 30.

Zahlen (s, ϱ) endlich (*esoterische* Koordinaten nach dem Vorschlag von *R. Hoppe*) von *L. Euler*[637]), u. a.[638]), insbesondere von *E. Cesàro*[639]) studiert und verwendet worden. Mit letzteren Koordinaten hat die Differentialgeometrie der ebenen Kurven weitgehende Behandlung erfahren (III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 15). Vielfache Anwendungen fanden auch die *Gergonne*schen[640]) Koordinaten (ϱ, ϱ_1), wo ϱ_1 den Krümmungsradius der Evolute in dem P entsprechenden Punkt bezeichnet.

Aufklärung über den Charakter der verschiedenen natürlichen Koordinaten brachte erst *S. Lies* Gruppentheorie. Die natürlichen Koordinaten für ebene Kurven sind Differentialinvarianten (niedrigster Ordnungen) der Gruppe der Bewegungen in der Ebene; eine natürliche Gleichung gehört zu sämtlichen ∞^3 mit einer Kurve kongruenten Kurven und zu keinen andern.[641]) Auch für Raumkurven und krumme Flächen[642]) verwendet man als natürliche Koordinaten die Differentialinvarianten niedrigster Ordnungen hinsichtlich der Bewegungen des Raumes, für die Raumkurven z. B. die Bogenlänge und die Radien

637) Comm. Ac. Petr. 12 (1750), p. 3—52.

638) *E. Wölffing*, Ber., p. 145—147.

639) Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896. Deutsche Ausg.: Vorlesungen über natürliche Geometrie von *G. Kowalewski*, Leipzig 1901; vgl. ferner *G. Loria*, Ebene Kurven, an vielen Stellen, und die Anwendungen auf Rollkurven bei *H. Wieleitner*[636]), IV. Abschn.; wegen anderer Arbeiten noch *E. Wölffing*, Ber., p. 155.

640) Ann. math. p. appl. 4 (1813), p. 42—55; betreffs der zahlreichen Arbeiten, in denen diese Koordinaten zur Verwendung gelangen vgl. *E. Wölffing*, Ber., p. 148f.

641) *E. Wölffing*, Ber., p. 149; *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 52f.; III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 15.

Jedes Paar von Differentialinvarianten, die gegenüber einer Untergruppe der Bewegungen in der Ebene invariant sind, kann man als *halbnatürliche Koordinaten* bezeichnen (*E. Wölffing*, Ber., p. 150f.). Hierzu gehören die Zusammenstellung von Abszisse und Bogen (s. auch *H. Wieleitner*[636]), p. 392f.), Radiusvektor des Kurvenpunktes und Ursprungslot auf die Tangente (*G. Sacchi*, Geometria analitica delle linee piane, Pavia 1854; *H. I. Purkiss*, The Oxf. Camb. Dublin Mess. 2 (1864), p. 98; 3 (1866), p. 21; *E. J. Nanson*, The Messenger Math. 28 (1898/99), p. 80; 32 (1902/03), p. 64).

Eine Verallgemeinerung der natürlichen Koordinaten bilden die von *G. Pick*, Sitzungsb. Ak. (math. nat.) Wien 115, Abt. IIa (1906), p. 139—159, betrachteten *kovarianten Koordinaten* niedrigster Ordnung, die gegenüber allen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe von Punkttransformationen in der Ebene invariant sind. — S. auch die *Formkoordinaten* bei *E. Wölffing*, Ber., p. 154.

642) Bezüglich natürlicher Gleichungen von Regelflächen vgl. *X. Antomari*, Appl. de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées. Mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions. Thèse. Paris 1894; *R. de Saussure*, Amer. J. math. 19 (1897), p. 349; *K. Zindler*, Liniengeom. 2, p. 20f.

der ersten und zweiten Krümmung[643]) (III D 1, 2, *v. Mangoldt*, Nr. 32). Bezüglich der natürlichen Gleichungen einer Fläche siehe III D, 1, 2, Nr. 35.

Die natürlichen Koordinaten vermögen die gewöhnlichen keineswegs zu ersetzen, sind aber für differentialgeometrische Untersuchungen von großem Werte. Die so stark zurückgebliebene Theorie der transszendenten Kurven hat durch Verwendung dieser Koordinaten vielerlei Anregungen erfahren.[644])

35. Koordinaten sonstiger Elemente. Den Gedanken, die Kombination zweier Elemente verschiedener Systeme als neues Element zu betrachten, hat schon *J. G. H. Swellengrebel*[645]) klar gefaßt und verwertet. Die Kombination eines Punktes und einer Geraden der Ebene führte *A. Clebsch*[646]), von der Invariantentheorie ausgehend, ein. Sind x_i, u_i $(i = 1, 2, 3)$ homogene lineare Koordinaten des Punktes und der Geraden, so nennt man die sechs Zahlen x_i, u_i[647]), von denen die x_i und die u_i je mit einer beliebigen Zahl multipliziert werden dürfen, die Koordinaten des *Punkt-Linienelementes*[648]) (xu) in der Ebene. Eine in den x_i und u_i homogene Gleichung $f(x, u) = 0$ scheidet aus diesen ∞^4 Elementen ∞^3 aus, deren Inbegriff *Clebsch* einen *Konnex* nennt. Er ordnet jedem Punkte x die Tangenten einer Kurve, jeder Geraden u die Punkte einer Kurve zu. Eine algebraische Gleichung vom m^{ten} Grad in den x_i und n^{ten} Grad in den u_i definiert einen

643) *O. Rausenberger*, Grundlagen zu einem System von Krümmungskoord. Diss. Heidelberg (Berlin 1875).

644) S. *H. Wieleitner*[626]), insbes. Abschn. IV, V.

645) Anal.-geom. Unters. üb. allgem. Verwandtschafts-Verhältnisse von Koordinaten-Systemen, Bonn 1855, p. 2. Sind xy, $u'v'$ die Koordinaten der Elemente, so werden x, y, u', v' als Koordinaten des Elementenpaares angesehen. Durch drei Gleichungen zwischen ihnen wird eine *Elementen-Kette*, durch zwei ein *Elementen-Netz* definiert; diese Netze werden als Verwandtschaften zwischen den beiden Systemen näher untersucht. Beachtenswert erscheint dabei die im IV. Abschnitt für den Fall einer Punktverwandtschaft behandelte *Tangential-Affinität*, die in der Umgebung eines Punktepaares die allgemeine Verwandtschaft ersetzt. Der Keim dieser Begriffsbildungen findet sich bei *J. Plücker*, Entw. 2, p. 251f.

646) Abh. Ges. Gött. 17 (1872), math. Kl. p. 11f. (beliebige Elementkombinationen); Math. Ann. 6 (1873), p. 203—215 = Nachr. Ges. Gött. 1872; *Clebsch-Lindemann* 1, p. 936f.

647) Auf Zusammenhänge mit den *Plücker*schen Linienkoordinaten weist *A. Clebsch*, Math. Ann. 6 (1873), p. 213 hin.

648) Diese systematische Benennung findet sich bei *E. Kasner*, Trans. Amer Math. Soc. 4 (1903), p. 213—233. Sonst spricht man von *Konnexelementen*; *F. Klein*, Vergl. Betr., § 9, bezeichnete damit die Kombination von Punkt, Gerade und Ebene, insbesondere in vereinigter Lage.

Konnex (m, n) von der m^{ten} Ordnung und n^{ten} Klasse. Der Konnex (1, 1) führt zur Kollineation.[649]) Die durch zwei Gleichungen zwischen x_i, u_i definierten ∞^2 Elemente gehören einer *Koinzidenz* an. Sie deckt sich mit dem allgemeinsten Begriff der reziproken Verwandtschaft. Drei Gleichungen bestimmen zwei Kurven, von denen die Punkte der einen den Tangenten der andern zugeordnet sind, vier Gleichungen eine Elementengruppe. Die Gleichung $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ definiert den *identischen Konnex*, bestehend aus allen Elementen, bei denen Punkt und Gerade vereinigt liegen. Jeder Konnex hat mit ihm seine *Hauptkoinzidenz*[650]) gemeinsam.

Bei der Ausdehnung auf den Raum sind die Kombinationen *Punkt-Ebene*[651]), *Punkt-Gerade*[652]) und, dual hierzu, *Ebene-Gerade* möglich.

J. Rosanes[653]) wird durch die Auffassung zweier Punkte, etwa verschiedener Ebenen, als Element (Punktepaar) zu neuen Fragestellungen und Ergebnissen über linear-abhängige Punktsysteme[654]),

---

649) *Clebsch-Lindemann* 1, p. 988f.; *A. Clebsch* u. *P. Gordan*, Math. Ann. 1 (1869), p. 359f.; *A. Voß*, Math. Ann. 15 (1879), p. 355—358. Untersuchungen über den Konnex (1, 2) stellte *J. W. P. Godt*, Diss. Göttingen 1873, an, solche über $(m, 1)$ und $(1, n)$ finden sich bei *Clebsch-Lindemann* 1, p. 1001f. Der Konnex (m, n) ist nur unvollständig, hauptsächlich im Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen untersucht worden; vgl. jedoch *C. Stephanos*, Bull. sc. math. (astr.) (2) 4 (1880), p. 318—328.

Weitere Literatur bei *E. Pascal*, Rep. 2, p. 173—176.

650) Mit deren Hilfe werden die *Konnexkurven* definiert, welche Integralkurven einer durch den Konnex bestimmten Differentialgleichung 1. O. sind. *A. Clebsch*, Math. Ann. 6 (1873), p. 209; *Clebsch-Lindemann* 1, p. 962f. u. insbes. p. 1014f., wozu jedoch zu bemerken, daß hierin schon *Lie*sche Begriffsbildungen auftreten; vgl. *Lie-Engel*, Theorie d. Transformationsgr., II. Abschn., Leipzig 1890, p. 34 Fußn.

651) *R. Krause*, Math. Ann. 14 (1879), p. 294—322, behandelt den Punkt-Ebenen-Konnex (2, 1), *D. Sinzow*, Publ. d. Univ. Kasan 1894/95, auch sep. 1895 (russisch) erschienen (nach Jahrb. Fortschr. Math. 27, p. 545—547, oder Bull. sc. math. (astr.) 22 (1898), p. 221—228), den allgemeinen Konnex (m, n) dieser Art und überträgt auch die Entwicklungen auf den Fall von n homogenen Koordinaten. Verschiedene Anwendungen dieser Elemente insbes. der Hauptkoinzidenzen gibt: *L. Autonne*, Mém. cour. et sav. étr. Ac. Belg. 59 (1901) [vgl. Jahrb. Fortschr. Math. 34, Jhrg. 1903, p. 712ff.]; J. éc. polyt. (2) 8 (1903), p. 17—73.

652) *E. Kasner*, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 213—233, führt das durch die linearen Punktkoordinaten x_i und die *Plücker*schen Linienkoordinaten p_{ik} bestimmte *Punkt-Linienelement* im Raume ein (p. 214) und untersucht eingehender den *Punkt-Linienkonnex* (1, 1).

653) J. f. Math. 88 (1880), p. 241—273; 90 (1881), p. 303—321; 95 (1883), p. 247—255; 100 (1887), p. 311—316.

654) p Punktepaare heißen linear-abhängig, sobald jede bilineare Form,

insbesondere bei Korrelationen, geführt. Eigentlich handelt es sich dabei schon um die Untersuchung des R_8 der bilinearen ternären Formen, deren Koeffizienten man als *Koordinaten der dadurch definierten Korrelationen* auffassen kann. Die Geraden- und Punktepaare bilden in diesem R_8 eine M_4^6. *C. Segre*[655]) untersucht diese wichtige Mannigfaltigkeit eingehend, indem er als Koordinaten eines Punktepaares die Produkte $X_{ij} = x_i y_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ aus den linearen homogenen Koordinaten der Punkte verwendet. Auf analoge Weise definiert er die Koordinaten einer Gruppe von k Punkten, die k verschiedenen Räumen beliebiger Dimensionenzahlen angehören.

Unabhängig von *Clebsch* hat *S. Lie*[656]) den für die Theorie der Berührungstransformationen wichtigen Begriff des *Elementes eines* R_n (in der Ebene *Linienelement*, im Raum *Flächenelement*) aufgestellt. Es ist dies der Inbegriff eines Punktes und eines ihn enthaltenden R_{n-1}. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die homogenen linearen Koordinaten des ersteren, $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ die des letzteren und besteht die Beziehung $\sum_1^{n+1} x_i p_i = 0$, so heißen $x_1, \ldots, x_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1}$ die *homogenen Elementkoordinaten*[657]). Allgemein nennt *Lie*[658]) den Inbegriff eines Punktes und eines ihn enthaltenden R_k ein M_k-*Element*, zumal im R_3 einen Punkt und eine hindurchgehende Gerade *Linienelement im Raume*. Als dessen Koordinaten[659]) werden gewöhnlich die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes und die Verhältnisse der Inkremente $dx : dy : dz$ betrachtet, die x, y, z beim Fortschreiten des Punktes auf der Geraden erhalten.

---

die durch $p - 1$ von ihnen annulliert wird, auch das p^{te} zum Nullpaare hat. J. f. Math. 88 (1880), p. 248.

655) Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 192—204.

656) Forh. Selsk. Christ. (1872), p. 28—34. Vgl. hierzu *Lie-Engel*, Theorie d. Transformationsgr. 2, Leipzig 1890, §§ 30—32. Diese Begriffsbildung geht auf *G. Monge* zurück und findet sich schon ziemlich klar bei *P. du Bois-Reymond*, Beiträge z. Interpr. d. partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln, Leipzig 1864, p. 13f.; die Stellung der Ebene wird hier durch die Normalenrichtung angegeben.

657) *Lie-Engel*, a. a. O., p. 109. *Lie* verwendet gewöhnlich nichthomogene Koordinaten. Vgl. auch *E. O. Lovett*, Ann. mat. p. appl. (3) 7 (1902), p. 39—98. Wegen Mannigfaltigkeiten solcher Elemente, insbes. *Elementvereinen*, vgl. II A 5, *v. Weber*, Nr. 35. *A. Voß*, Math. Ann. 23 (1884), p. 45—81, 359—411, betrachtet Systeme von ∞^2 Flächenelementen („Punkt-Ebenen") und hebt die Analogie der erhaltenen Ergebnisse mit denen der Flächentheorie hervor.

658) *Lie-Engel*, Transformationsgr. 3, Leipzig 1893, p. 480.

659) *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstr., Leipzig 1896, p. 249.

E. Study[660]) wies auf die Notwendigkeit des Operierens mit *orientierten* Linien- und Flächenelementen hin.

Mit der Definition von Elementen höherer Ordnung, als Verallgemeinerung der eben erwähnten erster Ordnung (oder der Konnexkoordinaten), haben sich *F. Engel*[661]), *E. v. Weber*[662]), *E. Study*[663]) u. a.[664]) beschäftigt. Bei *Study* handelt es sich um Koordinaten der Linienelemente zweiter Ordnung in der Ebene, die gegen projektive Transformationen von der Determinante $+1$ invariant sind. Als Koordinaten eines *eigentlichen* solchen Linienelements dienen sechs homogene Größen $x_1 : x_2 : x_3 : u_1 : u_2 : u_3$, die der Gleichung $(ux) = 0$ genügen und bei denen nicht nur gleichzeitige Multiplikation aller mit einem und demselben Faktor, sondern außerdem auch Multiplikation der Größen x_i oder u_i mit einer dritten Einheitswurzel ε gestattet ist. Die x_i, u_i sind die homogenen Koordinaten des zum Elemente zweiter Ordnung gehörigen Elementes erster Ordnung. Ferner besteht, wenn $f = 0$ die Gleichung eines das Element zweiter Ordnung enthaltenden Kegelschnittes in homogenen linearen Punktkoordinaten x_i und J seine Determinante ist, die Beziehung

$$u_i = \frac{1}{2J^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Je nachdem sämtliche u_i oder x_i verschwinden, stellen diese Koordinaten noch die ∞^2 Punkte oder ∞^2 Geraden der Ebene dar, welche Mannigfaltigkeiten *uneigentliche Elemente zweiter Ordnung* heißen. Der Inbegriff dieser eigentlichen und uneigentlichen Elemente zweiter Ordnung in der Ebene bildet ein abgeschlossenes projektiv-invariantes Kontinuum[665]). Ein eigentliches Element zweiter Ordnung gestattet eine dreifache

660) Gött. gel. Anz. 1897, p. 441; vgl. ferner *E. Müller*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 313, wo auch auf die Bestimmung orientierter Flächenelemente durch gewisse Büschel von Kugelkomplexen hingewiesen wird; ferner *P. F. Smith*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 372.

661) Ber. Ges. Leipzig 45 (1893), p. 468—476. Auch *F. Klein* hat schon anfangs der siebziger Jahre des verfl. Jahrhunderts Versuche nach dieser Richtung hin unternommen; vgl. *F. Engel*, Ber. Ges. Leipzig 54 (1902), p. 17.

662) Math. Ann. 44 (1894), p. 458—472.

663) Ber. Ges. Leipzig 53 (1901), p. 338—403.

664) II A 5, *v. Weber*, Anm. 46.

665) *E. Study*, a. a. O., p. 342. Über andere Arten, die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Elemente 2. O. durch uneigentliche zu einem abgeschlossenen Kontinuum zu ergänzen, vgl. a. a. O., § 7. Wegen der Begriffe „vereinigte Lage" und „Elementvereine" für diese Elemente vgl. § 2. Zwei eigentliche Elemente 2. O. $(x:u)$, $(y:v)$ besitzen eine Invariante $\frac{(vx)^3}{(uy)^3}$; hat sie den Wert $+1$, so sind die Elemente durch einen Kegelschnitt verbindbar.

Orientierung, je nachdem man als seine Koordinaten $(x:u)$, $(\varepsilon x:u)$, $(\varepsilon^2 x:u)$ betrachtet. Die orientierten Elemente zweiter Ordnung lassen sich umkehrbar-eindeutig auf das *Plücker*sche Linienkontinuum abbilden, wobei ein Strahlbündel und ein Strahlfeld ($x_i = 0$ und $u_i = 0$ entsprechend) ausgezeichnet sind.[666])

Ausgehend von der Definition, daß je zwei benachbarte, vereinigt liegende Elemente erster Ordnung der Ebene ein Element zweiter Ordnung bestimmen, gelangt *F. Engel*[667]) auf einfache Weise zu Koordinaten der letzteren (die auch schon *Study* angegeben) und, diesen Gedanken verfolgend, zu Koordinaten für Elemente zweiter Ordnung im Raume.

Schon oben wurde bemerkt, daß die Einführung von Punktepaaren als Elementen dazu führt, bilineare Formen oder die durch sie bestimmten Verwandtschaften (Projektivitäten) als Elemente und deren Koeffizienten als ihre Koordinaten zu betrachten.[668]) Die Projektivitäten zwischen zwei binären Gebieten haben auf diese Weise fast gleichzeitig *G. Koenigs*[669]) und besonders ausführlich *C. Stephanos*[670]) studiert. Analoge Untersuchungen über das System der Projektivitäten im ternären Gebiet hat *E. Study*[671]) begonnen.

---

666) Näheres über diese beachtenswerte Abbildung a. a. O., § 10, 11 und III A B 4b, *Fano*, Nr. 16.

667) Ber. Ges. Leipzig 54 (1902), p. 17—51. Die Grundgedanken dieser Arbeit hat er schon in einem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in *Hamburg* (Sept. 1901) mitgeteilt. Vgl. Jahresber. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 187. Zwei unendlich benachbarte Elemente n^{ter} Ordnung der Ebene heißen vereinigt liegend, wenn die Elemente $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, denen sie angehören, entweder identisch sind oder vereinigt liegen. Zwei benachbarte und vereinigt liegende Elemente n^{ter} Ordnung bestimmen ein Element $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Von den Elementen 1. O. ausgehend, gelangt man so zur Definition der Elemente n^{ter} Ordnung. Im Raume bestimmen jedoch noch nicht zwei benachbarte vereinigt liegende Elemente 1. O. ein solches 2. O.

668) Dieser Gedanke findet sich schon bei *H. Graßmann*, Ausdehnungsl. v. 1862, Nr. 381, wenn er jeden Bruch mit n Nennern aus den n^2 Einheitsbrüchen ableitet.

669) Ann. éc. norm. (2) 11 (1882), p. 239—245 und Géom. réglée, Nr. 24. Die bilineare Form definiert bei ihm eine Projektivität zwischen den Punkten und Ebenen einer Geraden (corrélation harmonique), wie solche auf ihr durch die unendlich benachbarten Geraden indiziert werden. Nach Abbildung dieser Projektivitäten auf die Ebenen des Raumes entsprechen den singulären Projektivitäten (Elementenpaaren) die Ebenen einer Fläche 2. Kl. Indem er diese als das Absolute betrachtet, überträgt er die Maßbegriffe auf die Projektivitäten und macht davon vielfache Anwendungen in der differentiellen Liniengeometrie.

670) Math. Ann. 22 (1883), p. 299—367; vgl. auch Anm. 469.

671) Methoden z. Theorie d. ternären Formen, Leipzig 1889, § 15. In § 11

Auch die analytische Untersuchung der von *Th. Reye*[672]) eingeführten linearen Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde führt auf bilineare Formen, jedoch der besondern Art, daß die beiden Variablenreihen verschiedenen Gebieten (z. B. dem binären und quaternären) entnommen sind.

Ein Seitenstück zum Strahlgewinde bildet der eine infinitesimale reine Deformation eines elastischen Körpers (oder dessen Spannungszustand) darstellende *Tensor*[673]), der durch sechs Koordinaten p_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, p_{ik} = p_{ki})$ bestimmt wird.

Die die Lagen eines starren Körpers bestimmenden *Somenkoordinaten* von *E. Study* wurden schon Nr. **29** erwähnt[674]).

V. Koordinatentransformation.

36. Allgemeines. Werden den Elementen eines Körpers auf zwei verschiedene Arten (S) und (S') Zahlengruppen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ als Koordinaten zugewiesen (Nr. **1**), so bestimmen die Koordinaten eines Elementes in dem einen System schon die Koordinaten desselben Elementes in dem andern System (im allgemeinen mehrdeutig), d. h. die Koordinaten x_i sind Funktionen der Koordinaten x_i' und umgekehrt. Es bestehen also n voneinander unab-

---

dieses Werkes findet auch der allgemeine Gedanke Verwendung (vgl. Nr. **26**), die Koeffizienten in der Gleichung eines Konnexes (m, n) als seine Koordinaten zu betrachten.

672) J. f. Math. 104 (1889), p. 211—240; 106 (1890), p. 30—47, 315—329; 107 (1891), p. 162—178; 108 (1891), p. 89—124; Sitzungsb. Ak. Berlin 1889, p. 833—839. Diese Arbeiten sind vorwiegend synthetisch. Die analytische Behandlung haben *W. Stahl*, J. f. Math. 107 (1891), p. 179—188, u. *E. Timerding*, Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1898, p. 317—328, begonnen. Die Einführung der bilinearen Formen geschah auf Veranlassung von *F. London* durch *H. Guradze*, Die Reyesche Geom. d. Mannigf. proj. Grundgeb. mittels e. bes. Art bilin. Formen, Diss. Breslau 1900. Die von *J. Rosanes*[653]) angewandten Methoden und Begriffe lassen sich hier nachbilden. Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Mannigfaltigkeiten projektiver Kugelbüschel, -bündel und -gebüsche, die *Th. Reye*, Ann. mat. p. appl. (3) 5 (1901), p. 2—15, synthetisch untersucht hat, analytisch behandeln.

673) *H. E. Timerding*, Geom. d. Kr., p. 360—370. Für denselben Begriff gebraucht *W. Voigt*, Nachr. Ges. Gött. 1900, p. 117; 1904, p. 495, das Wort *Tensortripel*. Wie einer Dyname ein Strahlgewinde wird einem Tensor ein *Reye*scher Achsenkomplex beigeordnet. Natürlich lassen sich die Tensoren eineindeutig den Kegelschnitten einer Ebene (Nr. **26**) zuordnen.

674) Schließlich sei noch auf die von *Weber-Wellstein*, Encykl. 2, p. 105, mit Hilfe von *Funktionalen* definierten *Koordinaten der allgemeinsten algebraischen Gebilde*, die sich aus einzelnen Punkt-, Kurven- und Flächensystemen zusammensetzen, hingewiesen; ferner seien verschiedene auf Koordinaten bezügliche Stellen in § 13 und 14 dieses Werkes der Beachtung empfohlen.

hängige Gleichungen[675])

$$(1)\quad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder in expliziter Form

$$(1a)\quad x_i = f_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sie vermitteln die *Transformation der Koordinaten* eines Elementes im System (S) in die Koordinaten desselben Elementes im System (S') und umgekehrt.

Setzt man etwa das System (S') und damit die Koordinaten x_i' sämtlicher Elemente des Körpers als gegeben voraus, so definieren nach Nr. 4 Gleichungen der Art (1a) oder (1) ein neues Koordinatensystem. *Die Einführung eines neuen Koordinatensystems und eine Koordinatentransformation bedingen einander also gegenseitig*[676]).

Transformiert man das einen geometrischen Ort (eine Elementmannigfaltigkeit) definierende Gleichungssystem zwischen den Koordinaten x_i

$$(2)\quad X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_r = 0 \qquad (r \leqq n)$$

mittels (1a), so erhält man ein Gleichungssystem

$$(3)\quad X_1' = 0,\ X_2' = 0,\ \ldots,\ X_r' = 0,$$

das denselben Ort in den Koordinaten x_i' darstellt. Die Transformation hat zumeist den Zweck, den Gleichungen des Ortes einfachere oder doch für die Beantwortung gewisser Fragen brauchbarere Formen zu erteilen.

Nach *H. G. Zeuthen*[677]) hat schon *Apollonius* bei seinen Untersuchungen über Kegelschnitte nicht bloß mit Parallelkoordinaten[25]), sondern auch mit Transformationen dieser operiert. *L. Euler* war 1748 die Transformation eines Systems von Parallelkoordinaten in ein anderes (Nr. 37) oder von Parallelkoordinaten der Ebene in Polarkoordinaten[232]) geläufig. Allgemeinere solche Transformationen hat man im Laufe des 18. Jahrhunderts als analytische Hilfsmittel, zumal bei der Integration von Differentialgleichungen, vielfach verwendet, ohne auf ihre geometrische Bedeutung zu achten.

Als man im 19. Jahrhundert die x_i und x_i' in den Gleichungen (1a) als Koordinaten zweier verschiedener Elemente derselben Art in bezug auf dieselbe Basis oder auf verschiedene Basen deutete und dadurch zu Transformationen in dem zugrunde liegenden Elementenkörper (Koordinatenfeld, vorerst ebenes und räumliches Punktfeld)

675) Vgl. *N. Druckenmüller,* Übertragungsprinzipien, Art. 14.

676) *N. Druckenmüller,* a. a. O., Art. 15.

677) Kegelschn., 4. Abschnitt.

oder zu Verwandtschaften zweier solcher gelangte, erhielten diese Gleichungen eine ungeahnte Wichtigkeit[678]). Werden endlich die x_i und x_i' als Koordinaten von Elementen verschiedener Art gedeutet, so stellen die Gleichungen (1a) eine Abbildung oder Verwandtschaft zweier verschiedenartiger Elementenkörper (Koordinatenfelder) dar und liefern gleichzeitig ein *Übertragungsprinzip*[679]).

37. Lineare, insbesondre orthogonale Transformationen. Die Transformation rechtwinkliger Koordinaten in der Ebene findet sich bei *J. P. de Gua de Malves*[680]), *G. Cramer*[681]) und insbesondere *L. Euler*[682]). Dieser geht von der Frage aus, wie sich die Gleichung einer ebenen Kurve mit der Koordinatenbasis ändert. Indem er das ursprüngliche rechtwinklig gleichschenklige System OXY in das neue $O'X'Y'$ durch Schiebungen parallel OX und OY und Drehung um den Ursprung überführt, findet er, wenn O' die Koordinaten a, b besitzt und $\alpha = \widehat{OX, O'X'}$ ist, die Transformationsformeln[683]):

678) *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul, § 152, 217; *J. Plücker,* J. f. Math. 5 (1829) = Ges. Abh. 1, p. 144, 149; Entw. 2, p. 251 ff.; Syst. anal. Geom., p. 48 ff.; Syst. Geom. d. R., p. 7 ff.; *M. Chasles,* Anm. 706; *N. Druckenmüller,* a. a. O., Art. 15 ff. Vgl. auch III A B 4 a, *Fano,* Nr. 12; III A B 4 b, *Fano,* Nr. 1; III A B 5, *Schoenflies,* Nr. 6.

679) *J. Plücker,* Syst. anal. Geom., p. 48—83; *N. Druckenmüller,* a. a. O., Art. 15; *J. Plücker,* J. f. Math. 5 (1829), Nr. 31 Fußn., Nr. 36 ff. = Ges. Abh. 1, p. 144 Fußn., 149 f., und insbes. Entw. 2, p. 251 ff., stellt Verwandtschaften mittels einer „aequatio directrix", d. i. einer Gleichung der Form (1) dar, wo die beiden Koordinatenreihen auch zu verschiedenartigen Elementen gehören dürfen. *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 155—159 und zweite Fußn. p. 159, hat dieses Prinzip durch Verwendung mehrerer der Gl. (1) fruchtbar verallgemeinert.

Deutet man drei Zahlen einmal als Koordinaten eines Punktes, das andre Mal als Koordinaten einer Fläche, so ist damit eine Berührungstransformation bestimmt. Ein Beispiel hierfür wurde Nr. 23, Anm. 415 erwähnt; ein andres gibt *A. Demoulin,* Bull. sc. math. (2) 23 (1899), p. 242—244.

Ersetzt man in der Gleichung einer bekannten ebenen Kurve, etwa in rechtwinkligen Koordinaten x, y, diese durch irgendwelche andern Punkt- oder Linienkoordinaten u, v, so bezeichnet man dieses Hilfsmittel zur Ableitung neuer Kurven auch als *Methode der Koordinatenverwandlung.* Vgl. *G. Loria,* Ebene Kurven, p. 593; *H. Wieleitner,* Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908, V. Abschnitt.

680) Usage de l'analyse de Descartes etc., Paris 1740; vgl. *M. Cantor,* Vorl. 3 (2. Aufl.), p. 794 f.

681) Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750; vgl. *M. Cantor,* a. a. O., p. 825.

682) Introd. 2 (1748), cap. 2 (De coordinatarum permutatione). Auf genaue Vorzeichenfestsetzungen für Strecken und Winkel wird dabei natürlich noch nicht geachtet. Vgl. in dieser Beziehung *Heffter-Koehler* 1, p. 245 f.

683) *L. Euler,* Introd. 2, p. 17. Setzt man

$$x + iy = z, \quad x' + iy' = z', \quad a + ib = c,$$

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Für den Fall gegensinniger Achsenkreuze (Nr. 2), den *Euler* nicht berücksichtigt, wären in (1) die Vorzeichen von y' zu ändern. Aus den weiteren Transformationsformeln für rechtwinklige in schiefwinklige Koordinaten[684]) zieht er die wichtige Folgerung, daß sich die Ordnung einer algebraischen Kurve beim Wechsel des Parallelkoordinatensystems, d. i. bei einer beliebigen linearen Substitution der Koordinaten, nicht ändert[684a]).

Euler[685]) hat 1748 auch schon die Transformationsformeln für den Übergang von einem räumlichen rechtwinklig gleichschenkligen Achsenkreuz $OXYZ$ zu einem andern gleichartigen $O'X'Y'Z'$ unter Verwendung der Gl. (1) abgeleitet. Es treten hierin außer den Koordinaten a, b, c des Punktes O' noch die drei *Eulerschen Winkel* auf, nämlich der Neigungswinkel zwischen der xy- und $x'y'$-Ebene und die Winkel, unter denen die Schnittlinie dieser Ebenen (*Knotenlinie*) gegen die x- und x'-Achse geneigt ist[686]).

Mit diesen Transformationsformeln hat sich *Euler*[687]) noch 1770 und 1775 eingehend beschäftigt.

Bezeichnen x, y, z und x', y', z' die Koordinaten desselben Punktes P in bezug auf die beiden rechtwinklig gleichschenkligen Achsenkreuze $OXYZ$ bzw. $OX'Y'Z'$ mit demselben Ursprung und gleichen Einheitstrecken, ferner a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ die Kosinus der Winkel, unter denen die Achsen dieser Kreuze gegeneinander geneigt sind, wobei die Indizes 1, 2, 3 sich an erster Stelle auf die x-, y- und z-Achse, an zweiter Stelle auf die x'-, y'- und z'-Achse beziehen, dann

---

so lassen sich die Gleichungen (1) in die oft verwendete Gleichung

$$z = c + e^{i\alpha} z'$$

zusammenfassen, die auch wie die Gl. (1) als Darstellung einer Bewegung einer Ebene in sich oder als kongruente Abbildung einer Ebene auf eine andre gedeutet werden kann. Vgl. etwa *G. Holzmüller,* Anm. 126, p. 24.

684) Introd. 2, p. 21—23.

684a) Introd. 2, p. 25. Diesen Satz sprechen auch *J. P. de Gua de Malves,* Anm. 680, p. 340, und *G. Cramer,* Anm. 681, p. 54, aus; vgl. hierzu noch III C 4, *Berzolari,* Anm. 4.

685) Introd. 2, p. 365—369.

686) Zur Herleitung der Transformationsformeln vgl. *R. Wolf,* Arch. Math. Phys. (1) 13 (1849), p. 274 f.; *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Über die Theorie des Kreisels, Heft 1, Leipzig 1897, p. 17—19; *O. Staude,* Anal. Geom., p. 178—182.

687) Novi Comm. Ac. Petrop. 15, a. 1770 (1771), p. 75—106; 20, a. 1775 (1776), p. 189—207, 218—220.

ist[688])

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned}$$

Zufolge der bekannten Beziehung zwischen den Richtungskosinus einer orientierten Geraden und zwischen denen zweier orientierten normalen Geraden bezüglich eines rechtwinklig gleichschenkligen Achsenkreuzes (Nr. 3, Koordinaten von Strecken) bestehen zwischen den 9 Größen a_{ik} die 12 Gleichungen[689])

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 = 1 & (i = 1, 2, 3) \\ a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = 0 & (ik = 12, 23, 31) \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = 1 & (i = 1, 2, 3) \\ a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + a_{i3}a_{k3} = 0 & (ik = 12, 23, 31), \end{cases}$$

688) *J. L. Lagrange,* Nouv. Mém. Ac. Berlin a. 1773 = Oeuvres 3, p. 580 ff.; *A. J. Lexell,* Novi Comm. Ac. Petrop. 20, a. 1775 (1776), p. 246, für die Koordinaten entsprechender Punkte eines um O gedrehten starren Körpers. Die obige Bedeutung der a_{ik} war aber *Euler* jedenfalls schon 1770 (Anm. 687) bekannt.

Die Gl. (2) ergeben sich unmittelbar, wenn man den von O nach P reichenden, aus den zu OX', OY', OZ' parallelen Strecken zusammengesetzten Linienzug auf die Achsen OX, OY, OZ normal projiziert und den Satz benützt, daß diese Projektionen denen der Strecke OP gleich sind. Vgl. hierzu sowie wegen der Ableitung der entsprechenden Transformationsformeln für schiefwinklige Koordinaten: *L. N. M. Carnot,* Sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points etc., Paris 1806, p. 61; deutsche Übers. von *H. C. Schumacher,* Geometrie der Stellung 2, Altona 1810, p. 317—321; *Ch. Sturm,* Ann. math. p. appl. 15 (1824/25), p. 335 ff.; *R. Baltzer,* Anal. Geom., p. 383. Wegen der Transformation schiefwinkliger Koordinaten vgl. ferner: *Monge* et *Hachette,* Anm. 227, p. 147—151; *G. Monge,* Anm. 86, p. 20—24; *Livet,* J. éc. polyt. 6 (1806), p. 270—275; *J. F. Français,* ebenda 7 (1808), p. 182—190; *J. N. P. Hachette,* Corr. éc. polyt. 2 (1809—13), p. 6—13, 247—249; *J. A. Grunert,* Anm. 693, p. 458—494; *L. I. Magnus,* Aufg. u. Lehrs. 2, p. 51 f.; *G. S. Ohm,* Anm. 65, p. 113—125, 133—144.

689) *L. Euler,* Novi Comm. Ac. Petrop. 15, a. 1770 (1771), p. 76 ff. Er gelangt zur Gleichungsgruppe (3) durch die Forderung, daß zufolge obiger Substitution

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

werden soll. Solche Substitutionen, die nach einer Bemerkung *A. Cayleys* gewöhnlich *orthogonal* heißen, wurden für n Variable (bei *Euler* für $n = 4$, a. a. O., p. 89 ff.) von *A. L. Cauchy, C. G. J. Jacobi, O. Hesse* u. a. studiert und angewandt; vgl. I B 2, *Meyer,* Anm. 39, 41—46; *E. Pascal,* Die Determinanten, deutsch von *H. Leitzmann,* Leipzig 1900, p. 164 f. Sie lassen sich im R_n (Nr. 3) als Transformationen rechtwinkliger Koordinaten mit demselben Ursprung oder als Bewegungen um einen Punkt deuten; vgl. etwa *H. Laurent,* La géométrie analytique générale, Paris 1906, p. 7—12, 29—33.

von denen die eine Gruppe rein algebraisch aus der andern folgt[690]). Multipliziert man nach *A. L. Cauchy*[691]) die Gleichungen (2) mit den Koeffizienten einer Spalte, so ergeben sich, unter Berücksichtigung von (3), die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned}$$

für die zu (2) inverse Transformation und daraus mit Benutzung von $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ die Gleichungen (4). Der Multiplikationssatz der Determinanten (I A 2, *Netto*, Nr. **21**) führt sofort zu dem Satz, daß das Quadrat der Determinante

$$\Delta = |a_{ik}|$$

der *orthogonalen Transformation* (2) den Wert $+1$ hat, also $\Delta = \pm 1$ ist. Bezeichnet ferner α_{ik} die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante von Δ, so besteht die weitere Beziehung

$$(6)\qquad a_{ik} = \Delta \alpha_{ik}.$$

$\Delta = +1$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichsinnigkeit (Gleichartigkeit, Nr. 3), $\Delta = -1$ für die Gegensinnigkeit der beiden Achsenkreuze[692]).

---

690) *L. Euler*, a. a. O., p. 79 ff.; die im Text folgenden Andeutungen über die Ableitung der Grundformeln der orthogonalen Transformation gelten auch für *n* Variable und stammen von *Cauchy* und *Jacobi*; vgl. *R. Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Aufl., Leipzig 1875, p. 172 ff. Alle zwischen den a_{ik} bestehenden Beziehungen lassen sich aus den Gl. (3) ableiten. Vgl. wegen solcher Beziehungen: *M. Reiß*, Corr. math. phys. Bruxelles 11 (1839), p. 119—173; *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 216—219; J. f. Math. 63 (1864), p. 247—251, der sie, weil die unendlichfernen Punkte der beiden Achsenkreuze Poldreiecke des absoluten Kegelschnittes sind, mit der Theorie der Kurven zweiter Ordnung verknüpft.

691) Exercises de Mathématiques, 4ᵉ année, Paris 1829, p. 158 = Oeuvres (2) 9, p. 193 f. *O. Hesse*, Vorles. Raum, p. 214, leitet sie aus

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

durch Differentiation nach x', y', z' ab.

692) Darauf haben *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 309, und *L. I. Magnus*, Aufg. u. Lehrs. 2 (1837), p. 58, aufmerksam gemacht. Eingehend erörterte dies *M. Reiß*, Anm. 690, der darlegt, daß die Mathematiker, die sich vorher mit der orthogonalen Transformation beschäftigt hatten, nur das positive Vorzeichen von Δ beachteten, ja sogar die Unmöglichkeit des negativen zu beweisen versuchten. *R. Dedekind*, J. f. Math. 50 (1855), p. 272—275, beweist, daß das Bestehen der Gl. (3) schon die Rechtwinkligkeit *beider* Achsenkreuze zur Folge hat.

Da zwischen den 9 Größen a_{ik} die 6 voneinander unabhängigen Gl. (3) oder (4) bestehen, so müssen sie sich durch drei voneinander unabhängige Größen ausdrücken lassen. Als solche benutzte *Euler*[693]) 1770 drei Winkel und gelangte dadurch zu den unsymmetrischen Transformationsformeln von 1748 (Anm. 685). Später[694]) drückte er die a_{ik} durch vier Winkel $\varphi, \alpha, \beta, \gamma$ aus, die der Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

genügen. Für $\Delta = +1$ sind α, β, γ die Richtungswinkel der Achse jener Drehung, die das eine Achsenkreuz in das andre überführt[695]), und φ ist der zugehörige Drehwinkel. Die Gleichungen haben die Form

$$\begin{aligned} &a_{11} = \cos xx' = \cos^2\alpha(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (7)\qquad &a_{12} = \cos xy' = \cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi \\ &a_{21} = \cos yx' = \cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{aligned}$$

die übrigen gehen durch zyklische Änderung aus den hingeschriebenen hervor.

A. J. Lexell[696]) drückte die a_{ik} durch drei unter ihnen, nämlich a_{11}, a_{22}, a_{33} aus. Setzt man ferner in den Gl. (7)

$$\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \lambda,\ \cos\beta \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \mu,\ \cos\gamma \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \nu,$$

so erhält man für $\Delta = +1$ die schon von *Euler*[697]) angegebenen,

---

693) Novi Comm. Ac. Petrop. 15, a. 1770 (1771), p. 86. Vgl. wegen dieser Formeln IV 6, *Stäckel*, p. 553, und wegen der verschiedenen Gestalten, in denen sich ihrer *Lagrange, Laplace, Poisson, Lacroix* und *Encke* bedient haben, *J. A. Grunert*, Supplemente zu *G. S. Klügels* Wörterbuche der reinen Mathematik, 1. Abt., Leipzig 1833, p. 485 ff.

694) Novi Comm. Ac. Petrop. 20, a. 1775 (1776), p. 220. Vgl. auch *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 2 (1827), p. 188 f. = Werke 7, p. 3—5; *J. A. Grunert*, J. f. Math. 8 (1832), p. 153—159; Nouv. Ann. (1) 5 (1846), p. 414—419; *R. Baltzer*, Determinanten, 4. Aufl., p. 181 f.

695) Bezüglich dieses Satzes vgl. *E. Kötter*, Bericht, p. 190 f.

696) Anm. 688, p. 254; in dessen Gleichungen sind die mit α, β, γ bezeichneten Größen bzw. $\frac{1-a_{11}}{2}, \frac{1-a_{22}}{2}, \frac{1-a_{33}}{2}$. Vgl. hierzu ferner: *G. Monge*, Mém. Ac. sc. Paris 1784, p. 114 (*J. D. Gergonne*, Ann. math. p. appl. 7 (1816/17), p. 54—61, gibt symmetrischere Ausdrücke in den 5 Größen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, zwischen denen zwei Bedingungsgleichungen bestehen); *J. F. Encke*, Berliner astr. Jahrb. für 1832 (1830), p. 305—310 = (franz. Übers.) Corr. math. phys. Bruxelles 7 (1832), p. 273; *J. A. Grunert*, Anm. 693, p. 481 f.; *M. Chasles*, Ap. hist., p. 678; *L. I. Magnus*, Aufg. u. Lehrs. 2, p. 59 ff. (auch für $\Delta = -1$); *M. Reiß*, Anm. 690, p. 158 ff.

dann von *O. Rodrigues*[697]) wiedergefundenen rationalen Ausdrücke der a_{ik} durch λ, μ, ν in der Form

$$(8)\quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{12} &= 2\,\frac{-\nu+\lambda\mu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, \quad a_{21} = 2\,\frac{\nu+\lambda\mu}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo wieder die fehlenden Gleichungen durch zyklische Änderung aus den hingeschriebenen hervorgehen. Ändert man in (8) die Vorzeichen einer ungeraden Anzahl von Reihen oder Spalten der Matrix $|a_{ik}|$, so erhält man eine orthogonale Transformation mit $\Delta = -1$[698]). *A. Cayley*[699]) hat gezeigt, wie sich die n^2 Koeffizienten einer ortho-

697) *L. Euler*, Anm. 689, p. 101; *O. Rodrigues*, J. math. p. appl. 5 (1840), p. 405. Vgl. noch *L. Schläfli*, Arch. Math. Phys. (1) 13 (1849), p. 279 f., und *G. Darboux*, Leçons 1, p. 34, ferner die in *C. F. Gauß'* Nachlaß gefundenen und nach *P. Stäckel* wahrscheinlich aus dem Jahre 1819 stammenden Bemerkungen (Werke 8, p. 357 ff.), worunter auch die Zusammensetzung zweier aufeinanderfolgenden orthogonalen Transformationen, die der von *Rodrigues* gefundenen Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Achsen entspricht.

698) Zur Transformation rechtwinkliger Koordinaten vgl. noch: *G. Bardelli*, Rend. Ist. Lomb. (2) 2 (1869), p. 248—255; *F. Borletti*, ebenda (2) 15 (1882), p. 252—258; *G. Darboux*, Leçons 4, p. 433—435, und die Note in *G. Koenigs*, Leçons de cinématiques, Paris 1897, p. 343 f.; *A. Schoenflies*, Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1910), p. 1—11; die letzten drei Arbeiten bezwecken die direkte Ableitung der Formeln (8).

Wegen Darstellung der orthogonalen Transformation mittels Quaternionen und der darauf beruhenden Ableitung von (8) siehe: *A. Cayley*, The Lond. Edinb. Dublin Phil. Mag. 26 (1845), p. 141—145; 33 (1848), p. 196—200 = Math. pap. 1, p. 123—126, 405—409; *H. Hankel*, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, p. 193 f.; *Klein-Sommerfeld*, Anm. 686, p. 55—65; *G. Koenigs*, Leçons de cinématiques, Paris 1897, p. 464—483; *E. Study*, Mitt. naturw. Ver. Neuvorp. 1899; *W. Fr. Meyer*, Sitzungsb. Ak. (math.-nat.) Wien 116[2a], p. 136—150.

Bestimmt man einen reellen Punkt der Einheitskugel um O durch die Minimalkoordinate ξ (Nr. 33), so läßt sich nach *A. Cayley*, Math. Ann. 15 (1879), p. 239 = Math. pap. 10, p. 153, jede Drehung der Kugel um O in der Form

$$\xi = \frac{(d+ic)\,\xi' - (b-ia)}{(b+ia)\,\xi' + (d-ic)}$$

darstellen, wo

$$a = \cos\alpha \sin\frac{\varphi}{2}, \quad b = \cos\beta \sin\frac{\varphi}{2}, \quad c = \cos\gamma \sin\frac{\varphi}{2}, \quad d = \cos\frac{\varphi}{2},$$

daher

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

ist. Vgl. III AB 4b, *Fano*, Anm. 204; *Klein-Sommerfeld*, a. a. O., p. 23 ff., und die direkte Herleitung dieser Gleichung bei *A. Schoenflies*, Jahresber. deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 456—458, und *J. Wellstein*, ebenda 19 (1910), p. 169—172; vgl. ferner noch *G. Darboux*, Bull. sc. math. (2) 29 (1905), p. 34—55.

699) J. f. Math. 32 (1846), p. 119—123 = Math. pap. 1, p. 332—335. Für $n = 4$ auch bei *L. Euler*, Anm. 689, p. 102. Vgl. *R. Baltzer*, Anm. 690, p. 179.

gonalen Transformation im R_n rational durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Größen ausdrücken lassen.

Aus den eine beliebige *orthogonale Transformation im Bündel* (O) darstellenden Gleichungen (2) und (3) folgen sofort die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14} \\
y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24} \\
z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34},
\end{aligned} \tag{9}
$$

die zusammen mit den Gl. (3) den Übergang von einem rechtwinklig gleichschenkligen Achsenkreuz $OXYZ$ zu einem andern solchen $O'X'Y'Z'$ mit gleicher Einheitstrecke darstellen, dessen Ursprung O' die Koordinaten a_{14}, a_{24}, a_{34} besitzt. Deutet man in (9) die Variablen als Koordinaten zweier auf dasselbe Achsenkreuz bezogenen Punkte, so stellen diese Gleichungen eine Transformation des Raumes (Nr. 36) und zwar zusammen mit den Gl. (3), wenn $\Delta = +1$ ist, die *allgemeinste Bewegung* eines starren Körpers dar[700]).

Gehören zu den beiden rechtwinklig gleichschenkligen Achsenkreuzen verschiedene Einheitstrecken, so unterscheiden sich die Transformationsgleichungen von den obigen bloß darin, daß statt a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ λa_{ik} tritt, wo λ eine von 0 und ∞ verschiedene positive oder negative reelle Zahl bezeichnet. Bezogen auf ein festes Achsenkreuz stellen diese Gleichungen eine Ähnlichkeitstransformation, also eine Operation der *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* (III AB 4b, *Fano*, Nr. 4) dar. *F. Klein*[701]) klassifiziert die „geometrischen Größen" (z. B. die Vektoren) nach dem Verhalten ihrer Koordinaten gegenüber den Operationen dieser Gruppe oder gegenüber der Gruppe der Transformationen eines rechtwinklig gleichschenkligen Achsenkreuzes, indem er alle diejenigen und nur diejenigen als gleichartig ansieht, deren Koordinaten bei den Operationen der Gruppe die gleichen Änderungen erleiden.

Die auf ein rechtwinklig gleichschenkliges Achsenkreuz bezogenen *Plückerschen Ebenenkoordinaten* (Nr. 19) erfahren beim Übergang auf

700) Vgl. IV 3, *Schoenflies* und *Grübler*, Nr. 6; IV 6, *Stäckel*, Nr. 27, 28. Die Lage eines rechtwinkligen Achsenkreuzes im Raum läßt sich durch acht homogene Koordinaten festlegen, zwischen denen eine quadratische Beziehung besteht, die der zwischen den Koordinaten eines Strahles (Nr. 27) analog ist. Vgl., außer Anm. 552, die analytische Darstellung von *R. de Saussures* „Géométrie des feuillets" bei *R. Bricard*, Nouv. Ann. (4) 10 (1910), p. 1—21, wo sich nähere Angaben über die *Saussure*schen Arbeiten finden.

701) Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 239 = Math. Ann. 62 (1906), p. 421, 447 f. Vgl. auch: III AB 4b, *Fano*, Nr. 4; IV 2, *Timerding*, Nr. 1—4; IV 14, *Abraham*, Nr. 1—3; *H. E. Timerding*, Geom. d. Kr., p. 58 ff.

ein neues solches Achsenkreuz dieselben Substitutionen wie die Cartesischen Punktkoordinaten[702]).

Die obige orthogonale Transformation ist nur ein Sonderfall jener linearen Transformationen, die eine Fläche zweiten Grades in sich überführen[703]).

Wenn alle Koeffizienten a_{ik} voneinander unabhängig sind, so stellen die Gl. (9) entweder den Übergang von einem Parallelkoordinatensystem zu einem andern[704]) oder, unter xyz und $x'y'z'$ Parallelkoordinaten zweier auf dasselbe Achsenkreuz bezogenen Punkte verstanden, die allgemeinste affine Raumtransformation dar[705]). Dividiert man die rechten Seiten der Gl. (9) durch $a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}$, so stellen die so erhaltenen Gleichungen entweder den Übergang von einem System linearer Punktkoordinaten zu einem andern (Nr. 5) oder eine Kollineation des Raumes dar[706]). Diese Koordinatentransformation wurde schon in Nr. 5 (für Ebenenkoordinaten in Nr. 21) besprochen; auf die mannigfaltigen, im vorhergehenden nicht erwähnten Sonderfälle kann nicht eingegangen werden[707]).

---

702) *O. Hesse,* Vorles. Raum, p. 220.

703) I B 2, *Meyer,* Nr. 8; *Clebsch-Lindemann* 2, p. 356—389 (vgl. ebenda p. 389—414 über die linearen Transformationen, die ein Strahlgewinde in sich überführen); *P. F. Smith,* Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 1—16.

Die orthogonale Transformation im Bündel führt gleichzeitig zu Sätzen der sphärischen Trigonometrie (vgl. *A. v. Braunmühl,* Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie 2, Leipzig 1903, p. 179 f.); den tieferen Zusammenhang zwischen diesen beiden Gebieten hat *E. Study,* Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, Abh. Ges. Leipzig (math.-phys.) 20 (1893), p. 87—232 (auch als Sonderabdruck Leipzig 1893 erschienen), aufgedeckt. *E. Eckhardt,* Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks, Leipzig und Berlin 1909, p. 145 ff., deutet die orthogonalen Transformationen am ebenen Kreisviereck.

Beiträge zur Koordinatentransformation in Räumen konstanter Krümmung lieferten: *E. Beltrami,* Ann. mat. p. appl. (2) 2 (1868/69), p. 232—255 = Opere 1, p. 406—429; *J. Lüroth,* Rend. Circ. mat. Palermo 23 (1907), p. 163—168.

704) S. Anm. 688. Wegen Verwendung der Koordinatentransformationen für kristallographische Zwecke vgl. *C. Viola,* Rend. Acc. Lincei Roma 15 (1906), p. 89—98, wo auch weitere Literatur angegeben.

705) *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul, § 152. Die Verwandtschaft ergibt sich auch, wenn man Punkte einander zuordnet, die bezüglich zweier ungleichschenkliger Achsenkreuze gleiche Koordinaten besitzen.

706) Vgl. *M. Chasles,* Ap. hist., p. 767 ff. Nach ihm (p. 769) gab für die Ebene *E. Waring* (1762) diese Transformationsgleichungen an (als Verallgemeinerung einer schon von *I. Newton* gebrauchten Methode, Kurven zu transformieren), ohne sie aber als Definition einer Verwandtschaft aufzufassen. Vgl. III C 4, *Berzolari,* Anm. 4; III AB 4a, *Fano,* Nr. 1; *W. Fiedler,* Darst. Geom., 3. Aufl., 3, p. 411 ff.

Der Bedeutung der linearen Transformation anderer Koordinaten wurde meist bei den betreffenden Koordinatensystemen gedacht[708]).

707) Die Transformation baryzentrischer Koordinaten bei *A. F. Möbius,* Baryc. Calcul, § 35 = Werke 1, p. 58; vgl. hierzu auch *C. A. Laisant,* L'Enseign. math. 3 (1901), p. 208—210. Bezüglich der Transformation einiger der in Nr. 6 und 22 besprochenen linearen Koordinaten vgl. *W. Fiedler,* Darst. Geom., 3. Aufl., 3, p. 421 ff., ferner für die Ebene *Heffter-Koehler* 1, an verschiedenen Stellen.

Deutet man in den Gl. (9) x, y, z und x', y', z' als lineare Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten, so stellen sie die allgemeinste *Korrelation* im Raum dar. Bezüglich der Sonderfälle der Kollineationen und Korrelationen vgl. *C. Segre,* Mem. Acc. Lincei Roma (3a) 19 (1884); *P. Muth,* Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899, p. 198—223; III A B 5, *Schoenflies,* Nr. 11—15.

708) Wegen der Transformation von Polarkoordinaten ineinander vgl. *J. A Grunert,* Anm. 229^a, p. 5—27. Bezüglich nichtlinearer Koordinatentransf. vgl. Nr. 4. 20, ferner *Th. Reye,* J. f. Math. 94 (1883), p. 312—318; I B 1 c, *Landsberg,* Nr. 23

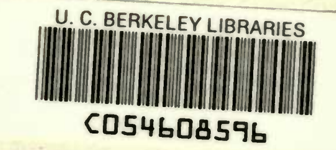
(Abgeschlossen im Juli 1910.)










U. C. BERKELEY LIBRARIES
C054608596

